AS
222
R63
SER. 6
v. 20
1934
PER

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXXXI

1934 (XII)

SERIE SESTA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX

ROMA

DOTT. GIOVANNI BARDI

TIPOGRAFO DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1934 (XII)

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1934 (Anno XII).

(Ogni Memoria e Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo)

Matematica. — *Sopra le equazioni differenziali dipendenti da una curva*[1]. Nota[2] di B. MANIÀ, presentata dal Corrisp. L. TONELLI.

Sia data un'equazione differenziale

$$u' = f(x, y_0(x), y_0'(x), u) \tag{1}$$

dipendente dalla curva assolutamente continua

$$C_0: \quad y = y_0(x) \quad , \quad (a \leq x \leq b),$$

ed esista una funzione $u_0(x)$, assolutamente continua nell'intervallo (a, b), la quale in quasi tutto questo intervallo soddisfi alla (1) e nel punto $x = a$ assuma un valore fissato $\bar{u}$. Ci proponiamo di stabilire una condizione sufficiente affinchè la curva C_0 si possa approssimare mediante curve

$$C: \quad y = y(x) \quad , \quad (a \leq x \leq b),$$

di classe 1 (cioè tali che in tutto l'intervallo (a, b) esista finita e continua la derivata $y'(x)$), aventi in comune con C_0 i punti terminali, e tali che l'equazione (1) ad esse corrispondente ammetta in tutto l'intervallo (a, b) una soluzione $u(x)$, la quale per $x = a$ assuma il valore $\bar{u}$ e converga a $u_0(x)$ uniformemente nell'intervallo (a, b).

Il problema analogo per gli integrali della forma $I_C = \int_C f(x, y, y')\, dx$,

(1) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale di Pisa.

(2) Pervenuta all'Accademia il 27 giugno 1934.

che si ottiene dal nostro problema supponendo il secondo membro della (1) indipendente da u, è stato risolto in un caso particolare da M. Lavrentieff [1] e in casi più generali da L. Tonelli [2]. Questo problema è molto importante per il calcolo delle variazioni, perchè quando non è possibile eseguire l'approssimazione indicata, può darsi che il limite inferiore dell'integrale I_C nella classe delle curve C assolutamente continue di un campo, congiungenti due punti fissi, sia diverso dal limite inferiore di I_C nella classe delle curve C del campo, congiungenti quegli stessi punti e formate da un numero finito di archi di classe 1; e quindi i metodi per la dimostrazione dell'esistenza del minimo di I_C fondati rispettivamente sulla considerazione di successioni minimizzanti formate da curve assolutamente continue o da poligonali non sono sempre equivalenti.

Il problema di approssimazione relativo all'equazione differenziale (1) che qui ci proponiamo di studiare è legato alla stessa questione di calcolo delle variazioni, ma non più relativamente ai problemi di minimo degli integrali, bensì relativamente ai problemi di Mayer.

1. Se $f(x, y, y', u)$ è una funzione finita e continua per (x, y) appartenente a un campo A, y' finito qualunque e u appartenente a un intervallo e chiuso (α, β); se

$$C_0: \quad y = y_0(x) \quad , \quad (a \leq x \leq b),$$

è una curva assolutamente continua del campo A per la quale l'equazione (1) ammette in quasi tutto (a, b) una soluzione assolutamente continua $u_0(x)$ con $u_0(a) = \bar{u}$, essendo $\bar{u}$ un valore assegnato, e $u_0(x)$ sempre appartenente ad (α, β); diciamo che $u_0(x)$ può essere approssimata mediante le soluzioni $u(x)$ dell'equazione

$$u' = f(x, y, y', u) \tag{2}$$

corrispondenti a curve

$$C: \quad y = y(x) \quad , \quad (a \leq x \leq b)$$

di classe 1, appartenenti al campo A, aventi gli stessi punti terminali di C_0 e convergenti uniformemente a C_0, se è possibile determinare una successiva $\{C_n\}$ di tali curve in modo che, per ogni n, l'equazione (2) corrispondente ammetta una soluzione assolutamente continua $u_n(x)$ in tutto

(1) M. Lavrentieff, *Sur quelques problèmes du calcul des variations*, « Ann. di Mat. », vol. 4, 1926, pp. 7–28.

(2) L. Tonelli, *Sur une question du calcul des variations*, « Rec. Math. Moscou. », vol. 1, 1926. Una nuova dimostrazione del teorema del Tonelli si trova nella Nota di B. Manià, *Sull'approssimazione delle curve e degli integrali*, « Boll. U. M. I. », vol. 13, 1934, pp. 36–41.

(a, b) con $u_n(a) = \bar{u}$ e $u_n(x)$ appartenente ad (α, β), e sia

$$\lim_{n \to \infty} | u_n(x) - u_0(x) | = 0$$

uniformemente in (a, b).

Ricordiamo poi le seguenti definizioni poste dal Tonelli [1].

Se $g(x, y, y')$ è una funzione finita e continua per (x, y) appartenente a un campo A e y' finito qualunque, si dice che $g(x, y, y')$ soddisfa alla *condizione* α) se ad ogni parte limitata e chiusa A′ di A si possono far corrispondere due numeri positivi λ e Λ tali che, per (x, y) appartenente ad A′ e y' finito qualunque, si abbia sempre

$$| g(x, y, y') | \leq \lambda + \Lambda | y' |;$$

si dice che $g(x, y, y')$ soddisfa alla *condizione* β), se ammette ovunque finita in A la derivata $g_y(x, y, y')$ e ad ogni parte limitata e chiusa A′ di A si possono far corrispondere due numeri positivi λ e Λ tali che, per (x, y) appartenente ad A′ e y' finito qualunque si abbia sempre

$$| g_y(x, y, y') | \leq \lambda + \Lambda | y' |;$$

si dice che $g(x, y, y')$ soddisfa alla *condizione* γ), se ammette ovunque finita in A la derivata $g_y(x, y, y')$ e se ad ogni parte limitata e chiusa A′ di A si possono far corrispondere due numeri positivi λ e Λ tali che per (x, y) appartenente ad A′ e y' finito qualunque, si abbia

$$| g_y(x, y, y') | \leq \lambda + \Lambda M(x, y'),$$

essendo $M(x, y')$ il minimo valore assoluto di $g(x, y, y')$ per (x, y') fissato e per tutti gli y tali che (x, y) appartenga ad A′.

2. Ciò posto possiamo dimostrare il seguente

Teorema. – *La funzione* $f(x, y, y', u)$ *sia finita e continua insieme con la sua derivata* $f_u(x, y, y', u)$ *per* (x, y) *appartenente a un campo limitato e chiuso* A, y' *finito qualunque,* u *appartenente a un intervallo chiuso (finito)* (α, β);

sia

$$C_0: \quad y = y_0(x) \quad , \quad (a \leq x \leq b),$$

una curva assolutamente continua tutta interna al campo A, *per la quale l'equazione* (1) *ammetta in quasi tutto* (a, b) *una soluzione assolutamente continua* $u = u_0(x)$ *con* $u_0(a) = \bar{u}$ *e* $u_0(x)$ *sempre interno ad* (α, β);

esistano tre funzioni $g_1(x, y, y')$, $g_2(x, y', y')$, $g_3(x, y, y')$, *finite e continue per* (x, y) *appartenente ad* A *e* y' *finito qualunque, soddisfacenti ri-*

(1) Vedi L. Tonelli, loc. cit., o anche B. Manià, loc. cit.

spettivamente alle condizioni α), β), γ), *e tali che esistano finiti gli integrali*

$$\int_{C_0} g_2(x, y, y')\,dx \quad \text{e} \quad \int_{C_0} g_3(x, y, y')\,dx,$$

per le quali sia sempre

$$(3)\quad |f(x, y, y', u)| \leq |g_1(x, y, y')| + |g_2(x, y, y')| + |g_3(x, y, y')|,$$

e

$$(4)\quad |f_u(x, y, y', u)| \leq |g_1(x, y, y')| + |g_2(x, y, y')| + |g_3(x, y, y)|.$$

Allora la soluzione $u_0(x)$ *dell'equazione* (2) *corrispondente alla curva* C_0 *può essere approssimata mediante le soluzioni* $u(x)$ *dell'equazione* (2) *corrispondente a curve* C *di classe* 1, *appartenenti al campo* A, *aventi gli stessi punti terminali di* C_0 *e uniformemente convergenti a* C_0.

Si può fissare una successione di curve

$$C_n: \quad y = y_n(x) \quad , \quad (a \leq x \leq b \; ; \; n = 1, 2, \cdots),$$

di classe 1, appartenenti al campo A, aventi gli stessi punti terminali di C_0, convergenti uniformemente a questa curva e le cui lunghezze L_n convergano alla lunghezza L_0 di C_0, tali che sia

$$(5)\quad \lim_{n\to\infty} \int_{C_n} \{|g_1(x, y_n, y_n')| + |g_2(x, y_n, y_n')| + |g_3(x, y_n, y_n')\}\,dx =$$

$$= \int_{C_0} \{|g_1(x, y_0, y_0')| + |g_2(x, y_0, y_0')| + |g_3(x, y_0, y_0')|\}\,dx \,(1).$$

Allora (2), per la (3), vale anche la relazione

$$(6)\quad \lim_{n\to\infty} \int_a^b |f(x, y_n, y_n', u_0) - f(x, y_0, y_0', u_0)|\,dx = 0,$$

e ad ogni numero positivo ε si può far corrispondere un numero positivo δ tale che, se E è un qualunque insieme di punti di (a, b) di misura $m(E) \leq \delta$, si abbia

$$(7)\quad \int_E \{|g_1(x, y_n, y_n')| + |g_2(x, y_n, y_n')| + |g_3(x, y_n, y_n')|\}\,dx < \varepsilon,$$

per ogni n.

(1) Vedi L. Tonelli, loc. cit., o B. Manià, loc. cit.

(2) Vedi L. Tonelli, *Fondamenti di calcolo delle variazioni*, I, p. 366 e sgg.

Osservato ciò, tentiamo di risolvere l'equazione

$$(2^*) \qquad u = \bar{u} + \int_a^x f(x, y_n, y_n', u)\, dx,$$

in un intervallo $(a \leq x \leq b')$ con $b' \leq b$, col metodo delle approssimazioni successive, ponendo

$$v_0(x) = u_0(x)$$

$$v_1(x) = \bar{u} + \int_a^x f(x, y_n, y_n', v_0(x))\, dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v_{m+1}(x) = \bar{u} + \int_a^x f(x, y_n, y_n', v_m(x))\, dx.$$

Potremo proseguire in questo modo fino a quando i valori di $v_m(x)$, per x in (a, b'), apparterranno tutti all'intervallo (α, β), e avremo allora

$$(8) \qquad |v_{m+1} - v_m(x)| \leq \int_a^x |f_u(x, y_n, y_n', \tilde{v}_m(x))|\, |v_m(x) - v_{m-1}(x)|\, dx,$$

essendo $\tilde{v}_m(x)$ un valore compreso fra $v_{m-1}(x)$ e $v_m(x)$.

Posto

$$\delta_m(x) = \operatorname*{Max}_{a \leq t \leq x} |v_{m+1}(t) - v_m(t)|$$

e

$$\Lambda_n(x) = \int_a^x \{ |g_1(x, y_n, y_n')| + |g_2(x, y_n, y_n')| + |g_3(x, y_n, y_n')| \}\, dx,$$

dalla (8) e dalla (4) segue

$$\delta_m(x) \leq \Lambda_n(x)\, \delta_{m-1}(x),$$

e quindi

$$\delta_m(x) \leq \Lambda_n^m(x)\, \delta_0(x).$$

Di qui si ha subito

$$|v_{m+1}(x) - u_0(x)| \leq \delta_0(x) \{ 1 + \Lambda_n(x) + \Lambda_n^2(x) + \cdots + \Lambda_n^m(x) \},$$

in tutto (a, b').

Se fissiamo $\delta > 0$ in modo che per ogni n valga la (7) con $\varepsilon = \frac{1}{2}$, si ha che per $(a \leq x \leq a + \delta)$ è sempre $\Lambda_n(x) \leq \frac{1}{2}$, e quindi, posto $b' = a + \delta$,

$$(9) \qquad |v_{m+1}(x) - u_0(x)| \leq 2\, \delta_0(x)$$

in tutto (a, b'), e nel secondo membro di questa disuguaglianza non compare più l'indice m.

Poichè è

$$\delta_0(x) = \operatorname*{Max}_{a \leq t \leq x} |v_1(t) - u_0(t)| \leq$$

$$\leq \int_a^x |f(x, y_n, y_n', u_0) - f(x, y_0, y_0', u_0)|\, dx,$$

e poichè i valori di $u_0(x)$ sono tutti interni ad (α, β), dalla (9) e dalla (6) segue che si può determinare un intero positivo n_1 tale che per ogni $n \geq n_1$, tutte le $v_m(x)$ abbiano sempre valori appartenenti ad (α, β). Ne segue che per $n \geq n_1$ l'equazione (2^*) ammette una soluzione $u_n(x)$ in $(a, a + \delta)$ ed è sempre in questo intervallo

$$|u_n(x) - u_0(x)| \leq 2 \int_a^x |f(x, y_n, y_n', u_0) - f(x, y_0, y_0', u_0)|\, dx.$$

Passiamo ora a studiare l'equazione

$$u = u_n(a + \delta) + \int_{a+\delta}^{x} f(x, y_n, y_n', u)\, dx$$

per $n \geq n_1$.

Come sopra si dimostra che per $n \geq n_2$, con $n_2 > n_1$ scelto opportunamente, tale equazione ammette una soluzione $v_m(x)$ in tutto l'intervallo $(a + \delta, a + 2\delta)$ ed è

$$|u_n(x) - u_0(x)| \leq 2 \left\{ |u_n(a + \delta) - u_0(a + \delta)| + \right.$$

$$\left. + \int_{a+\delta}^{a+2\delta} |f(x, y_n, y_n', u_0) - f(x, y_0, y_0', u_0)|\, dx \right\}.$$

Dunque per $n \geq n_2$ l'equazione (2^*) ammette una soluzione $u_n(x)$ in tutto l'intervallo $(a, a + 2\delta)$ ed è sempre in questo intervallo

$$|u_n(x) - u_0(x)| \leq 4 \int_a^{a+2\delta} |f(x, y_n, y_n', u_0) - f(x, y_0, y_0', u_0)|\, dx.$$

Ripetendo il ragionamento fatto un numero finito di volte si giunge alla conclusione che esiste un intero positivo $\bar{n}$ tale che, per $n \geq \bar{n}$, la (2^*) ammette una soluzione $u_n(x)$ in tutto l'intervallo (a, b) ed è sempre

$$|u_n(x) - u_0(x)| \leq k \int_a^b |f(x, y_n, y_n', u_0) - f(x, y_0, y_0', u_0)|\, dx,$$

essendo k una costante.

Tenendo conto della (6), segue di qua il teorema enunciato.

Matematica (Geometria). — *Sulla teoria delle ipersuperficie iperalgebriche.* Nota [1] di M. VILLA, presentata dal Corrisp. L. BERZOLARI.

1. In un lavoro [2] in corso di pubblicazione nelle « Memorie dell'Accademia d'Italia », del quale è apparso un breve sunto in questi « Rendiconti » [3], ho mostrato che una ipersuperficie iperalgebrica V_{2r-1} di S_r [4] individua un sistema lineare Σ di ipersuperficie algebriche (che ho chiamato sistema associato a V_{2r-1}) e un'antipolarità Ω, non degenere, fra le forme di Σ (che ho chiamata antipolarità subordinata da V_{2r-1}), e che da Σ e Ω si ritorna a V_{2r-1}, essendo V_{2r-1} il luogo dei punti comuni alle forme di Σ e alle varietà basi dei sistemi corrispondenti in Ω.

Questi enti Σ e Ω, nella geometria cremoniana ordinaria e complessa delle V_{2r-1} [5], compiono un ufficio fondamentale, essendo covarianti di V_{2r-1} [6].

Ma Σ e Ω permettono anche, come si vedrà in questa Nota, di costruire un modello proiettivo (e antiproiettivo) semplicissimo delle V_{2r-1}. E da quest'immagine delle V_{2r-1} apparirà appieno la natura delle V_{2r-1} stesse, e si trarrà una notevole semplificazione per le geometrie precedenti delle V_{2r-1}, e per altri problemi su queste varietà.

2. Mi riferirò, per brevità, alle V_3 del piano, e supporrò anche Σ irriducibile e semplice, ma apparirà subito il carattere generale di quanto verrà esposto.

(1) Pervenuta all'Accademia il 28 giugno 1934.

(2) Dal titolo *Connessi algebrici, iperalgebrici e varietà iperalgebriche di dimensione massima*, e che richiamerò con M.

(3) *Sulle ipersuperficie iperalgebriche*, ser. 6ª, vol. 19, p. 483, 1934.

(4) Ho denominato ipersuperficie iperalgebriche le varietà iperalgebriche di uno spazio lineare S_r di dimensione reale massima, cioè a $2r-1$ parametri reali.

(5) Per geometria cremoniana complessa intendo quella relativa al gruppo formato dalle trasformazioni cremoniane e dal coniugio. Sotto vari aspetti, le due geometrie cremoniane delle V_{2r-1} interessano maggiormente di quella ipercremoniana (o geometria iperalgebrica, nel senso di KLEIN), relativa cioè al gruppo di tutte le trasformazioni iperalgebriche biunivoche, che ho chiamate ipercremoniane (nella Nota: *Sulle trasformazioni pseudocremoniane*, « Rend. Sem. Mat. di Padova », 1933).

(6) I caratteri di Σ e di Ω sono quindi caratteri di V_{2r-1}. Così avviene della dimensione (complessa) di Σ (che ho chiamato *genere algebrico* di V_{2r-1}), della specie di Ω (M, n. 10) (che ho chiamato *specie* di V_{2r-1}), e ancora del grado di Σ che dirò *grado* di V_{2r-1} ecc.

Ricordo che, dato in un piano π un sistema lineare Σ (irriducibile e semplice) di curve algebriche, di dimensione (complessa) δ e di grado D, se si stabilisce una proiettività fra Σ e la totalità degli iperpiani di un S_δ, ogni punto P di π individua un punto Q di S_δ, centro della stella $\infty^{\delta-1}$ di iperpiani di S_δ omologa nella proiettività al sistema staccato da Σ dal punto P. Quando P descrive π, Q descrive una superficie razionale irriducibile F di S_δ, d'ordine D, e quando P descrive una curva di Σ, Q descrive una sezione iperpiana di F. Ad ogni punto Q di F corrisponde, essendo Σ semplice, un sol punto P di π.

Ciò posto, consideriamo il luogo dei punti comuni alle curve di Σ e ai gruppi base dei sistemi corrispondenti nell'antipolarità Ω. Questo luogo, cioè V_3 (n. 1), ha per immagine su F un ente Φ_3 (a tre parametri reali). Si ha la proprietà:

Il modello Φ_3 di V_3 in S_δ è l'intersezione completa di F *con un'iperquadrica non specializzata (la cui specie coincide con quella di V_3)* [1].

Infatti, per la proiettività esistente fra Σ e il sistema degli iperpiani di S_δ, l'antipolarità Ω (non degenere) in Σ si rispecchia in un'antipolarità Ω_0 in S_δ. E siccome Ω ammette elementi uniti e non è degenere, Ω_0 ha per luogo dei punti uniti un'iperquadrica I non specializzata, la cui specie coincide con quella di V_3 [2]. Se P è un punto di V_3, la curva di Σ, omologa in Ω del sistema staccato da Σ dal punto P, passa ancora per P. In S_δ, alla stella d'iperpiani col centro nel punto Q, immagine di P, corrisponde quindi in Ω_0 un iperpiano passante ancora per Q, sicchè Q appartiene ad I. Q, appartenendo ad F, giace cioè sulla intersezione di F con I. Inversamente, se Q è un punto di quest'intersezione, l'immagine P di Q appartiene a V_3 [3].

3. Il modello Φ_3 di V_3 giace, come ora s'è visto, sulla superficie irriducibile F, rappresentativa di Σ. Dico che:

F *è la minima varietà algebrica che contiene* Φ_3 [4].

(1) Per questo teorema, le iperquadriche assumono ufficio essenziale nella teoria delle V_{2r-1}. Ricordo perciò che le iperquadriche di S_r sono le più semplici V_{2r-1} di S_r, essendo il luogo dei punti uniti nelle antipolarità di S_r (il sistema ad esse associato è un sistema d'iperpiani). Ricordo anche che la specie di un'iperquadrica dà la dimensione (complessa) degli spazi lineari massimi che le appartengono, e che il genere algebrico e la specie di un'iperquadrica sono gli unici caratteri proiettivi, e antiproiettivi, di essa. Infine che le iperquadriche di S_r non specializzate (ossia prive di punti singolari) sono di genere algebrico r, e inversamente (Cfr.: M, n. 28).

(2) Basta infatti ricordare (M, n. 10) che un'antipolarità di specie ν fra le forme di un sistema lineare è caratterizzata dall'esistenza di sistemi lineari ∞^ν composti di forme unite, e dall'inesistenza di sistemi analoghi $\infty^{\nu+1}$.

(3) I punti base di Σ, se esistono, appartengono a V_3, e sono naturalmente elementi eccezionali nella rappresentazione.

(4) È noto (C. Segre, *Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici*, «Math. Ann.», vol. 40, p. 440, 1892) che una varietà iperalgebrica ψ è sempre

Sussiste infatti il teorema, più generale (anch'esso d'immediata estensione):

Se una varietà iperalgebrica a tre parametri reali giace su una superficie algebrica irriducibile di S_8, *questa è la minima varietà algebrica che la contiene.*

Intanto la varietà iperalgebrica ψ_3, essendo a tre parametri reali, non può giacere in una curva algebrica (varietà a due parametri reali). La varietà algebrica minima contenente ψ_3 sarà quindi una superficie perchè, per ipotesi, esiste una superficie H a cui appartiene. E lo spazio ambiente di tale superficie minima sarà S_8, e non uno spazio lineare inferiore, giacchè, se ψ_3 appartenesse a un S_{8-1}, giacendo in H, la curva intersezione di H con l'S_{8-1} la conterrebbe. Sia dunque H' una superficie algebrica di S_8, diversa da H, passante per ψ_3. La varietà algebrica intersezione di H e H', contenendo ψ_3, sarà ancora una superficie di S_8. Essendo H irriducibile, H' dovrà quindi spezzarsi in H e in una superficie residua, il che prova che H è la minima.

4. Come s'è visto nel n. 2, il modello Φ_3 di V_3 è l'intersezione completa della superficie F (che è la minima varietà algebrica che lo contiene: n. 3), con l'iperquadrica I (non specializzata). Dico che:

I *è l'unica iperquadrica che sega* F *in* Φ_3. Inoltre: I *determina la corrispondenza congiunta* C *a* Φ_3 [1], *e* C *determina* I.

Si hanno infatti i teoremi, più generali (anch'essi d'immediata estensione) che seguono.

Se una varietà iperalgebrica a tre parametri reali è contenuta in una superficie algebrica di S_8, *ed è l'intersezione completa della superficie minima* H *che la contiene con un'iperquadrica* I *non specializzata di* S_8, *la corrispondenza ad essa congiunta è la corrispondenza* C *che nasce su* H *facendo corrrispondere ad ogni punto* A *di* H *i punti dell'intersezione di* H *con l'iperpiano polare di* A *nell'antipolarità determinata in* S_8 *da* I.

Sia ψ_3 la varietà iperalgebrica, intersezione completa di H e I, e Ω_0 l'antipolarità di S_8 che ha I per luogo dei punti uniti. Consideriamo il luogo dei punti uniti della corrispondenza C su H. Un punto A di H sarà unito in C solo quando l'iperpiano polare di A in Ω_0 passa ancora per A, cioè quando A appartiene ad I. Dunque C ha per luogo dei punti uniti ψ_3, e

contenuta in una varietà algebrica la cui dimensione complessa non supera la dimensione reale di ψ, e che per ogni varietà ψ esiste una varietà algebrica *minima* H che la contiene. Per le V_{2r-1} di S_r questa nozione perde però il suo interesse perchè H è lo stesso S_r.

(1) È noto (C. Segre, op. cit., p. 441) che una varietà iperalgebrica ψ determina sulla varietà algebrica minima H che la contiene una corrispondenza C involutoria, iperalgebrica di 2° tipo (cioè prodotto di una corrispondenza algebrica e del coniugio), che ha per luogo dei punti uniti la stessa ψ. Preferisco chiamare *congiunta* a ψ questa corrispondenza C (anzichè, come fa Segre, quella armonica al coniugio). H con C, e ψ sono enti equivalenti, in quanto l'uno determina l'altro.

perciò, essendo H la minima varietà algebrica contenente ψ_3, C è la corrispondenza congiunta a ψ_3.

Si avverta che *da* C *si ritorna a* Ω_0 *e quindi a* I.

Consideriamo infatti un iperpiano α di S_δ, e la sezione H_α di α con H. Per la corrispondenza C ad un punto A di H_α corrispondono i punti di una curva di H appartenente a un $S_{\delta-1}$. Variando A su H_α l'$S_{\delta-1}$ relativo giace costantemente in una stella $\infty^{\delta-1}$, il cui centro si dirà il corrispondente di α. Si è così ritornati a Ω_0.

Scende che:

Data una varietà iperalgebrica ψ_3 *a tre parametri reali contenuta in una superficie algebrica di* S_δ, *se esiste un'iperquadrica non specializzata di* S_δ *di cui* ψ_3 *è l'intersezione completa con la superficie minima a cui* ψ_3 *appartiene, di iperquadriche siffatte non v'è che quella.*

Invero, per quanto abbiamo visto sopra, una tale iperquadrica I determina la corrispondenza congiunta C a ψ_3, dalla quale si ritorna ad I. L'unicità di C trae quindi quella di I.

5. Raccogliendo:

Una ipersuperficie iperalgebrica piana V_3, *di genere algebrico* δ, *di grado* D, *di specie* ν, *per la quale il sistema associato è irriducibile e semplice, è riferita biunivocamente ad una varietà iperalgebrica* Φ_3 *(a tre parametri reali) di* S_δ, *per la quale la varietà algebrica minima in cui giace è una superficie* F *razionale irriducibile d'ordine* D, *la* Φ_3 *stessa essendo l'intersezione completa di* F *con un'iperquadrica, non specializzata, di* S_δ *di specie* ν.

6. Inversamente, consideriamo in uno spazio lineare S_δ una varietà iperalgebrica Φ_3, a tre parametri reali, per la quale la varietà algebrica minima in cui giace sia una superficie F irriducibile d'ordine D rappresentabile birazionalmente sul piano, la Φ_3 stessa essendo l'intersezione completa di F con un'iperquadrica I (non specializzata) di S_δ di specie ν.

Dico che: Φ_3 *è riferita biunivocamente ad una ipersuperficie iperalgebrica piana* V_3 *di genere algebrico* δ, *di grado* D, *di specie* ν, *per la quale il sistema associato è irriducibile e semplice.*

Nella rappresentazione di F sul piano π, alle sezioni iperpiane di F corrispondono le curve di un sistema lineare $\Sigma\ \infty^\delta$, irriducibile e semplice, di grado D. E fra gli iperpiani di S_δ e le curve di Σ nasce una proiettività facendo corrispondere ad ogni curva di Σ l'iperpiano di S_δ che contiene la curva immagine. Un punto Q di F, nella rappresentazione di F su π, ha per immagine quel punto P di π (diverso dagli eventuali punti base di Σ) comune alle curve di Σ omologhe, nella precedente proiettività, agli iperpiani di S_δ passanti per Q (e reciprocamente). In virtù di quella proiettività, l'antipolarità Ω_0 di S_δ relativa all'iperquadrica I si rispecchia in un'antipolarità Ω (di specie ν) in Σ. E siccome Φ_3 è il luogo dei punti appartenenti

a F e uniti in Ω_0, l'immagine di Φ_3 su π è il luogo (a tre parametri reali) dei punti comuni alle curve di Σ e ai gruppi base dei sistemi corrispondenti in Ω. Si tratta dunque di una ipersuperficie iperalgebrica V_3, per la quale Σ, essendo irriducibile, è il sistema associato, e quindi Ω l'antipolarità subordinata.

7. Ma la proprietà che rivela l'importanza dell'introduzione dei modelli Φ_3 delle V_3, è espressa dal teorema:

Se due ipersuperficie iperalgebriche V_3 *piane si corrispondono in una trasformazione cremoniana (o anticremoniana)* [1], *i loro modelli* Φ_3 *si corrispondono in una proiettività (o antiproiettività), e inversamente.*

Consideriamo in un piano π una V_3, e fra π e un altro piano π' una trasformazione cremoniana (o anticremoniana) T. La T muta V_3 in una ipersuperficie iperalgebrica V_3', e il sistema Σ associato a V_3 (che suppongo irriducibile e semplice) nel sistema Σ' associato a V_3'. I modelli Φ_3, Φ_3' di V_3, V_3', essendo il genere algebrico di V_3 invariante cremoniano (e anticremoniano), appartengono a due spazi S_δ, S_δ' della stessa dimensione. Le superficie minime F, F' su cui giaciono Φ_3, Φ_3' sono le immagini di Σ, Σ'. Chiamando omologhi due punti di F, F' che sono immagini di punti omologhi in T di π, π', nasce fra F, F' una corrispondenza γ, che muta Φ_3 in Φ_3'. Ma γ giace nella proiettività (o antiproiettività) fra S_δ, S_δ' determinata dalla proiettività fra gli iperpiani di S_δ e Σ, dalla proiettività fra gli iperpiani di S_δ' e Σ', e dalla proiettività (o antiproiettività) fra Σ, Σ' imposta da T.

Inversamente: consideriamo in un S_δ una Φ_3 (n. 6), e fra S_δ, S_δ' una proiettività (o antiproiettività) ω. La ω muta Φ_3 in una Φ_3' della stessa natura, e la superficie minima F contenente Φ_3 nella superficie minima F' contenente Φ_3'. Siano V_3, V_3' i modelli di Φ_3, Φ_3' nei piani π, π'. I sistemi associati Σ, Σ' a V_3, V_3' sono le immagini di F, F'. Chiamando omologhi due punti π, π' che sono immagini di due punti di F, F' omologhi in ω, nasce fra π, π' una corrispondenza biunivoca T che muta V_3 in V_3', Σ in Σ'. Se ω è una proiettività, T è una trasformazione cremoniana. Se invece ω è una antiproiettività, T determina fra Σ, Σ' un'antiproiettività, ed è quindi una trasformazione anticremoniana.

8. La geometria cremoniana ordinaria e complessa delle ipersuperficie iperalgebriche V_3 è così ricondotta alla geometria proiettiva ordinaria e complessa [2] delle varietà Φ_3, le quali costituiscono quindi un modello proiettivo e antiproiettivo delle V_3.

(1) Dicesi anticremoniana la trasformazione prodotto di una trasformazione cremoniana e del coniugio.

(2) Per geometria proiettiva complessa s'intende quella relativa al gruppo delle proiettività e antiproiettività.

Ciò in accordo col fatto che la proprietà di Φ_3 di essere l'intersezione completa della superficie algebrica minima F che la contiene con un'iperquadrica (non specializzata) I, appartiene appunto alla geometria proiettiva ordinaria e complessa.

Il vantaggio che si avrà nel ricorrere alle Φ_3, per lo studio delle V_3, dipende dalla ragione anzidetta, e dalla notevole semplicità di Φ_3, varietà intersezione di due varietà ben note F e I, univocamente determinate de Φ_3, e covarianti di Φ_3 nella geometria proiettiva ordinaria e complessa.

Matematica. — *Sulla integrazione delle successioni ricorrenti del secondo ordine, lineari ed omogenee.* Nota II di L. Toscano, presentata [1] dal Socio T. Levi-Civita.

4. Facendo seguito alla Nota I [2] recante lo stesso titolo della presente (anche nella numerazione dei paragrafi e delle formule), in questo paragrafo e nel successivo troveremo delle formule, non tutte note, sulle successioni ricorrenti U_n, V_n, y_n, applicando come nuovo procedimento le forme integrali.

Posto

$$\varphi_n(i,k) = U_{i+n}U_k - U_{k+n}U_i$$

si ha

$$\varphi_0(i,k) = 0\,;\ \varphi_1(i,k) = q^i U_{k-i}, (i<k)\,;\ \varphi_n(i,k) = p\varphi_{n-1}(i,k) - q\varphi_{n-2}(i,k),$$

e quindi la successione

$$\varphi_0(i,k) \quad , \quad \varphi_1(i,k), \cdots, \varphi_n(i,k), \cdots,$$

è ricorrente del secondo ordine, di equazione generatrice $x^2 - px + q = 0$, e di elementi iniziali

$$\varphi_0(i,k) = 0 \quad , \quad \varphi_1(i,k) = q^i U_{k-i}\,.$$

È allora per la (3) o (15)

$$\varphi_n(i,k) = q^i U_n U_{k-i}$$

e vale la formula

$$U_{i+n}U_k - U_{k+n}U_i = q^i U_n U_{k-i}\,, \tag{16}$$

che per $k = i + n$ diventa

$$U_{i+n}^2 - U_{i+2n}U_i = q^i U_n^2\,. \tag{16'}$$

(1) Nella seduta del 1° giugno 1934.

(2) Questi «Rendiconti», vol. XIX, ser. 6ª, 1934, p. 849.

Per la

$$\varphi'_n(i,k) = V_{i+n}V_k - V_{k+n}V_i$$

si ha

$$\varphi'_0(i,k) = 0 \quad ; \quad \varphi'_1(i,k) = -q^i(p^2-4q)\,U_{k-i}\,,(i<k)\,;$$

$$\varphi'_n(i,k) = p\varphi'_{n-1}(i,k) - q\varphi'_{n-2}(i,k)\,;$$

quindi

$$\varphi'_n(i,k) = -q^i(p^2-4q)\,U_n U_{k-i}\,.$$

E vale la formula

$$(17) \qquad V_{i+n}V_k - V_{k+n}V_i = -q^i(p^2-4q)\,U_n U_{k-i}\,,$$

che diventa per $k = i+n$

$$(17') \qquad V^2_{i+n} - V_{i+2n}V_i = -q^i(p^2-4q)\,U^2_n\,.$$

5. Per

$$\Phi_k(i) = U_{k+1}U_i - qU_kU_{i-1}$$

si ha

$$\Phi_0(i) = U_i \quad , \quad \Phi_1(i) = U_{i+1} \quad , \quad \Phi_k(i) = p\Phi_{k-1}(i) - q\Phi_{k-2}(i)\,,$$

e risulta subito

$$\Phi_k(i) = U_{i+k}\,.$$

D'altra parte per la (15) si ha

$$\Phi_k(i) = \left(U_{i+1} - p\frac{U_i}{2}\right)U_k + \frac{U_i}{2}V_k\,,$$

e con opportune trasformazioni

$$\Phi_k(i) = \frac{1}{2}(U_iV_k + V_iU_k)\,.$$

Vale quindi la formula

$$(18) \qquad U_{i+k} = U_{k+1}U_i - qU_kU_{i-1} = \frac{1}{2}(U_iV_k + V_iU_k)\,.$$

Per la

$$\Psi_{k-1}(i) = -U_{k-1}U_i + U_kU_{i-1}$$

si ha

$$\Psi_0(i) = U_{i-1} \quad , \quad \Psi_1(i) = qU_{i-2} \quad , \quad \Psi_{k-i}(i) = p\Psi_{k-2}(i) - q\Psi_{k-3}(i)\,,$$

e si deduce subito

$$\Psi_{k-1}(i) = q^{k-1}U_{i-k}\,.$$

D'altra parte per la (15) si ha

$$\Psi_{k-1}(i) = \left(q\,U_{i-2} - p\,\frac{U_{i-1}}{2}\right)U_{k-1} + \frac{U_{i-1}}{2}V_{k-1} =$$

$$= \frac{1}{2}(U_{i-1}V_{k-1} - V_{i-1}U_{k-1}),$$

e vale quindi la formula

$$(19)\quad q^{k-1}U_{i-k} = -U_{k-1}U_i + U_kU_{i-1} = \frac{1}{2}(U_{i-1}V_{k-1} - V_{i-1}U_{k-1}).$$

Dalle (18) e (19) si ottengono poi le altre

$$(18')\qquad U_{i+k} = \frac{1}{2}(U_{i+m}V_{k-m} + V_{i+m}U_{k-m}),$$

$$(19')\qquad q^{k+m}U_{i-k} = \frac{1}{2}(U_{i+m}V_{k+m} - V_{i+m}U_{k+m}),$$

e per $m = 0$ si deducono per somma e differenza le

$$(20)\qquad U_{i+k} + q^kU_{i-k} = U_iV_k$$

$$(21)\qquad U_{i+k} - q^kU_{i-k} = V_iU_k.$$

Analogamente, con le

$$\Phi'_k(i) = U_{k+1}V_i - qU_kV_{i-1} \quad , \quad \Psi'_{k-1}(i) = -U_{k-1}V_i + U_kV_{i-1},$$

si ricavano le formule

$$(22)\quad V_{i+k} = U_{k+1}V_i - qU_kV_{i-1} = \frac{1}{2}(V_iV_k + \sqrt{p^2-4q}\,U_iU_k) =$$

$$= \frac{1}{2}(V_{i+m}V_{k-m} + \sqrt{p^2-4q}\,U_{i+m}U_{k-m}),$$

$$(23)\quad q^kV_{i-k} = q(-U_{k-1}V_i + U_kV_{i-1}) = \frac{1}{2}(V_iV_k - \sqrt{p^2-4q}\,U_iU_k) =$$

$$= \frac{1}{2}(V_{i+m}V_{k+m} - \sqrt{p^2-4q}\,U_{i+m}U_{k+m}),$$

$$(24)\qquad V_{i+k} + q^kV_{i-k} = V_iV_k$$

$$(25)\qquad V_{i+k} - q^kV_{i-k} = \sqrt{p^2-4q}\,U_iU_k.$$

Le (20) e (24) che scriviamo nella forma

$$(20')\qquad U_{i+2k} = V_kU_{i+k} - q^kU_i,$$

$$(24')\qquad V_{i+2k} = V_kV_{i+k} - q^kV_i,$$

ci dicono che le successioni

$$U_i \quad , \quad U_{i+k}, \cdots, U_{i+nk}, \cdots,$$

$$V_i \quad , \quad V_{i+k}, \cdots, V_{i+nk}, \cdots,$$

sono ricorrenti del secondo ordine e di equazione generatrice

$$x^2 - V_k x + q^k = 0 .$$

Deduciamo pertanto dalla (15) le formule notevoli

$$(26)\quad U_{i+nk}(p,q) = \left[U_{i+k}(p,q) - V_k(p,q)\frac{U_i(p,q)}{2}\right] \cdot U_n[V_k(p,q), q^k] + \\ + \frac{U_i(p,q)}{2} \cdot V_n[V_k(p,q), q^k],$$

$$(27)\quad V_{i+nk}(p,q) = \left[V_{i+k}(p,q) - V_k(p,q)\frac{V_i(p,q)}{2}\right] \cdot U_n[V_k(p,q), q^k] + \\ + \frac{V_i(p,q)}{2} \cdot V_n[V_k(p,q), q^k].$$

Per $i = 0$ e sostituendo k con n^{k-1} abbiamo

$$(26')\quad U_{n^k}(p,q) = U_{n^{k-1}}(p,q) \cdot U_n[V_{n^{k-1}}(p,q), q^{n^{k-1}}],$$

$$(27')\quad V_{n^k}(p,q) = V_n[V_{n^{k-1}}(p,q), q^{n^{k-1}}];$$

e la (26') per successive decomposizioni ci da la formula

$$(28)\quad U_{n^k}(p,q) = \prod_{r=1}^{r=k} U_n[V_{n^{r-1}}(p,q), q^{n^{r-1}}],$$

che trovasi senza dimostrazione nella citata Nota di Candido sulla fattorizzazione delle lucasiane U_{n^k}, V_{n^k}.

Infine dalle (15), (20'), (24') si ottiene la

$$(29)\quad y_{i+2k} = V_k y_{i+k} - q^k y_i ,$$

e ancora per la (15) vale la formula generale

$$(30)\quad y_{i+nk}(p,q) = \left[y_{i+k}(p,q) - V_k(p,q)\frac{y_i(p,q)}{2}\right] \cdot U_n[V_k(p,q), q^k] + \\ + \frac{y_i(p,q)}{2} \cdot V_n[V_k(p,q), q^k].$$

Matematica. — *Sulle serie doppie di funzioni ortogonali e normali.* Nota II di C. SEVERINI, presentata [1] dal Corrisp. G. LORIA.

5. Le considerazioni della Nota I valgono in particolare, se al posto dei due sistemi (5) ed (11) si considera l'unico sistema (8), e s'indica con $f(x,y)$ una funzione sommabile insieme col suo quadrato nel campo $\left(0 \leqq \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} < 2\pi\right)$: si può senz'altro intendere questa funzione definita in tutto il piano (x, y), periodica col periodo 2π, tanto rispetto ad x quanto rispetto ad y. Si hanno allora le serie di Fourier:

$$(24)\quad \bar{g}_n(x) \sim \sum_0^\infty{}'_m \bar{B}_{m,n} V_m(x), \quad \bar{B}_{m,n} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)\, V_m(x)\, V_n(y)\, dx\, dy$$

delle funzioni:

$$\bar{g}_n(x) = \int_0^{2\pi} f(x,y)\, V_n(y)\, dy \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

e, per ogni x, pel quale la $f(x,y)$ è linearmente sommabile, insieme col suo quadrato, rispetto ad y, nell'intervallo $(0 \leqq y \leqq 2\pi)$, l'altra:

$$(25)\qquad f(x,y) \sim \sum_0^\infty{}_n \bar{g}_n(x)\, V_n(y).$$

Dal confronto di questa colle (24) nasce la serie:

$$f(x,y) \sim \sum_0^\infty{}_n V_n(y) \left[\sum_0^\infty{}_m \bar{B}_{m,n} V_m(x)\right],$$

che chiameremo *serie doppia di Fourier per sviluppi successivi rispetto ad y e ad x*. E diremo che essa converge, se, per ogni n, convergono le (24) e con esse la (25).

Sulla determinazione della somma di tale serie in un punto, in cui se ne ammetta la convergenza, aggiungiamo le seguenti considerazioni. Detto (x_0, y_0) il punto considerato (s'intende che $f(x_0, y)$ sia nell'intervallo $(0 \leqq y \leqq 2\pi)$ sommabile insieme col suo quadrato), pongasi:

$$(26)\qquad \bar{S}(x_0, y_0) = \sum_0^\infty{}_n V_n(y_0) \left[\sum_0^\infty{}_m \bar{B}_{m,n} V_m(x_0)\right].$$

(1) Nella seduta del 1° giugno 1934.

Dalle (24) segue, per la chiusura del sistema (8):

$$\int_0^x \bar{g}_n(\xi)\,d\xi = \sum_0^\infty{}_m\, \bar{B}_{m,n} \int_0^x V_m(\xi)\,d\xi \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqq x \leqq 2\pi \\ n = 0, 1, 2, \cdots \end{pmatrix},$$

e per l'equiconvergenza della serie del secondo membro [1]:

$$(27)\quad \int_0^x d\zeta \int_0^\zeta \bar{g}_n(\xi)\,d\xi = \sum_0^\infty{}_m\, \bar{B}_{m,n} \int_0^x d\zeta \int_0^\zeta V_m(\xi)\,d\xi \qquad \begin{pmatrix} n = 0, 1, 2, \cdots \\ 0 \leqq x \leqq 2\pi \end{pmatrix}.$$

Tenuto conto che le (24) convergono per $x = x_0$, si potranno dalle (27), per un noto teorema di Riemann [2], dedurre le eguaglianze:

$$(28)\qquad \bar{g}_n(x_0) = \sum_0^\infty{}_m\, \bar{B}_{m,n}\, V_m(x_0) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

se per ogni n, è $\bar{g}_n(x)$, nel punto $x = x_0$, la derivata seconda generalizzata della funzione:

$$\bar{G}_n(x) = \int_0^x d\zeta \int_0^\zeta \bar{g}_n(\xi)\,d\xi \qquad \begin{pmatrix} n = 0, 1, 2, \cdots \\ 0 \leqq x \leqq 2\pi \end{pmatrix}.$$

Ciò ha luogo in particolare, se la $f(x, y)$, considerata pei valori di x, pei quali è, insieme col suo quadrato, linearmente sommabile rispetto ad y, nell'intervallo $(0 \leqq y \leqq 2\pi)$ *converge ivi completamente*, al tendere di x ad x_0, ed ha la $f(x_0, y)$ per *quasi-limite*, con che s'intende che sia:

$$\lim_{x \to x_0} \int_0^{2\pi} |f(x, y) - f(x_0, y)|\,dy = 0\ [3]:$$

segue allora:

$$\lim_{x \to x_0} \bar{g}_n(x) = \bar{g}_n(x_0) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

e quindi:

$$\left[\frac{d}{dx} \int_0^x \bar{g}_n(\xi)\,d\xi\right]_{x = x_0} = \bar{g}_n(x_0) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

ciò che basta al nostro scopo.

(1) Cfr. C. Severini, (S), loc. cit. (1), a p. 552, n. 2.

(2) Cfr. R. Riemann, *Sur la possibilité de représenter une fonction par une serie trigonométrique*. Oeuvres Mathématiques de Riemann, traduites par L. Langel, 1896; L. Tonelli, loc. cit. (3), a p. 551, (S); cap. II, § 1, n. 17.

(3) Cfr. G. Vitali, *Geometria dello spazio hilbertiano*, p. 49. Bologna, Ed. N. Zanichelli, 1929.

Se ci si pone in queste condizioni, dalla (26) e dalle (28) si ricava:

$$\overline{S}(x_0, y_0) = \sum_0^{\infty} {}_n \bar{g}_n(x_0) V_n(y_0).$$

D'altra parte dalla (25), ponendovi $x = x_0$, si ha, come sopra:

$$\int_0^{y} d\tau \int_0^{2\pi} f(x_0, \eta) d\eta = \sum_0^{\infty} {}_n \bar{g}_n(x_0) \int_0^{y} d\tau \int_0^{2\pi} V_n(\eta) d\eta$$

e quindi:

$$f(x_0, y_0) = \overline{S}(x_0, y_0).$$

se, nel punto $y = y_0$, la $f(x_0, y)$ coincide colla derivata seconda generalizzata, che per il citato teorema di Riemann necessariamente esiste, della funzione:

$$\Phi(y) = \int_0^{y} d\tau \int_0^{2\pi} f(x_0, \eta) d\eta \qquad (0 \leqq y \leqq 2\pi),$$

in particolare se è continua ecc. (1).

Da quanto è stato dianzi detto si raccoglie il seguente teorema:

La serie doppia di Fourier per sviluppi successivi rispetto ad y e ad x (rispetto ad x e ad y) di una funzione $f(x, y)$, sommabile insieme col suo quadrato nel campo $(0 \leqq x, y \leqq 2\pi)$, sia in un punto (x_0, y_0) di questo campo convergente. Se la $f(x, y)$ al tendere di x ad x_0 (di y ad y_0) è una quasi limite di $f(x, y)$ (2), la somma della serie doppia di Fourier per sviluppi successivi rispetto ad y e ad x (rispetto ad x e ad y), nel punto (x_0, y_0), è la derivata seconda generalizzata, nel punto $y = y_0$ (nel punto $x = x_0$) della funzione

$$\Phi(y) = \int_0^{y} d\tau \int_0^{2\pi} f(x_0, \eta) d\eta \text{ della funzione } \Psi(x) = \int_0^{x} d\xi \int_0^{2\pi} f(\xi, y_0) d\xi;$$

è uguale ad $f(x_0, y_0)$, se $f(x_0, y_0)$ coincide con questa derivata seconda generalizzata. In particolare se $f(x, y)$ per $x = x_0$ (per $y = y_0$) è continua rispetto ad y (rispetto ad x) nel punto $y = y_0$ (nel punto $x = x_0$).

6. Quando in un punto converge la serie doppia di Fourier per sviluppi successivi rispetto ad y e ad x (rispetto ad x e ad y) la serie doppia di

(1) Cfr. H. Lebesgue, *Leçons sur les séries trigonométriques*, chap. IV, II, 49. Paris, Ed. Gauthier-Villars, 1926; L. Tonelli, loc. cit. (2).

(2) La $f(x, y_0)$, per $x = x_0$, per $y = y_0$, si deve intendere, come sopra, linearmente sommabile, insieme col suo quadrato, rispetto ad y (rispetto ad x) nell'intervallo $(0, 2\pi)$.

Fourier è in quel punto sommabile per orizzontali (per verticali) [1] ed ha somma eguale a quella della corrispondente serie doppia per sviluppi successivi.

Della ricerca della somma della serie doppia di Fourier, supposta convergente, mi sono occupato in altra occasione. In una Memoria del 1908 [2], sotto condizioni per la $f(x, y)$, che possono facilmente essere generalizzate, ho mostrato che, se nel punto (x_0, y_0), in cui la serie è supposta convergente, la $f(x, y)$ ammette un limite determinato, finito, quando (x, y) tende a quel punto, muovendosi lungo un raggio, uscente da esso, in altri termini se, posto:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \rho \cos\theta \\ y &= y_0 + \rho \operatorname{sen}\theta \end{aligned} \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi),$$

esiste, per ogni θ, il:

$$\lim_{\rho \to 0} f(x_0 + \rho \cos\theta, y_0 + \rho \operatorname{sen}\theta) = \varphi(\theta),$$

la $\varphi(\theta)$ è integrabile, e la somma della serie è uguale al valore medio:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\, d\theta .$$

Quando $\varphi(\theta)$ è costante, il valore di questa costante, che in particolare è $f(x_0, y_0)$, se $f(x, y)$ è continua nel punto $(x_0 y_0)$, dà la somma della serie. Più generalmente, se l'intervallo $(0, 2\pi)$ può essere decomposto in un numero finito r di parti

$$\delta_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, r),$$

in ciascuna delle quali sia costante la $\varphi(\theta)$, detti:

$$f_i(x_0, y_0) \qquad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

i corrispondenti valori di $\varphi(\theta)$, si ha:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_1^r{}_i \delta_i f_i(x_0, y_0),$$

e se inoltre:

$$\delta_i = \frac{2\pi}{r} \qquad (i = 1, 2, \cdots, r),$$

risulta:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\, d\theta = \frac{1}{r} \sum_1^r f_i(x_0, y_0).$$

(1) Cfr. L. Tonelli, loc. cit. (3), a p. 551 (S), cap. IX, § 3.

(2) Cfr. C. Severini, *Sullo sviluppo di una funzione reale di due variabili reali in serie doppia di Fourier*, « Atti dell'Accademia Gioenia di Catania », ser. 5ª, vol. II, 1908.

Nel caso che sia $r = 4$, e che $f(x_0 + \rho\cos\theta\,,\ y_0 + \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)$ converga uniformemente a $\varphi(\theta)$ nell'intervallo $(0\,,\ 2\pi)$, importanti ricerche sulla convergenza della serie doppia di Fourier sono dovute a L. Tonelli [1].

Nella mia Memoria, accanto al risultato ora detto, che è la naturale e più completa estensione di quanto, per una serie semplice di Fourier, si verifica nei punti di convergenza, ove la funzione generatrice ha discontinuità di prima specie, ve ne sono altri, relativi allo stesso problema; in particolare vi si dimostra che, nelle accennate condizioni, suscettibili, come si è detto, di essere generalizzate, la serie doppia di Fourier, supposta convergente, rappresenta la funzione generatrice, se questa è nel campo $\left(0 \leqq \frac{x}{y} \leqq 2\pi\right)$ parzialmente continua rispetto ad ognuna delle variabili.

Matematica. — *Sopra le equazioni alle derivate parziali del tipo parabolico con due variabili indipendenti.* Nota [2] di A. Rosenblatt, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. Consideriamo l'equazione alle derivate parziali

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = f(x\,,\ y\,,\ z) \tag{1}$$

nel dominio D limitato dalle due curve

$$x = \chi_1(y) \quad , \quad x = \chi_2(y) \tag{2}$$

$\chi_1(y) < \chi_2(y)$ e dalle due caratteristiche $y = y_1$, $y = Y$.

Applichiamo a questa equazione i metodi introdotti dal compianto E. E. Levi e dal sig. M. Gevrey. Sia

$$U(x\,,\ y\,;\ \xi\,,\ \eta) = \frac{1}{\sqrt{y-\eta}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}} \tag{3}$$

la *soluzione fondamentale* e sia $G(x\,,\ y\,;\ \xi\,,\ \eta)$ la funzione di Green, che, considerata come funzione di $\xi\,,\ \eta$, si annulla lungo le curve (2) e per $y = \eta$ e che ha la stessa singolarità della (3) nel punto $x = \xi\,,\ y = \eta$. Questa funzione soddisfa all'equazione aggiunta

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} + \frac{\partial G}{\partial \eta} = 0. \tag{4}$$

(1) Cfr. L. Tonelli, loc. cit. (3), a p. 551 (S), cap. XI; *Sulla convergenza delle serie doppie di Fourier*, « Annali di Matematica », ser. IV, to. IV, 1927.

(2) Pervenuta all'Accademia il 25 giugno 1934.

2. Noi considereremo il caso più semplice della striscia infinita limitata alla sinistra dalla retta $x = x_1$: $+\infty > x > x_1$. Si sa allora (confronta GOURSAT, *Cours d'Analyse*, T. III) che la funzione G è data dall'espressione

$$(5) \qquad G(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} \left\{ e^{-\frac{1}{4(y-\eta)}(2x_1 - x - \xi)^2} - e^{-\frac{1}{4(y-\eta)}(x-\xi)^2} \right\}.$$

Poniamo

$$s = \frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)} \quad , \quad s' = \frac{(2x_1 - x - \xi)^2}{4(y-\eta)}$$

avremo

$$G = -\frac{1}{\sqrt{y-\eta}} \cdot e^{-s}(1 - e^{-z}),$$

dove abbiamo posto

$$z = \frac{(\xi - x_1)(x - x_1)}{y - \eta}.$$

Si ha dunque la disuguaglianza

$$(6) \qquad |G| \leqq e^{-s} \cdot \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} \left[\frac{(x-x_1)(\xi - x_1)}{y-\eta} \right]^m$$

per $0 \leqq m \leqq 1$.

Proponiamoci di maggiorare l'integrale

$$(7) \qquad I = \iint_{D_y} M(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta,$$

nel quale D_y è la striscia di D limitata superiormente dalla retta $y = \eta$ e

$$(8) \qquad M(x, y; \xi, \eta) = \frac{(x-\xi)^p}{(y-\eta)^{q-\frac{1}{2}}} G(x, y; \xi, \eta),$$

$p, q - \frac{1}{2}$ essendo interi non negativi. Sia $r = p - 2q + 3$.

La funzione $f(\xi, \eta)$ è supposta continua entro D_y e soddisfacente alla disuguaglianza

$$(9) \qquad |f(\xi, \eta)| \leqq F \frac{1 + (\xi - x_1)^m}{(\xi - x_1)^m} (\eta - y_1)^\gamma,$$

$-1 < \gamma \leqq 0$, $1 > m \geqq 0$.

Per maggiorare I occorre distinguere i due casi:

1° $x - x_1 \leqq 1$, 2° $x - x_1 > 1$.

3. Nel primo caso poniamo per $\xi \leqq x$

$$(10) \qquad \frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)} = s \quad , \quad y - \eta = t \quad , \quad x - \xi = 2\sqrt{st}.$$

I è composto da due integrali I_1, I_2 corrispondenti a $\xi \leqq x$ ed a $\xi \geqq x$. Abbiamo

$$(11)\quad |I_1| \leqq 2F \int_0^\infty ds \int_0^{y-y_1} \frac{(2\sqrt{st})^p}{t^q} e^{-s} \frac{(x-x_1)^m}{t^m} \sqrt{\frac{t}{s}} \cdot (\eta - y_1)^\gamma \, ds\, dt,$$

poichè è

$$1 + (\xi - x_1)^m \leqq 2.$$

Ponendo

$$\tau = \frac{t}{y - y_1}$$

si ottiene

$$|I_1| \leqq 2^{p+1} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \int_0^1 \tau^{\frac{p}{2} - q - m + \frac{1}{2}} \cdot (1-\tau)^\gamma \, d\tau \cdot (x - x_1)^m \cdot$$

$$\cdot (y - y_1)^{\frac{p}{2} - q - m + \frac{3}{2} + \gamma}$$

oppure

$$(12)\quad |I_1| \leqq 2^{p+1} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \cdot B\left(\frac{r}{2} - m, \gamma + 1\right) (x - x_1)^m (y - y_1)^{\gamma + \frac{r}{2} - m}.$$

Sussistono le disuguaglianze

$$(13)\qquad m < \frac{r}{2}\ , \quad \gamma > -1\ , \quad \gamma - m + \frac{r}{2} \geqq 0.$$

Per $\xi \geqq x$ poniamo

$$\xi - x = 2\sqrt{st}.$$

Si ha

$$\xi - x_1 = \xi - x + x - x_1 \leqq 1 + 2\sqrt{st}.$$

Supponiamo $Y - y_1 \leqq k$. Si ottiene allora

$$1 + (\xi - x_1)^m \leqq 2 + K s^{\frac{m}{2}},$$

$K > 0$; e si perviene alla disuguaglianza

$$|I_2| \leqq 2^p \cdot F \cdot \left[2\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) + K\Gamma\left(\frac{p+m+1}{2}\right)\right] \int_0^1 \tau^{\frac{p}{2} - q - m + \frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot (1-\tau)^\gamma \, d\tau \cdot (x - x_1)^m \cdot (y - y_1)^{\frac{p}{2} - q - m + \frac{3}{2} + \gamma},$$

da cui

$$(14)\quad |I_2| \leqq 2^p \cdot F \left[2\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) + K\Gamma\left(\frac{p+m+1}{2}\right)\right] B\left(\frac{r}{2} - m, \gamma + 1\right) \cdot$$

$$\cdot (x - x_1)^m \cdot (y - y_1)^{\gamma + \frac{r}{2} - m}.$$

Poichè è

$$1 + (x - x_1)^m \leqq 2$$

se ne trae per l'integrale I la disuguaglianza

$$|I| \leqq A \cdot F \cdot \frac{(x - x_1^m)}{1 + (x - x_1)^m} \cdot (y - y_1)^{\gamma + \frac{r}{2} - m} \cdot B\left(\frac{r}{2} - m\right).$$

4. Consideriamo il caso $x - x_1 \geqq 1$. Dividiamo l'intervallo x_1, ∞ in tre parti: $x_1, x_1 + 1$; $x_1 + 1, x$; $x, +\infty$. Siano I_i, $i = 1, 2, 3$ gli integrali corrispondenti.

Si ha

$$|I_1| \leqq 2 F \int_{y_1}^{y} d\eta \int_{x_1}^{x_1 + 1} \frac{(\xi - x)^p}{(y - \eta)^q} \cdot e^{-s} \cdot (\eta - y_1)^\gamma \cdot \frac{1}{(\xi - x)^m} d\xi .$$

D'altra parte, per $s > 0$,

$$e^{-s} \leqq \frac{A}{s^k} \quad , \quad 0 < k ,$$

$A = k^k e^{-k}$. Poniamo $k = \frac{p}{2} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $t = y - \eta$. Abbiamo

$$|I_1| \leqq 2 F \int_{0}^{y - y_1} dt \int_{x_1}^{x_1 + 1} \frac{(x - \xi)^p}{t^q} \cdot \frac{A}{\left[\frac{(x - \xi)^2}{4(y - \eta)}\right]^{\frac{p}{2} + \varepsilon}} \cdot$$

$$\cdot (y - y_1)^\gamma \cdot (1 - \tau)^\gamma \cdot \frac{1}{(\xi - x_1)^m} d\xi .$$

Ora ponendo $\varepsilon = \frac{1 - m}{2}$ e supponendo $m < 1$ studiamo l'integrale

$$J = \int_{x_1}^{x_1 + 1} \frac{d\xi}{(x - \xi)^{1 - m} \cdot (\xi - x_1)^m} .$$

Assumendo come variabile di integrazione

$$u = \frac{\xi - x_1}{x - x_1},$$

si ha

$$J = \int_{0}^{\frac{1}{x - x_1}} \frac{du}{u^m (1 - u)^{1 - m}} \leqq B(1 + m, m).$$

Si ha pure la disuguaglianza

$$|I_1| \leqq A' \cdot F \cdot \int_{0}^{1} \tau^{\frac{p}{2} + \varepsilon - q} \cdot (1 - \tau)^\gamma \, d\tau \cdot (y - y_1)^{\frac{p}{2} + \varepsilon - q + 1 + \gamma} , A' > 0 .$$

Dunque è

$$|I_1| \leqq A'' \cdot F \cdot (y - y_1)^{\frac{r}{2} + \gamma - \frac{m}{2}} \cdot B\left(\frac{r}{2} - \frac{m}{2}, \gamma + 1\right) \cdot$$

Le condizioni sono

$$(16) \qquad \frac{r}{2} > \frac{m}{2} \quad , \quad \gamma + \frac{r}{2} - \frac{m}{2} \geqq 0 ,$$

conseguenze delle (13).

Negli intervalli: 2° e 3° poniamo

$$x - \xi = 2\sqrt{st} \quad \text{e} \quad \xi - x = 2\sqrt{st} .$$

Si ha

$$\frac{1 + (\xi - x_1)^m}{(\xi - x_1)^m} < 2 ,$$

e se ne desumono le disuguaglianze

$$|I_2|, |I_3| \leqq AF \cdot (y - y_1)^{\frac{r}{2} + \gamma} \cdot B\left(\frac{r}{2}, \gamma + 1\right) .$$

Ma $B(u, v)$ cresce se u diminuisce. D'altra parte è adesso

$$\frac{(x - x_1)^m}{1 + (x - x_1)^m} > \frac{1}{2} .$$

Si ottiene dunque la *stessa* disuguaglianza (15).

5. Applichiamo il risultato ottenuto all'equazione (1). Consideriamo l'equazione *integro-differenziale*

$$(17) \quad z(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\xi_y} G(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta, \zeta) \, d\xi \, d\eta , \quad \zeta = z(\xi, \eta) .$$

Supponiamo $f(\xi, \eta, \zeta)$ continuo nel dominio D*:

$$x_1 < \xi < +\infty \quad , \quad y_1 < \eta \leqq Y \quad , \quad |\zeta| \leqq N$$

e soddisfacente alla disuguaglianza

$$(18) \qquad |f(x, y, z)| \leqq F \, \frac{1 + (x - x_1)^m}{(x - x_1)^m} \cdot (y - y_1)^\gamma .$$

Supponiamo di più soddisfatta la *condizione generalizzata di Lipschitz*:

$$(19) \quad |f(x, y, z') - f(x, y, z)| \leqq k |z' - z| \, \frac{[1 + (x - x_1)^m]^2}{(x - x_1)^{2m}} \cdot (y - y_1)^{-\gamma} .$$

L'equazione (17) possiede al più una soluzione continua nel dominio $\bar{D}^*$:

$$x_1 \leqq \xi < +\infty \quad , \quad y_1 \leqq y \leqq Y \quad , \quad |z| \leqq N.$$

Infatti, siano z_1 , z_2 due soluzioni, $u = z_2 - z_1$. Si ha

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{S_y} G(x , y ; \xi , \eta) [f(\xi , \eta , \zeta_2) - f(\xi , \eta , \zeta_1)] \, d\xi \, d\eta .$$

Possiamo trovare un numero $M > 0$ tale che si abbia in D^* la disuguaglianza

$$(20) \quad |f(x , y , z_2) - f(x , y , z_1)| \leqq \frac{M[1 + (x - x_1)^m]}{(x - x_1)^m} (y - y_1)^\gamma .$$

Se ne ricava

$$(21) \quad |u| \leqq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} AM \frac{(x - x_1)^m}{1 + (x - x_1)^m} \cdot (y - y_1)^{\gamma + 1 - m} \cdot B(1 - m , \gamma + 1).$$

Proseguendo nella maniera ben nota si ottengono le disuguaglianze

$$(22) \quad |u| \leqq \left(\frac{Ak}{2\sqrt{\pi}}\right)^{n-1} \cdot \frac{A}{2\sqrt{\pi}} \cdot M \cdot \prod_{i=1}^{n} B[1 - m , i\gamma + (i - 1)(1 - m) + 1],$$

$$n = 2 , 3 , \cdots$$

Supponiamo $\gamma + 1 - m > 0$. Si vede facilmente che si ha

$$|u| \leqq C^n \cdot \frac{1}{\Gamma[n\gamma + n(1 - m) + 1]} ,$$

C essendo un numero positivo fisso; quindi $u \equiv 0$. Abbiamo dunque il

Teorema 1: L'equazione integrale (17) possiede al più una soluzione continua appartenente al dominio $\bar{D}^*$, se si ha $m < 1 , \gamma + 1 - m > 0$.

6. Per dimostrare l'esistenza della soluzione partiremo da una funzione continua $z_0(x , y)$ arbitraria del dominio $\bar{D}^*$, formando le funzioni

$$(23) \quad z_n = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{S_y} G(x , y ; \xi , \eta) f(\xi , \eta , \zeta_{n-1}) \, d\xi \, d\eta , \qquad n = 1 , 2 , \cdots$$

Si ha

$$|z_1| \leqq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} F \cdot \frac{(x - x_1)^m}{1 + (x - x_1)^m} (y - y_1)^{\gamma + 1 - m} \cdot B(1 - m , \gamma + 1);$$

e si potranno determinare le funzioni z_i, $i = 1, 2, \cdots$ purchè la disuguaglianza

$$\frac{AF \cdot B(1-m, \gamma+1)}{2\sqrt{\pi}} \leqq N \tag{24}$$

sia verificata.

Consideriamo le differenze $u_i = z_i - z_{i-1}$, $i = 1, 2, \cdots$, cui può attribuirsi l'espressione

$$u_i = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{S_y} G(x, y; \xi, \eta) [f(\xi, \eta, \zeta_{i-1}) - f(\xi, \eta, \zeta_{i-2})] \, d\xi \, d\eta .$$

Se ne traggono le disuguaglianze

$$|u_n| \leqq \left(\frac{Ak}{2\sqrt{\pi}}\right)^{n-1} \cdot \frac{M}{k} \cdot \prod_{1}^{n-2} B[1-m, i(\gamma+1-m)+\gamma+1] \cdot \tag{25}$$

$$\cdot \frac{(x-x_1)^m}{1+(x-x_1)^m} \cdot (y-y_1)^{(n-1)(\gamma+1-m)} .$$

La serie delle approssimazioni successive è dunque assolutamente ed uniformemente convergente. La funzione limite $z(x, y)$ soddisfa all'equazione (17). Infatti, se S_ε è il rettangolo $x_1 \leqq \xi \leqq x_1 + \varepsilon$, $y_1 \leqq \eta \leqq y$, si può prendere ε così piccolo che gli integrali

$$I_\varepsilon = \int_{S_\varepsilon} G(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta, \zeta_i) \, d\xi \, d\eta \tag{26}$$

$i = 1, 2, \cdots$ siano uniformemente e arbitrariamente piccoli e che l'integrale (26) nel quale J_i è sostituito dalla funzione limite ζ sia del pari arbitrariamente piccolo. D'altra parte la differenza

$$I_{S_y - S_\varepsilon}(\zeta) - I_{S_y - S_\varepsilon}(\zeta_i)$$

è arbitrariamente piccola, se $i > N'$, N' numero positivo intero.

Possiamo dunque enunciare il teorema:

Teorema 2: L'equazione integrale (17) possiede una soluzione $z(x, y)$ continua ed *unica nel dominio* $\bar{D}^*$, se le condizioni (24) e (19) sono soddisfatte, e se è $\gamma + 1 - m > 0$. Essa si ottiene col procedimento classico del sig. Picard.

Fisica. — *La larghezza naturale delle linee di raggi X.* Nota [1] di L. PINCHERLE, presentata dal Socio O. M. CORBINO [2].

1. Il dominio dei raggi X è quello nel quale meglio si può cercare di misurare la larghezza naturale delle linee spettrali. Infatti le varie cause che comunemente allargano tali linee, come l'effetto Doppler, l'azione di campi esterni all'atomo, gli urti subìti dall'atomo stesso, sono, nel caso dei raggi X, di poco effetto.

Le prime misure, assai poco precise, della larghezza di tali righe, risalgono al 1927 [3]: esse portarono al risultato che tale larghezza è molto superiore a quella che si sarebbe aspettata in base alla teoria classica dell'irraggiamento. Secondo questa teoria la larghezza delle righe spettrali dipende dallo smorzamento che la perdita di energia per irraggiamento produce sull'oscillatore, e, nella scala delle lunghezze d'onda, è la stessa per tutte le linee

$$\Delta\lambda = \frac{4\pi e^2}{3c^2 m} = 0.12 \quad \text{unità X } (10^{-11}\ cm).$$

I valori trovati nelle esperienze sulle linee di raggi X sono invece assai più grandi, e tanto più, quanto più piccolo è il numero atomico dell'elemento che si considera. La larghezza aumenta inoltre passando dalla serie K alla serie L, alla serie M ecc. Così ad esempio, la larghezza media delle linee della serie K è di 0.29 unità X per l'argento e scende a 0.08 per il tungsteno. La larghezza media delle linee della serie L è di 4.5 unità X per l'argento, 1.0 per il tungsteno, 0.7 per l'uranio.

La larghezza delle linee M del tungsteno arriva a 18 unità X.

2. Un tentativo di interpretazione di questi fenomeni è stato fatto da Coster [4]; questo Autore tentava di giustificare l'allargamento delle righe con altre cause che non fossero la larghezza naturale, come per esempio una struttura di multipletti non risolta dallo spettrografo: o la comparsa di righe vicinissime a quella in esame e dovute all'atomo due volte ionizzato; od anche come effetto del fatto che gli atomi sono riuniti in molecole o in reticoli cristallini.

(1) Pervenuta all'Accademia il 26 giugno 1934.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Roma.

(3) Per la completa bibliografia di queste esperienze, come pure per i dettagli sugli apparati sperimentali, ved. SIEGBAHN, *Spektroskopie der Röntgenstrahlen*, 2ª edizione, 1931.

(4) COSTER, «Zeit. Phys.», *45*, 797, 1927.

Le prime due ipotesi sono state dimostrate inesatte dalle esperienze di Allison [1] e di Mark e von Susich [2].

La terza avrà certo importanza nell'allargare righe dovute al salto di elettroni tra orbite piuttosto esterne dell'atomo, ma si può ritenere che sia inefficace a produrre l'allargamento osservato nelle righe dovute agli elettroni più profondi.

In seguito Breit [3] ha calcolato se l'allargamento poteva essere dovuto a una struttura iperfina, ma ha trovato che anche questo effetto non è sufficiente a rendere ragione della larghezza che si trova sperimentalmente.

Coster dava inoltre alcune regole empiriche basate sulla vecchia teoria dei quanti.

Secondo questa teoria, la larghezza $\Delta\nu_{mn}$ di una riga è determinata dalla « larghezza » degli stati quantici m e n che combinano per dare la riga stessa [4], cioè dalla indefinizione della energia di questi stati che è data da

$$\Delta E_n = \frac{h}{2\pi} \sum_{m \atop (E_n > E_m)} A_m^n$$

(dove A_m^n è la probabilità di un passaggio spontaneo dallo stato n allo stato m). Precisamente:

$$\Delta\nu_{nm} = \frac{1}{h}(\Delta E_n + \Delta E_m)$$

cioè $\Delta\nu$ è, a meno di un coefficente numerico, la somma delle larghezze degli stati che combinano per dare la riga.

Ora Coster constatava che le linee che hanno per livello di arrivo o di partenza un'orbita molto eccentrica sono le più larghe, e ne concludeva quindi che l'indefinizione dell'energia di un livello aumenta con l'eccentricità dell'orbita elettronica corrispondente. Da ciò si ha una regola per determinare *a priori* la larghezza relativa delle varie linee. Ma secondo le ultime esperienze questa regola non è sempre verificata.

3. Le esperienze più recenti sulla larghezza delle linee di raggi X sono assai più accurate delle precedenti, e gli Autori ritengono di avere raggiunta la precisione del 10 %. Williams [5] ha misurato la larghezza delle principali linee della serie L dell'uranio (i risultati sono riportati più avanti); Richtmyer e Barnes [6] quella delle linee della serie K del W, trovando

(1) Allison, « Phys. Rev. », *34*, 176, 1929.
(2) Mark e von Susich, « Zeit. Phys. », *65*, 253, 1930.
(3) Breit, « Phys. Rev. », *35*, 1447, 1930.
(4) Becker, « Zeit. Phys. », *27*, 173, 1924; Slater, « Phys. Rev. », *25*, 395, 1925.
(5) Williams, « Phys. Rev. », *37*, 1431, 1931.
(6) Richtmyer e Barnes, « Phys. Rev. », *43*, 1049-A, 1933.

$\Delta\lambda = 0.08$; Allison [1] quella delle due righe K_α di vari elementi, con Z compreso tra 26 e 47, trovando valori decrescenti al crescere di Z e compresi tra 1.06 e 0.28; Williams [2] quella delle righe L_{α_1}, L_{β_1}, L_{β_2}, L_{γ_1} di vari elementi con Z compreso tra 74 e 83, trovando valori sempre decrescenti al crescere di Z e compresi, per la α_1 tra 1.26 e 1.03, per la β_1 tra 0.94 e 0.70, per la β_2 tra 1.38 e 0.90, per la γ_1 tra 1.01 e 0.67 (tutti questi valori in unità X).

Scopo di questo lavoro è di cercare di giustificare teoricamente questi risultati sulle basi della meccanica quantistica e con l'ipotesi che si tratti esclusivamente di larghezza naturale. Si trova che tale larghezza naturale delle righe, calcolata tenendo conto solo delle probabilità di passaggio con emissione di luce è in accordo coi dati sperimentali solo per transizioni di elettroni profondi di elementi molto pesanti; negli altri casi occorre tenere conto dei salti quantici senza irraggiamento (effetto Auger), e l'influenza di questi ultimi rende conto abbastanza bene dei risultati delle esperienze.

4. Anche secondo la meccanica quantistica, la larghezza di una riga è data, a parte un coefficente numerico, da

$$\sum_{\substack{k \\ (E_k < E_n)}} A_k^n + \sum_{\substack{k \\ (E_k < E_m)}} A_k^m \text{ (3)}.$$

L'interpretazione che si deve dare a questa formula è la seguente: l'inverso della ΣA_k^n rappresenta la vita media t_n dello stato quantico n: ΔE_n viene quindi a essere la naturale indeterminazione dell'energia per una osservazione la cui durata è dell'ordine di grandezza t_n.

Nel caso di linee di raggi X bisogna sommare non le probabilità di passaggio dal livello n ai livelli k più profondi (perchè questi sono tutti occupati), ma le probabilità di passaggio spontaneo al livello n da tutti i livelli k superiori, nei quali, naturalmente, si trovi un elettrone. Per il calcolo di queste probabilità di passaggio spontaneo vedere p. es., l'articolo di H. Bethe nell'« Handbuch der Physik » (vol. XXIV$_1$ 2ª ed., 1933, p. 429 e sgg.). Nei calcoli, trattandosi di livelli profondi, si possono usare autofunzioni idrogeniche. Per le frequenze ho preso i valori sperimentali.

Si trova che, nelle varie serie, la larghezza delle righe varia poco al variare di Z, e le variazioni sono comprese nell'errore che si commette usando autofunzioni idrogeniche. In generale, contrariamente all'esperienza, crescono al crescere di Z perchè con l'aggiunta di nuovi elettroni all'atomo, cresce il numero dei termini delle ΣA_k^n.

(1) Allison, « Phys. Rev. », *44*, 63, 1933.

(2) Williams, « Phys. Rev. », 45, 71, 1934.

(3) Weisskopf e Wigner, « Zeit. Phys. », *63*, 54, 1930. Vedi anche Landau, « Zeit. Phys. », *45*, 430, 1927; Hoyt, « Phys. Rev. », *36*, 860, 1930.

Per la serie K si trovano valori intorno a 0.12, mentre i valori sperimentali vanno da 1.06 per il ferro a 0.08 per il tungsteno.

Per la serie L si trovano valori intorno a 0.7, mentre i valori sperimentali vanno da 4.5 per l'argento [1] a 0.5 per la γ_1 dell'uranio.

5. Queste divergenze tra teoria e misure possono spiegarsi mediante l'effetto Auger [2]. Tale effetto è dovuto all'azione di scambio Coulombiana tra due elettroni e consiste, come è noto, nel salto del primo elettrone da un'orbita ad un'altra senza che venga corrispondentemente emesso un quanto di luce: l'energia che si libera si manifesta invece come energia cinetica dell'altro elettrone che lascia l'atomo. La probabilità del verificarsi di questo fenomeno si somma alla normale probabilità del passaggio con irraggiamento e produce quindi una minore vita media del livello eccitato; cioè una maggiore « larghezza » di esso.

La probabilità w_A che si verifichi l'effetto Auger è, come si vede immediatamente con considerazioni dimensionali, indipendente da Z e, come ordine di grandezza, circa un milione di volte più grande delle probabilità di passaggio con irraggiamento w_1 che si hanno per l'atomo di H. Poichè w_1 è proporzionale a Z^4 si ha che il rapporto tra numero di salti Auger e numero di salti con emissione di luce è dell'ordine $10^6 Z^{-4}$ [3]. Dalle esperienze di Auger risulta che, nel caso dell'argon ($Z = 36$), tale rapporto è $= 1$ per l'anello K e $= 6.7$ per l'anello L.

Sembra che esso vari con una potenza di Z minore in valore assoluto di 4, ciò che potrebbe giustificarsi col fatto che, crescendo Z, aumenta il numero di elettroni esterni che possono essere liberati per effetto Auger. Ma la precisione delle misure di Auger è troppo piccola perchè si possa decidere se realmente la legge di proporzionalità a Z^{-4} è verificata. Nei calcoli che seguono $\frac{w_A}{w_1}$ è calcolato dai valori di Auger per gli elementi di numero atomico 18, 36, 54 per interpolazione secondo tale legge di proporzionalità.

6. Le vite medie così calcolate risultano dunque più piccole che tenendo conto del solo irraggiamento. Così, per es. la vita media del livello K del ferro, che tenendo conto soltanto delle transizioni con irragiamento risulta di $2.6 \cdot 10^{-15}$ sec., tenendo conto anche dell'effetto Auger diviene $0.54 \cdot 10^{-15}$ sec.

La larghezza di una determinata riga, secondo queste ipotesi, viene a variare con Z secondo la legge

$$\Delta\lambda = a + bZ^{-4}$$

(1) Spencer, « Phys. Rev. », *38*, 618, 1931.
(2) Auger, « Annales de Physique », *6*, 183, 1926.
(3) Wentzel, « Zeit. Phys. », *43*, 524, 1927; Fues, « Zeit. Phys. », *43*, 726, 1927.

La larghezza nella scala delle frequenze è data da

$$(1) \qquad \Delta\nu = p + q Z^4 \qquad \sqrt{\Delta\nu} = \sqrt{p + q Z^4}.$$

Nei lavori di Allison e Williams sono riportati dei diagrammi che dànno appunto l'andamento di $\sqrt{\Delta\nu}$ in funzione di Z: tali curve sono bene rappresentate da una formula del tipo della (1).

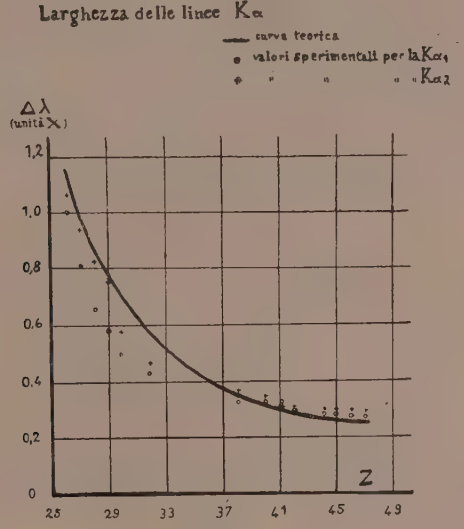


Fig. 1.

La figura 1 riporta, nella scala delle lunghezze d'onda, la larghezza delle linee K degli elementi con Z compreso tra 26 e 47. La curva è calcolata come si è detto. I valori sperimentali sono quelli di Allison.

Per grandi Z la curva tende asintoticamente a una retta (l'effetto Auger diviene trascurabile). Come si vede, l'andamento del fenomeno è rappresentato abbastanza bene; vi è una divergenza che si correggerebbe prendendo $\frac{w_A}{w_I}$ proporzionale a una potenza negativa di Z un po' minore di 4, analogamente a quanto accade per il confronto con le misure di Auger.

Naturalmente la teoria non può rendere conto del fenomeno che nelle sue grandi linee, senza potere prevedere quantitativamente le irregolarità della curva che si riscontrano sopra tutto quando si è finito di riempire completamente un anello elettronico, e passando all'elemento successivo, gli elettroni cominciano a occupare un nuovo anello; nel caso in esame ciò accade passando dal Ni (Z = 28) al Cu: intorno a questo punto si verifica infatti una brusca diminuzione dei valori sperimentali.

Di elementi più pesanti si conosce la larghezza solo della K_α del W, per la quale si trova un valore 0.08 minore di quello teorico, che, calcolato nel solito modo, risulta di 0.12. Tale divergenza si può spiegare come dovuta a un effetto relativistico, e insieme alle azioni di schermo. Infatti facendo il conto con le autofunzioni relativistiche di Dirac, valutate col metodo statistico di Fermi, si trova $\Delta\lambda = 0.09$.

Anche per le righe L si può ragionare allo stesso modo. Però in questo caso le azioni di schermo sugli elettroni che saltano sono più grandi, e l'usare autofunzioni idrogeniche non è più una approssimazione sufficiente. Inoltre per il calcolo della larghezza di tali righe è necessaria la conoscenza della vita media dei livelli M; questa non si può stabilire che con grossolana approssimazione, non essendovi dati sperimentali relativi all'effetto Auger per i livelli M. Ad ogni modo nella Tabella I sono riportati alcuni risultati relativi alla riga L_{α_1} che sono in accordo coi valori sperimentali.

Tabella I.

Elemento	Z	$\Delta\lambda$ calcolato	$\Delta\lambda$ sperimentale (unità X)	$\Delta\lambda$ calcolato senza tenere conto dell'effetto Auger
Ag	47	5	4.5	0.7
W	74	1.4	1.26	0.7
Bi	83	1.1	1.03	0.7
U	92	0.85	0.88	0.7

In genere i valori teorici sono superiori a quelli sperimentali, ciò che è dovuto alle azioni di schermo.

Per elementi pesanti occorre inoltre tenere conto della possibilità di righe di quadruplo, la cui intensità è per la serie L dell'uranio circa il 20 % di quella delle righe di dipolo.

7. Non essendo conosciute le probabilità relative dell'effetto Auger per i diversi livelli, si possono solo in parte interpretare secondo le vedute precedenti le esperienze di Williams relative alle linee L dell'uranio. Riporto nella Tabella II i suoi risultati:

Tabella II.

Riga	Transizione	$\Delta\lambda$ (unità X)	$\Delta\nu$ (volts)
α_1	$M_V \rightarrow L_{III}$	0.878	6.56
β_2	$N_V \rightarrow L_{III}$	0.738	8.04
β_5	$O_V \rightarrow L_{III}$	0.504	5.94
β_6	$N_I \rightarrow L_{III}$	0.974	9.71
β_3	$M_{III} \rightarrow L_I$	0.764	9.40
γ_3	$N_{III} \rightarrow L_I$	0.94	16.2

Se ci fosse soltanto l'irraggiamento, la larghezza delle righe dovrebbe diminuire con l'elevarsi del livello di partenza, a causa della maggiore vita media dei livelli elevati. Ciò è verificato per la β_5 rispetto alla β_2, ma non è verificato per la β_2 rispetto alla α_1 e per la γ_3 rispetto alla β_3, evidentemente perchè l'effetto Auger sarà molto maggiore per i livelli N che non per i livelli M. Sempre in base alle probabilità di transizione con irraggiamento, la β_6 non dovrebbe essere più larga delle altre righe che finiscono in L_{III}. Bisogna supporre che la vita media del livello N_I per effetto Auger sia assai piccola. L'ipotesi che i livelli con l piccolo abbiano una maggiore probabilità di effetto Auger corrisponde alla constatazione di Coster che le orbite con maggiore eccentricità dànno righe più diffuse.

Porgo i più sentiti ringraziamenti alla fondazione Marco Besso che mi ha concesso una borsa di studio di perfezionamento.

Fisica (Fisica teorica). — *Sul calcolo dei termini ottici, e in particolare dei potenziali di ionizzazione dei metalli bivalenti, per mezzo del potenziale statistico di Fermi.* Nota di U. Fano, presentata [1] dal Corrisp. E. Fermi.

È noto che i metodi d'approssimazione della meccanica quantistica conducono a identificare i termini ottici di un atomo, a meno di un fattore $-hc$, cogli autovalori dell'equazione di Schrödinger relativa all'elettrone ottico:

$$\Delta_2 \psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}[E + eV]\psi = 0 \qquad (1)$$

in cui V rappresenta il potenziale elettrostatico dovuto al resto atomico, cioè all'atomo stesso privato dell'anzidetto elettrone ottico. Fermi e i suoi collaboratori [2] in una serie di lavori hanno assunto come espressione del potenziale, per il calcolo dei termini ottici di un atomo neutro:

$$V = \frac{e}{r}\left[1 + (Z-1)\varphi\left(\frac{r}{\mu}\right)\right] \qquad (2)$$

dove r è la distanza dal nucleo, Z il numero atomico dell'atomo, φ la funzione così indicata da Fermi, e

$$\mu = \frac{3^{2/3} h^2}{2^{13/3} \pi^{4/3} me^2 (Z-1)^{1/3}}.$$

(1) Nella seduta del 17 giugno 1934.

(2) Vedi p. es. E. Fermi, *Ueber die Anwendung der statistischen Methode auf die Probleme des Atomenbaues*, « Quantentheorie und Chemie », Leipziger, Vorträge, 1928.

Per determinare l'espressione (2) si è supposto che gli $Z-1$ elettroni contenuti nel resto atomico abbiano la stessa distribuzione statistica degli $Z-1$ elettroni contenuti in un atomo neutro di numero atomico $Z-1$. Però, dopo che un lavoro successivo di Fermi [1] ha insegnato a calcolare il potenziale dovuto all'azione di uno ione positivo, sembra più conforme alla realtà considerare il resto atomico di un atomo neutro come uno ione semplice (e il resto atomico di uno ione z-plo come uno ione $(z+1)$-plo). Quindi nel calcolo dei termini di un atomo neutro si dovrà sostituire alla (2) la:

$$V = \frac{Ze}{r}\varphi_1\left(\frac{r}{\mu}\right) + \frac{e}{r_{1,0}} \tag{3}$$

dove φ_1 è la funzione φ relativa allo ione semplice dell'atomo di cui trattasi, $r_{1,0}$ è l'ascissa del nodo di φ_1, e

$$\mu = \frac{3^{2/3}\,h^2}{2^{13/3}\,\pi^{4/3}\,me^2\,Z^{1/3}}.$$

Questa nuova espressione del potenziale è stata già utilizzata in una serie di calcoli eseguiti all'Istituto Fisico di Roma, finora non pubblicati.

Allo scopo di verificare quali modificazioni nei risultati si abbiano ponendo la (3) invece della (2) nell'equazione (1), ho eseguito la determinazione della correzione di Rydberg per le serie di termini *s* degli elementi K, Zn, Ba, seguendo lo stesso metodo usato da Fermi [2], salvo le modificazioni dovute alla diversa espressione del potenziale. Nell'annessa figura sono rappresentati i valori sperimentali della correzione di Rydberg per termini *s*, la curva teorica costruita da Fermi, e quella ottenuta per interpolazione ed estrapolazione dai valori calcolati da me. Come si vede quest'ultima passa in mezzo ai punti rappresentativi dei valori sperimentali, e si può quindi ritenere più soddisfacente di quella precedente di Fermi.

La schematizzazione del problema del calcolo dei termini ottici che conduce a scrivere l'equazione (1), quando sia applicata a un metallo bivalente, per es. al Ca, non tiene conto del fatto che questo elemento, nello stato fondamentale, ha due elettroni $4s$, uno qualunque dei quali può fungere da elettrone ottico. Questi due elettroni, che nel problema hanno posizione simmetrica, vengono così trattati in modo diverso; per es. mentre l'elettrone compreso nel resto atomico non può secondo la teoria esser trovato in punti che distino dal nucleo più di $r_{1,0}$, la probabilità che si verifichi lo stesso

(1) E. Fermi, *Sul calcolo degli spettri degli ioni*, «Memorie Accad. d'Italia», vol. I, Fisica n. 2, 1930.

(2) E. Fermi, *Sulla deduzione statistica di alcune proprietà dell'atomo. Calcolo delle correzioni di Rydberg per i termini s*. Nota III, «Rend. Accademia Lincei», vol. VII, p. 726, 1928.

fatto per l'elettrone ottico è, sempre per il Ca, $4\pi \int_{r_{1,0}}^{\infty} |\psi_{4,0}|^2 r^2 dr$ (dove $\psi_{4,0}$ è l'autosoluzione della (1) di numeri quantici 4,0) e vale circa 0.17.

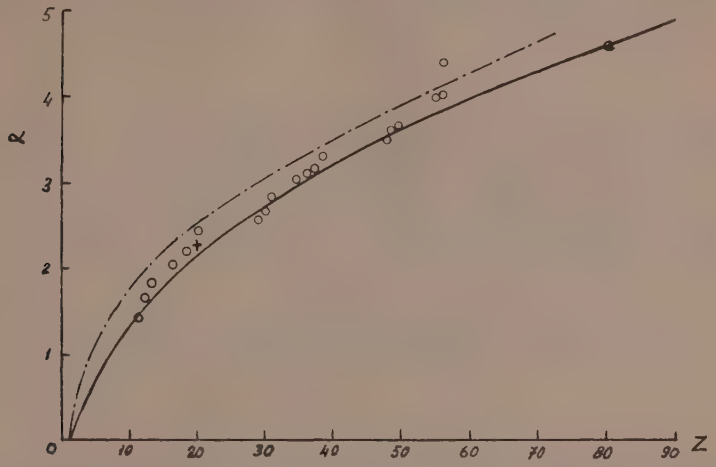


Grafico della correzione di Rydberg α per le serie di termini S in funzione del numero atomico Z. _.—.— *Curva teorica di Fermi;* ___ *Curva teorica costruita da me.* o *Valori sperimentali;* + *Valore calcolato da me col metodo di 2ª approssimazione.*

L'inconveniente ora lamentato si può in buona parte eliminare col seguente procedimento. Risolta la (1) per il Ca determinando l'autofunzione $\psi_{4,0}$, considero l'atomo di Ca come costituito:

a) da uno ione doppio Ca^{++} retto dalla statistica;

b) da un elettrone legato all'autofunzione $\psi_{4,0}$;

c) da un ulteriore elettrone (ottico) sottoposto all'azione risultante di *a*) e *b*). Quindi il termine fondamentale $4s$ del Ca sarà dato dall'autovalore di numeri quantici 4,0 della (1) in cui si introduca non più l'espressione (3) del potenziale, ma la

$$V = \frac{Ze}{r}\varphi_2\left(\frac{r}{\mu}\right) + \frac{2e}{r_{2,0}} - \frac{\bar{1}}{d(QQ')}e \qquad (4)$$

dove φ_2 è la φ relativa allo ione Ca^{++}, $r_{2,0}$ è l'ascissa del nodo di φ_2 e $\frac{\bar{1}}{d(QQ')}$ è la media dell'inverso della distanza dell'elettrone *b*) dal punto Q, cioè

$$\frac{\bar{1}}{d(QQ')} = \iiint \frac{|\psi_{4,0}|^2}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}\, dx'\, dy'\, dz' .$$

Dopo risolta la (1) in cui V è dato dalla (3), non è più necessario risolvere da capo la stessa equazione quando alla (3) si sostituisce la (4).

Nell'ordine di approssimazione di questo calcolo, si può considerare la differenza δV tra la (4) e la (3) come una perturbazione da applicarsi alla (1); quindi, detti E_I e E_{II} gli autovalori di numeri quantici 4 , 0 della prima e della seconda equazione, sarà:

$$E_{II} = E_I - \iiint \delta V \, |\psi_{4,0}|^2 \, dx \, dy \, dz .$$

Analogamente l'autofunzione relativa all'elettrone *c*) sarà ottenuta aggiungendo un termine correttivo alla $\psi_{4,0}$; con questo metodo gli elettroni *a*) e *c*) sono appunto trattati in modo quasi simmetrico.

Il calcolo del potenziale di ionizzazione del Ca col metodo primitivo (formula (3)) ha dato come risultato:

$$P_I = 3.79 \text{ volt}$$

di fronte al valore sperimentale 6.09 volt, mentre col nuovo metodo ho trovato:

$$P_{II} = 4.72 \text{ volt.}$$

Ho pure calcolato la correzione di Rydberg per la serie *s* del Ca, valendomi del potenziale (4). Il risultato è rappresentato nella figura col segno +, e si approssima al valore sperimentale più di quello ottenuto partendo dalla (3).

Per lo Zn ho trovato:

$$P_I = 11.85 \text{ volt} \quad ; \quad P_{II} = 9.20 \text{ volt}$$

di fronte al valore sperimentale 9.36 volt.

Ho eseguito inoltre il calcolo del potenziale di ionizzazione dello ione Sb^{+++}, simile, come disposizione di elettroni, al Cd, e ho trovato:

$$P_I = 39.5 \text{ volt} \quad ; \quad P_{II} = 39.7 \text{ volt}$$

mentre il valore sperimentale è 44.0 volt.

I risultati ottenuti col nuovo metodo per i metalli bivalenti mi sembrano soddisfacenti. Infatti per il Ca e lo Zn il metodo precedente conduceva, rispetto ai valori sperimentali, a scarti forti e, nei due casi, di segno opposto; in entrambi i casi l'approssimazione viene sensibilmente migliorata. Solo nel caso dello ione Sb^{+++} non si è ottenuto un miglioramento sensibile; però in questo caso anche il primo risultato era abbastanza buono.

Il nuovo metodo può essere applicato, oltre che ai metalli alcalino-terrosi e del gruppo dello Zn, ai metalli del gruppo Ge–Sn che sono anche bivalenti, avendo lo strato esterno composto di due elettroni *p*, e a tutti quei metalli che seguono nel sistema periodico gli alcalino–terrosi e che hanno nello strato esterno due elettroni *s*.

Ho anche voluto calcolare il potenziale di ionizzazione di un metallo terroso, valendomi dell'espressione (3) del potenziale. Per il Ga ho trovato il valore 6.1 volt di fronte al valore sperimentale 5.97 volt.

Ringrazio vivamente il prof. Persico che mi ha suggerito questo lavoro e mi fu sempre largo di consiglio e di aiuto.

Fisica. — *Sul cosiddetto momento elettrico dell'elettrone.* Nota [1] di G. Racah, presentata dal Corrisp. E. Fermi.

1. È noto che l'equazione dell'elettrone di Dirac, oltre che soddisfare il principio dell'invarianza relativistica, porta automaticamente all'esistenza del momento magnetico proprio dell'elettrone. Ci si può anzi render conto rapidamente di questa proprietà, passando dall'equazione di Dirac del primo ordine a quella del secondo, poichè in tal caso nell'espressione dell'energia compaiono i due termini [2]

$$(1) \qquad \mu_0 (\sigma \times H) + i \mu_0 (\alpha \times E)$$

di cui il primo viene attribuito appunto all'interazione del momento magnetico $-\mu_0 \sigma$ dell'elettrone col campo magnetico in cui si trova, ed il secondo ad un ipotetico momento elettrico immaginario.

Solo quando in approssimazione non relativistica si passa dall'equazione di Dirac del secondo ordine all'equazione di Pauli [3], questo secondo termine viene dimostrato equivalente all'energia dovuta al campo magnetico apparente che deriva dal moto dell'elettrone in un campo elettrico, più un nuovo termine, senza analogo classico, trovato per la prima volta da Darwin [4].

Non è forse privo d'interesse il mostrare che tale equivalenza non solo si può dimostrare senza passare all'approssimazione non relativistica, ma che eseguendo razionalmente la trasformazione viene a sparire il termine aggiuntivo di Darwin.

2. Ricordiamo infatti che gli operatori $\sigma_x , \sigma_y , \sigma_z$ soddisfano alle relazioni di scambio

$$\sigma_j \sigma_k - \sigma_k \sigma_j = 2 i \sigma_l \qquad (\text{con } j , k , l, \text{ in ordine ciclico}),$$

relazioni che possono esprimersi in forma vettoriale con l'equazione

$$\sigma \bigwedge \sigma = 2 i \sigma .$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 16 luglio 1934.

(2) Cfr. H. Bethe in «Geiger u. Scheel, Handbuch der Physik», XXIV-I, 1933, p. 302, eq. (7.10).

(3) Cfr. H. Bethe, loc. cit., eq. (8.5); W. Pauli in «Geiger u. Scheel», loc. cit., p. 237, eq. (89).

(4) C. G. Darwin, «Proc. Roy. Soc.», *118*, 663, 1928, eq. (4.4).

Essendo poi

$$\alpha = \rho_1 \sigma$$

dove ρ_1 è un operatore che commuta con tutte le componenti di σ, possiamo anche scrivere

$$\sigma \wedge \alpha = 2i\alpha \tag{2}$$

e sostituire perciò alla (1)

$$\mu_0 (\sigma \times H) + \frac{1}{2} \mu_0 ([\sigma \wedge \alpha] \times E)$$

od anche, per un noto teorema di calcolo vettoriale,

$$\mu_0 (\sigma \times H) + \frac{1}{2} \mu_0 (\sigma \times [\alpha \wedge E]). \tag{3}$$

Ricordando che l'operatore α corrisponde a $-\frac{v}{c}$, si vede subito che il secondo termine della (3) corrisponde esattamente all'energia del momento *magnetico reale* (e non elettrico immaginario) dell'elettrone nel campo apparente $-\frac{v}{c} \wedge E$, quando si tenga conto del fattore $\frac{1}{2}$ di Thomas[1].

3. Il fatto che con questo procedimento scompaia il termine aggiuntivo di Darwin, spiega il significato fisico di tale termine, poichè si dimostra così che esso corregge in prima approssimazione l'errore che si commette nel sostituire $-\frac{p}{mc}$ ad α.

Ci si può però domandare perchè non sia lecito in prima approssimazione il fare tale sostituzione, e si può forse pensare che, producendo il termire di Darwin una variazione dell'energia solo in quegli stati che hanno l'autofunzione diversa da zero nell'origine, cioè dove il potenziale diventa infinito, non sia più lecito in quel caso limitarsi ad una approssimazione relativistica, o meglio semi–relativistica. La causa non è però questa, perchè se anche al nucleo puntiforme si sostituisse un nucleo esteso che non presenti più singolarità per il potenziale, il termine di Darwin non scompare se è $\psi \neq 0$ dove è diversa da zero la carica nucleare.

Si deve perciò dedurne che il termine correttivo di Darwin non è attribuibile alla differenza esistente secondo la teoria della relatività classica tra v e $\frac{p}{m}$, ma alla differenza esistente secondo la teoria di Dirac tra $-c\alpha$ e la velocità classica, cioè alla cosiddetta *Zitterbewegung*, fenomeno che non è lecito trascurare in questa approssimazione, che solo impropriamente viene detta non relativistica, essendo i fenomeni dovuti allo spin di per sè proporzionali a $\frac{1}{c^2}$.

(1) L. H. Thomas, «Nature», *117*, 514, 1926.

Chimica. — *Sulla reazione fra nitritopentacianuro sodico e solfuri alcalini*[1]. Nota IV[2] di G. Scagliarini e F. Monforte, presentata dal Socio M. Betti.

In una Nota precedente era stato osservato da uno di noi[3] che una soluzione di nitroprussiato sodico, contenente notevoli quantità di alcali, reagendo coi solfuri alcalini anzichè dare la nota colorazione violetta caratteristica dei solfonitroprussiati alcalini, dà luogo invece ad una tinta rosso-vinosa, simile a quella che si ottiene trattando il nitroprussiato col solfuro ammonico. Siccome è noto che i nitroprussiati in ambiente alcalino si trasformano in nitritopentacianuri[4] così era da pensare fosse questo pentacianuro a fornire la reazione cromatica sopramenzionata e difatti essa si manifesta anche facendo reagire una soluzione acquosa di pentacianuro puro con un solfuro alcalino.

Tale reazione cromatica si poteva perciò pensare che fosse dovuta alla formazione di un nuovo prodotto di addizione fra nitritopentacianuro e solfuro alcalino (e ciò sarebbe stato avvalorato dalla colorazione di tonalità differente da quella caratteristica dei solfonitroprussiati alcalini). Ma si poteva anche supporre che per idrolisi si reintegrasse in parte il nitroprussiato, il quale, col solfuro alcalino darebbe poi solfonitroprussiato, inquinato però da nitritopentacianuro, ed in appoggio a questa seconda interpretazione starebbe il fatto che il nitritopentacianuro con solfuro alcalino in soluzione metilalcoolica non dà luogo ad alcuna reazione cromatica, ma questa invece si manifesta e si intensifica gradatamente diluendo con acqua.

Per decidere tale questione si pensò dapprima se fosse possibile isolare il prodotto finale della reazione fra nitropentacianuro sodico e solfuro potassico in eccesso, aggiungendo alla soluzione acquosa dei corpi reagenti un forte eccesso di alcool metilico, dato che molti pentacianuri sono insolubili in tale solvente, nel quale al contrario, sono solubili gli alcali caustici ed i solfuri alcalini. Si ottenne in tal modo una sostanza oleosa colorata in rosso-vinoso, inquinata però da altri prodotti, la quale evidentemente non si prestava ad essere analizzata anche perchè si alterava rapidamente dando luogo a notevolissime quantità di ferrocianuro potassico ed a tracce di azzurro di Berlino.

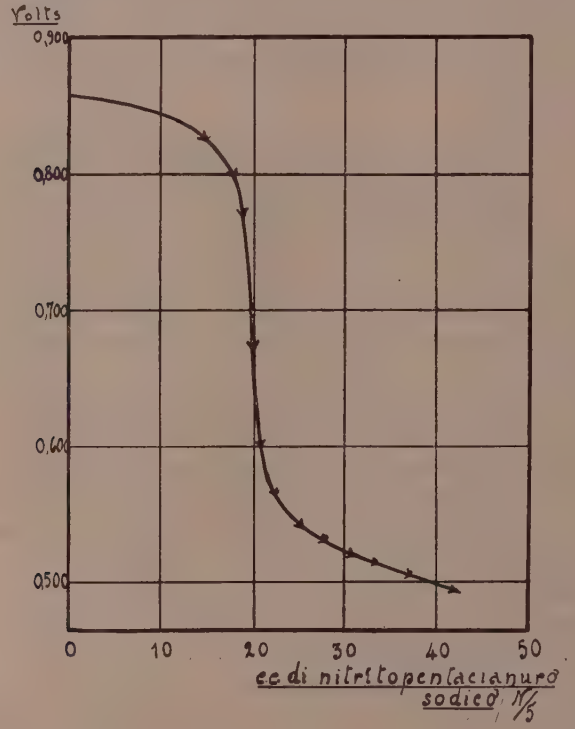
(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Chimica farmaceutica della R. Università di Messina.

(2) Pervenuta all'Accademia il 26 giugno 1934.

(3) « Atti del IV Congresso Naz. di chimica pura ed applicata », p. 597, 1931, XI.

(4) « Liebigs Annales », *312*, p. 18, 1900.

Si ricorse allora, come già altra volta era stato fatto [1], a misure potenziometriche per verificare la eventuale formazione di un composto fra i due sali reagenti. Infatti costruendo la curva di titolazione del solfuro sodico col nitritopentacianuro sodico, servendosi di un elettrodo a solfuro d'argento (e cioè di una pila Ag, $Ag_2S/Na_2S/KCl$, Hg_2Cl_2, Hg) abbiamo potuto nettamente mettere in evidenza un flesso spiccatissimo quando le due soluzioni di solfuro e di nitritopentacianuro si trovavano in corrispondenza stechiometrica. In altre parole, aggiungendo ad un volume di soluzione titolata di solfuro sodico un uguale volume di soluzione stechiometricamente equivalente di nitritopentacianuro sodico, si osserva un fortissimo abbassamento della massa attiva degli ioni solfo. Tale valore dell'attività dello zolfo ione passa dall'ordine di grandezza di 10^{-2}, quale è nella soluzione N/10 di solfuro sodico primitiva, all'ordine di grandezza di 10^{-14}, dopo l'aggiunta di una quantità equivalente di nitritopentacianuro (V. diagramma) come ap-



punto già altra volta fu, da uno di noi, constatato nella reazione fra nitroprussiato e solfuro sodico [2]. Ammettendo pertanto che si formi solfoni-

(1) Questi «Rendiconti», ser. 6ª, vol. 8, p. 75, 1928.
(2) Questi «Rendiconti», ser. 6ª, vol. 8, pp. 78-79, 1928.

troprussiato sodico, abbiamo voluto calcolare la costante di dissociazione dell'anione complesso solfonitroprussico. Utilizzando le ultime quattro misure elettrometriche della curva riportata nella figura, abbiamo potuto apprezzare una costante di dissociazione dello anione solfonitroprussico all'incirca di 10^{-14}, da cui si deduce, applicando le note relazioni termodinamiche, un valore di circa 19000 calorie, che corrisponde appunto al valore dell'affinità, già altra volta calcolata, di un grammo–ione zolfo rispetto ad un grammo–ione nitroprussico.

I fatti sopra esposti stanno perciò ad indicare che nella sopraricordata reazione si forma solfonitroprussiato alcalino, ed anche una osservazione di L. Cambi [1] viene in appoggio a questa nostra interpretazione. Il Cambi dimostra infatti, che il sistema: nitroprussiato, alcali, nitritopentacianuro conduce ad un equilibrio dipendente dalla concentrazione ossidrilionica, secondo l'equazione:

$$Na_4\left[Fe'' \begin{matrix}(CN)_5''' \\ NO_2\end{matrix}\right] + H_2O \rightleftarrows Na_2\left[Fe''' \begin{matrix}(CN)_5'' \\ NO\end{matrix}\right] + 2\,NaOH.$$

L'affinità che lega l'ossigeno al gruppo nitroprussico è perciò molto minore di quella che lega lo zolfo allo stesso aggruppamento e quindi in conclusione, lo zolfo viene a sostituirsi quantitativamente all'ossigeno per formare il solfonitroprussiato alcalino secondo l'equazione:

$$Na_4\left[Fe'' \begin{matrix}(CN)_5''' \\ NO_2\end{matrix}\right] + Na_2S + H_2O = Na_4\left[Fe'' \begin{matrix}(CN)_5''' \\ NOS\end{matrix}\right] + 2\,NaOH.$$

La curva potenziometrica riportata può come è chiaro fornirci anche un metodo di dosamento del nitrito-pentacianuro alcalino, ma a condizione che questo sia del tutto esente di nitroprussiato, poichè anche il nitroprussiato reagisce col solfuro in modo analogo al nitritopentacianuro. D'altra parte si sa però che mentre il nitroprussiato è solubile nell'alcool metilico, il nitritopentacianuro vi è quasi totalmente insolubile e perciò per ripetute precipitazioni questo si può completamente purificare dal primo. Reciprocamente, con una soluzione titolata di nitritopentacianuro si potrebbe determinare il titolo di una soluzione di solfuro alcalino. Alla reazione, come abbiamo potuto constatare, non è d'impedimento la presenza di impurità dovute ad alogenuri, idrati, solfati, carbonati, bicarbonati e silicati alcalini in quantità anche abbastanza rilevanti.

(1) «Gazzetta Chim. Ital.», vol. 58, p. 71, 1928.

Chimica (Industrie Chimico-Agrarie). — *Contributo alla conoscenza della maturazione dei formaggi.* – I. *Proteasi, dichetopiperazine e peptidi prolinici* [1]. Nota [2] di E. Parisi e G. De Vito, presentata dal Socio A. Menozzi.

I fenomeni chimici che hanno luogo nella maturazione del formaggio sono conosciuti ancora molto incompletamente e meritano uno studio più attento e profondo di quello che finora è stato compiuto. Per portare un contributo alla conoscenza di questo argomento, che offre un interesse eccezionale sia dal punto di vista teorico che pratico, noi abbiamo anzitutto cercato di chiarire un punto relativo agli agenti che determinano nel formaggio la degradazione della sostanza proteica, e, in un secondo tempo, abbiamo indagato l'azione di questi su alcuni peptidi, relativamente semplici, privi di gruppi amminici liberi, che vengono in questo lavoro per la prima volta segnalati nel formaggio e che, per diffusione ed importanza, superano enormemente gli stessi amminoacidi di cui si sono fin qui occupati i diversi Autori.

Tutti ormai riconoscono che la maturazione dei formaggi è dovuta ai processi di fluidificazione e degradazione della caseina operati sia dai batteri che dagli enzimi.

Tra i primi sono particolarmente attivi i batteri lattici proteolitici che, come ha dimostrato Costantino Gorini [3], costituiscono la flora fondamentale e indispensabile di tutti i formaggi.

Per ciò che riguarda la provenienza e l'azione degli enzimi proteolitici, – dei quali intendiamo qui occuparci –, pur accordando un ruolo preminente ai batteri proteolitici testè ricordati, quali produttori attivissimi di proteasi [4], non si può tuttavia escludere come – del resto non l'esclude nemmeno il Gorini – l'importanza grande degli enzimi liberi preesistenti nel latte, apportati col presame o prodotti dalla autolisi delle rigogliose flore microbiche secondarie, specialmente fungine. Infatti, per farsi un'idea sulla importanza che nella fluidificazione della caseina possono esercitare gli enzimi provenienti

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Industrie Chimico-Agrarie del R. Istituto Superiore Agrario di Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia il 2 luglio 1934.

(3) C. Gorini, «Rend. R. Istit. Lomb. Sc. e lett.», *37*, 939 (1904); «Rend. Acc. Lincei», *19*, 150 (1910); *20*, 284 (1911); *24*, 369, 470 (1915); *30*, 312 (1921); *6*, 338 (1927); «Rend. XIV° Congresso Intern. di Fisiologia», Roma, 1932; «Il Latte», *8*, 13 (1934).

(4) C. Gorini, «Rend. Acc. Lincei», *20*, 284 (1911); C. Gorini, W. Grassmann e H. Schleich, «Z. physiol. Chem.», *205*, 133 (1932).

dal disfacimento delle cellule dei microorganismi, basta ricordare che anche i saccaromiceti – che M. Sacchetti [1] trova diffusi in tutti i formaggi – non esercitano alcuna azione apprezzabile sulle proteine, mentre, uccisi ed autolizzati con acetato di etile o con cloroformio, sono capaci, come esaurientemente dimostrano le bellissime ricerche di Willstätter e della sua Scuola [2], di provocare demolizioni rapide e profonde nelle più svariate sostanze proteiche.

Ma, fin ad oggi, non solo non è stato possibile separare i due ordini di fenomeni, – quello enzimatico da quello biologico, – così da poter poi stabilire in modo soddisfacente la parte che nel processo di maturazione spetta a ciascuno di essi, ma non è stato nemmeno possibile accertare in modo sicuro la presenza di proteasi libere nei formaggi.

Barthel, Sandberg e Haglund [3] sottoponendo a forti pressioni in torchi a leva differenziale i formaggi finemente suddivisi e mescolati con sabbia fine, in modo da ridurre al minimo la notevole elasticità della pasta e da favorire nello stesso tempo il drenaggio del liquido, ottennero un succo nel quale poterono dimostrare con sicurezza la presenza di un enzima coagulante.

La tecnica impiegata dagli Autori svedesi qui ricordati, in fondo non è diversa da quella classica, usata dai Buchner per ricavare la zimasi dai lieviti. Questa tecnica noi pure abbiamo seguìto per estrarre dai formaggi un succo integrale nel quale ci eravamo proposti di accertare e studiare per via ottica, seguendo cioè al polarimetro i cambiamenti nel potere rotatorio della soluzione, l'attività delle proteasi eventualmente presenti sulle sostanze azotate del succo stesso.

A tal fine, il formaggio pestato intimamente in un mortaio con 2–3 parti in peso di sabbia quarzosa fu pressato al torchio idraulico a 250–300 atmosfere e il succo, mano mano che defluiva dal cestello, fu liberato del grasso per centrifugazione. Il liquido opalescente, che in tal modo si otteneva, venne filtrato per setto di porcellana porosa e la soluzione densa, ricchissima di sostanze azotate, venne esaminata in un polarimetro sensibile alla luce gialla di una lampada elettrica a vapori di sodio. Fu possibile così accertare che le sostanze contenute nel succo del formaggio fanno deviare fortemente a sinistra il piano della luce polarizzata.

Nella soluzione, lasciata a sè in recipienti chiusi e in presenza di antisettici, l'attività ottica assume via via valori più bassi e alla diminuzione del potere rotatorio fa sempre riscontro un incremento di carbossili e di gruppi amminici, che si formano evidentemente per idrolisi enzimatica dei

(1) M. Sacchetti, « Arch. f. Mikrob. », *3*, 650 (1932); *4*, 427 (1933).

(2) R. Willstätter e W. Grassmann, « Z. physiol. Chem. », *153*, 250 (1926); W. Grassmann, e W. Haag, *167*, 188 (1927); W. Grassmann, *167*, 202 (1927); W. Grassmann e H. Dyckerhoff, *175*, 18 (1928); « Ber. », *61*, 656 (1928); *62*, 1307 (1929); Vedasi anche Dernby, « Biochem. Z. », *81*, 107 (1917).

(3) Chr. Barthel, E. Sandberg e E. Haglund, « Le Lait », *8*, 285 (1928); *8*, 762 (1928).

legami peptidici, e che si possono agevolmente dosare, i primi per semplice titolazione alcalimetrica in soluzione alcoolica [1] ed i secondi in micro apparecchio di van Slyke [2].

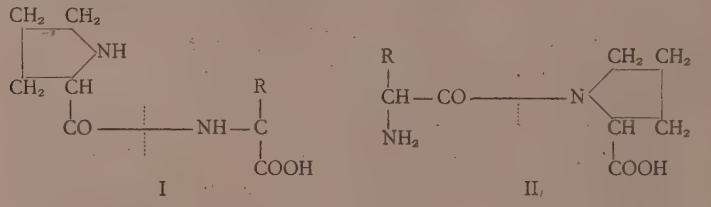
Le modificazioni ottiche e chimiche testè accennate, in cui le proteasi libere giocano una parte notevole ed affatto indipendente dalle flore batteriche e fungine nella scomposizione delle « sostanze azotate filtrabili » del formaggio, vengono esaltate se al substrato si aggiunge un energico enzima proteolitico, quale la tripsina di fresco preparata, la cui azione, sommandosi con quella degli enzimi normalmente contenuti nel « succo », provoca una più rapida diminuzione nell' attività ottica del liquido ed una più intensa formazione di gruppi carbossilici ed amminici.

Però, non ostante la notevole energia della tripsina, da noi usata in queste nostre ricerche, alcuni composti levogiri contenuti nel « succo » sfuggono alla sua azione; per cui il substrato conserva a lungo una parte del suo potere rotatorio levogiro, che non è certo dovuto agli ammino acidi liberi.

Questo risultato veramente inatteso ci fece supporre che nei formaggi maturi fossero contenuti alcuni composti resistenti alle proteasi, come per es. i peptidi prolinici e le dichetopiperazine, la cui presenza nei formaggi, almeno per quel che è a nostra conoscenza, non è stata ancora segnalata. E la supposizione venne – noi crediamo – confermata dai fatti; ma, prima di esporre i risultati delle nostre esperienze, crediamo utile passare in rapida rassegna i lavori che giustificano questa nostra ipotesi.

Intorno alla inerzia fermentativa dei dipeptidi prolinici e delle dichetopiperazine la letteratura – specialmente recente – è ricchissima di dati.

Il primo accenno si trova già nei primi lavori di E. Fischer e E. Abderhalden (3). Questi, come è noto, non riuscirono mai ad accertare la presenza della prolina libera tra i prodotti di idrolisi con la pancreatina delle più svariate sostanze, compresa la caseina, mentre isolarono sempre dai liquidi di digestione i peptidi prolinici, in genere dipeptidi, nei quali, come appare dalle formule, il legame peptidico si può formare a spese del carbossile (I) o a spese del gruppo imminico della prolina (II):



(1) F. W. Foreman, « Biochem. Journ. », *14*, 451 (1920); R. Willstätter e E. Waldschmidt-Leitz, « Ber. », *54*, 2988 (1921); E. Waldschmidt-Leitz », « Z. physiol. Chem. », *132*, 181 (1924).

(2) D. D. van Slyke, « Ber. », *43*, 3170 (1910); « Journ. Biol. Chem. », *9*, 185 (1911); Abderhalden's, *Handbuch der biologischen Arbeitsmethoden*, Abt. I, Teil 7, S. 263.

(3) E. Fischer e E. Abderhalden, « Z. physiol. Chem. » *39*, 81 (1903); *40*, 215 (1903–1904).

In entrambi i casi si ottengono composti quasi sempre solubilissimi in alcool e, per ciò che riguarda il contegno chimico e chimico-biologico, affatto diversi dai peptidi comuni, che pigliano origine dall'unione di due amminoacidi a catena aperta.

Grassmann (1) pertanto si domanda se per questi composti - che contengono un >NH al posto di un $-NH_2$ (I) o un $-CON<$ al posto di un $-CONH-$ (II) non sia necessario, per scinderli, l'intervento di enzimi specifici diversi da quelli che operano l'idrolisi dei comuni polipeptidi.

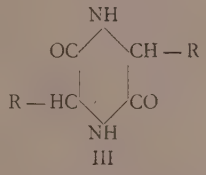
L'esperienza dimostra che, sotto l'azione delle proteasi, sono notevolmente più stabili i peptidi prolinici del secondo tipo (II).

Ai prolil-peptidi di Fischer (prolilalanina e prolifenilalanina) Grassmann (2) aggiunse la prolilglicina e la prolilglicilglicina, sui quali fece agire numerose proteasi. Egli potè così dimostrare che questi composti vengono debolmente attaccati dalla erepsina intestinale, dall'autolizzato di lievito fresco e dall'estratto glicerico del pancreas, mentre rimangono affatto inerti di fronte alla papaina attivata con acido cianidrico, alla tripsin-chinasi ed alla erepsina del lievito secco.

D'altra parte numerosi nuovi polipeptidi prolinici, in cui la prolina è legata per azoto, vennero recentemente preparati da Abderhalden (3). Di essi, ad eccezione della glicilprolina, che viene debolmente scissa da alcune proteasi, gli altri sono molto stabili, sia di fronte alla tripsin-chinasi che alla erepsina.

A conclusioni meno nette sarebbero pervenuti Bergmann e Zervas (4) i quali, pur confermando l'osservazione dei precedenti sperimentatori circa la incapacità della pancreatina commerciale di scindere il legame peptidico della glicilprolina, sostengono però che l'autolizzato di lievito fresco e l'estratto glicerico della mucosa dell'intestino tenue del maiale, sono invece capaci di idrolizzare quasi completamente (60-70 %) la glicilprolina.

Per ciò che riguarda le dichetopiperazine (III):



III

che furono anch'esse isolate dai prodotti di idrolisi enzimatica della gelatina (5) e della gliadina (6), tutti gli Autori sono concordi nell'ammettere che nessun enzina proteolitico noto è capace di aprire il loro anello. Risulta infatti anche dalle accurate ricerche del Waldschmidt-Leitz (7) che la pepsina, la tripsina, la papaina attivata, la erepsina e le proteasi dei lieviti e delle muffe non sono capaci di spezzare l'anello della glicil-glicina.

(1) W. Grassmann, H. Dyckerhoff e O. v. Schoenebeck, « Ber. », *62*, 1307 (1929); A. Fodor, Max Frankel e Kuk, « Bioch. Z. », *229*, 28 (1930).

(2) W. Grassmann, H. Dyckerhoff e O. v. Schoenebeck, « Ber. », *62*, 1307 (1929).

(3) E. Abderhalden e O. Zumstein, « Fermentforschung », *12*, I (1930); E. Abderhalden e Nüssler, « Bioch. Z. », *266*, 216 (1933); « Fermentforschung », *14*, « Neu Folge », *7*, 128 (1933).

(4) M. Bergmann, L. Zervas, H. Schleich, F. Leinert, « Z. physiol. Chem. », *212*, 72 (1932).

(5) P. A. Levene e Beatty, « Ber. », *39*, 2060 (1906); « Z. physiol. Chem. », *47*, 143 (1906).

(6) E. Abderhalden, « Z. physiol. Chem. », *128*, 119 (1923).

(7) E. Waldschmidt-Leitz e Schäffener, « Ber. », *58*, 1356 (1925); *61*, 299 (1927).

Anidridi più complesse, formate da anelli di più di due aminoacidi (cicline di Ssadikow) o di più nuclei piperazinici uniti insieme vennero recentemente identificati tra i prodotti di idrolisi delle proteine con gli acidi, specialmente da Abderhalden (1) e da Ssadikow (2).

Interessanti ai fini del presente lavoro, sono le anidridi della alanil-leucil-prolina, della valil-prolil-prolina e della prolil-prolil-leucina ecc. per le quali, non ostante manchino ancora gli accertamenti diretti, si può presumere, data la presenza nella loro molecola di legami prolinici e di anelli anidridici, un contegno analogo, di fronte agli enzini, a quello già rilevato per le dichetopiperazine e per i peptidi prolinici.

Per svelare la presenza degli anelli piperazinici nel succo dei formaggi noi ci siamo serviti della reazione proposta da Sasaki (3) che consiste nel far bollire per circa un minuto qualche centigrammo della sostanza in esame, sospesa o sciolta in poca acqua, con qualche goccia di una soluzione acquosa satura a freddo di acido picrico e di due o tre centimetri cubici di carbonato sodico in soluzione pure satura: in presenza delle dichetopiperazine, – o di altri corpi contenenti gruppi carbossilici, dei quali la reazione è caratteristica, – il liquido si colora in rosso vivo.

Noi abbiamo ripetutamente constatato che questa reazione viene data in modo netto sia dal succo integrale di formaggio, filtrato per porcellana porosa, sia dal residuo che rimane evaporando a secco l'estratto in acetato di etile dei formaggi vecchi in precedenza sgrassati con etere. La reazione è intensissima nel caso del pecorino piccolo abruzzese e del Camembert (Jockey Club) i cui estratti in acetato di etile rivelano la presenza di gruppi amminici soltanto dopo trattamento a freddo con gli alcali o dopo lunghissima ebollizione con acqua (apertura degli anelli piperazinici).

Ma oltre alle dichetopiperazine solubili in acetato di etile, che nei formaggi si trovano in genere soltanto in quote modeste, il succo contiene cospicue quantità di peptidi prolinici dai quali la prolina viene liberata soltanto dopo lunga ebollizione con acido cloridrico, e mai dopo idrolisi enzimatica.

Come materiale di partenza per estrarre i peptidi prolinici, molto più conveniente del succo è il formaggio sgrassato, che noi abbiamo usato largamente in queste ricerche.

In una nostra esperienza 1200 gr. di grana reggiano vennero grattugiati, seccati a bassa temperatura ed estratti con etere in opparecchio Soxhlet. La polvere, privata dal grasso, venne quindi versata in alcool a 96° bollente e filtrata rapidamente alla pompa dopo circa 15 minuti di ebollizione. Questa operazione venne ripetuta più volte. Dalle soluzioni alcooliche si separarono

(1) E. Abderhalden e E. Komm, « Z. physiol. Chem. », *131*, 284 (1923); *132*, I (1923); *134*, 113, 121 (1924); *139*, 147 (1924).

(2) W. S. Ssadikow, « Bioch. Z. », *136*, 238 (1923); Ssadikow e Zelinsky, *136*, 241 (1923); *147*, 30 (1924); *179*, 326 (1926); Ssadikow e E. A. Poschiltzowa, *221*, 304 (1930),

(3) T. Sasaki, « Bioch. Z. », *114*, 63 (1921); E. Abderhalden e E. Komm, « Z. physiol. Chem. », *139*, 181 (1924); *140*, 99 (1924).

complessivamente circa 100 gr. di una sostanza fioccosa che al microscopio apparve uniforme e formata di una minutissima polvere cristallina.

Per liberarlo da un po' di leucina, che sempre l'accompagna, il prodotto venne ricristallizzato dall'alcool fino a scomparsa della reazione della ninidrina (reazione di Ruheman degli-NH_2 in posizione α rispetto ad un carbossile [1].

Asciugata quindi alla pompa e lavata abbondantemente con etere, la sostanza si presenta sotto forma di polvere bianca stabilissima all'aria, poco solubile in acqua, solubile negli alcali diluiti, solubilissima in acido acetico. Le sue soluzioni sono fortemente levogire: in acido acetico $[\alpha]_D^{25} = -64°,6$; non dà il biureto; sospesa in acqua e bollita in presenza di carbonato o idrossido di rame di fresco precipitato il liquido rimane incoloro; scaldata in presenza di carbonato sodico e di una traccia di acido picrico, forma dei grumi di color rosso vivo. Ad eccezione della reazione di Millon e della Xantoproteica non dà nessuna delle comuni reazioni cromatiche degli amminoacidi.

Per idrolisi completa con gli acidi soltanto il 50 % circa del suo azoto si ritrova nella soluzione sotto forma amminica: tra i prodotti di idrolisi si identificano: la tirosina, la leucina, la fenil–alanina, le basi precipitabili con acido fosfotungstico e notevoli quantità di valina e prolina. Quest'ultima si riconosce facilmente dall'attività ottica fortemente levogira e dal suo caratteristico sale di rame, il quale, a differenza dei sali di rame di tutti gli altri amminoacidi noti, è solubile in alcool assoluto e non svolge azoto se, in soluzione acetica, viene trattato, in apparecchio di van Slyke, con acido nitroso.

Sciolta in acido acetico glaciale e riprecipitata con etere, la sostanza fornisce un prodotto bianchissimo che è assolutamente privo di fosforo, ma contiene ancora tracce di ceneri: fonde decomponendosi a 278°.

All'analisi dà i seguenti valori:

C: 49,08 ; H: 7,09 ; N: 14,46 ; residuo 0,4

Un altro prodotto, ricavato dal provolone, presenta gli stessi caratteri del precedente e dà all'analisi:

C: 51,3 ; H: 7,4 ; N: 13,31 ; residuo 0,2

Il peso molecolare, - o per essere più esatti il peso molecolare medio, giacchè è improbabile che la sostanza sia formata da un unico individuo chimico, - determinato per via crioscopica in acido acetico, fornì numeri compresi tra 250 (grana) e 310 (provolone).

Composti analoghi, ma a peso molecolare medio più alto (468) abbiamo pure isolato dai formaggi a pasta molle stagionati. La purificazine dei pro-

(1) Ruheman, « J. Chem. Soc. », *97*, 2025 (1910); « J. Am. Chem. Soc. », *39*, 1059 (1917); Abderhalden, « Z. physiol. Chem. », *72*, 37 (1911); C. Neuberg, « Bioch. Z. », *67*, 56 (1914).

dotti ottenuti dai formaggi molli è però assai più difficile a cagione della presenza in questi di discrete quantità di tirosina libera che, secondo le nostre esperienze, manca affatto od è presente soltanto in tracce non facilmente rivelabili in tutti i formaggi a pasta dura (grana, caciocavallo, provolone, pecorino abruzzese ecc.).

Le prove di fermentazione enzimatiche dei polipeptidi prolinici estratti dai formaggi dimostrarono – confermando quanto era stato osservato nel succo – che essi non vengono scissi nè dalla pepsina (pH = 2,8) nè dalla papaina attivata con acido cianidrico (pH = 5,2); la pancreatina, la tripsina e la takadiastase, a pH = 7,5, come chiaramente dimostrano i dati raccolti nella seguente tabella, li scindono, ma con estrema lentezza, causando una diminuzione della attività ottica della soluzione ed un incremento di gruppi carbossilici ed amminici.

TABELLA.

Scissione dei polipeptidi prolinici.

In presenza di toluolo; gr. 0,5 in 12 cc.; pH = 7,5 raggiunto con Na_2HPO_4 e KH_4PO_4, T. = 35°

N°	Enzima	Attività ottica gradi di cerchio l = 10				Incremento carbossili cc. KOH 0,05 N. per 2 cc. di soluzione dopo 336 ore.	
		Inizio fermentazione	dopo 48 ore	dopo 120 ore	dopo 336 ore	In soluz. alc. 50°	In soluz. alc. 90°
1	Testimone . . .	−2°, 80	−2°, 85	−3°, 00	−3°, 12	0,25	0,15
2	Pancreatina «Erba»	−2°, 70	−2°, 50	−2°, 15	−1°, 95	0,80	0,30
3	Tripsina «Difco»	−2°, 78	−2°, 15	−1°, 85	−1°, 76	1,35	0,35
4	Taka-Diastase «Parke Davis».	−2°, 70	−2°, 15	−1°, 60	−1°, 20	1,60	0,35
	Temperatura dei liquidi.	28°	27°	24°	22°	—	—

In armonia con la nostra supposizione parlano quindi chiaramente a favore della presenza di cospicue quantità di anidridi di peptidi prolinici nei formaggi maturi numerosi fatti sicuramente accertati sui prodotti da questi isolati allo stato di sufficiente purezza: – notevole solubilità nell'alcool a 96°; lenta ed incompleta fermentescibilità; assenza di gruppi amminici; peso mo-

lecolare relativamente basso; punto di fusione netto; presenza di notevoli quantità di prolina tra i prodotti di idrolisi.

Ma questo lavoro non sarebbe completo se, oltre a segnalare i risultati raggiunti, non prendesse in considerazione anche le conseguenze pratiche cui essi possono aprire la strada. Noi siamo fermamente persuasi che il grado di demolizione della caseina dei formaggi sta in relazione stretta con la percentuale di prodotti prolinici in essi contenuti; e, pertanto, abbiamo allo studio un metodo piano di dosamento di questi importanti composti. Su esso riferiremo in una prossima Nota.

Paleontologia. — *Osservazioni sull'apparato masticatorio del genere Orthopsis* [1]. Nota [2] di GISELDA SERRA, presentata dal Socio A. MARTELLI.

Il prof. Checchia-Rispoli ha descritto, or non è molto [3], una nuova specie di *Orthopsis* (*O. Sanfilippoi*) del Maestrictiano del Gebel Misid e di altre località del basso Sofeggin (Tripolitania). Tra i diversi esemplari illustrati, ve n'è uno che mostra ancora in posto l'apparato masticatorio (lanterna d'Aristotile), che io ho preso in esame per tentarne una preparazione in considerazione della grande importanza che si annette oggi a quest'organo per la sistematica della maggior parte degli Echinidi regolari. Nonostante la durezza della roccia, sono riuscita ad isolare alcune mascelle intere, che presentano i denti ancora in posto ed a mettere in evidenza la cintura perignatica.

Cintura perignatica. – Come ha scritto il Checchia-Rispoli, questa specie ha il peristoma un po' leggermente infossato, di forma circolare, o più esattamente decagonale, il cui diametro è circa un terzo di quello del guscio, provvisto di profondi intagli branchiali incurvati, ispessiti sul bordo e provvisti di una forte callosità verso la base del lato interno (v. fig. 1); è molto

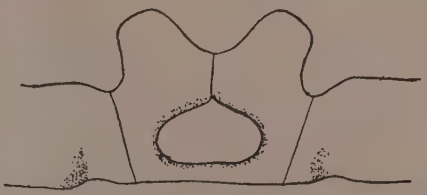


Fig. 1 - Dettaglio molto ingrandito della cintura perignatica.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Paleontologia della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 7 luglio 1934.

(3) G. CHECCHIA-RISPOLI, *Illustrazione di alcuni Echinidi del Maestrictiano della Tripolitania raccolti da Ignazio Sanfilippo*, in «Mem. Soc. Geol. Ital.», vol. I, p. 8, tav. I, fig. 5-15, 1931.

alta, fortemente ispessita ed alquanto inclinata verso l'interno del guscio. Le auricole sono un poco più elevate delle apofisi ed anch'esse leggermente inclinate in dentro; le orecchiette si chiudono ad arco, e le estremità formano, come si vede nella figura, due lobi allontanati dalla linea mediana. Il foro auricolare piuttosto grande, è ovale trasverso, leggermente appuntito in alto.

Apparato masticatorio. – Questo è molto sviluppato, alto quasi quanto l'altezza del guscio; le due epifisi si congiungono fra loro nel piano mediano della piramide, formando un arco epifisario che separa la grande *finestra esterna* (*foramen magnum*) da una stretta *finestra basilare*. I denti sono in posto e mostrano un altissima carena che si vede sporgere dalla commissura mediana, mentre la parte dorsale è stretta.

Per poterli meglio osservare ho eseguito una sezione sottile trasversale di una delle piramidi e precisamente verso la metà della sua altezza: in sezione si distingue nettamente la forma del dente, che mostra un dorso angoloso ed appiattito sulla linea longitudinale, una carena alta a sezione conica terminante a punta schiacciata. Abbiamo dunque un tipo di mascella ad epifisi saldate (v. fig. 2) ed a dente carenato (fig. 3).

Fig. 2. – Una piramide molto ingrandita.

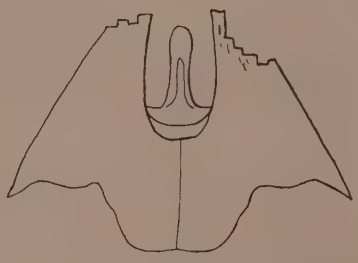


Fig. 3. – Sezione trasversa della stessa con il dente in posto, molto ingr.

Non credo siano stati descritti fino ad oggi apparecchi masticatori di *Orthopsis* ed è stata una vera fortuna poter ritrovare fra gli esemplari raccolti dal comm. Sanfilippo, uno che mostrasse al completo anche i caratteri interni.

Come è noto, sin dal 1904 il Mortensen [1] mise in evidenza che la conformazione dei denti, carenati o non carenati, fornisce un ottimo carattere per la classificazione degli Echinidi, e stabilì che le famiglie dei Regolari potevano raggrupparsi conformemeute a questo carattere ed a quelli della

(1) Th. Mortensen, *Echinoidea of the Danish Expedition to Siam* in « Mém. Acad. R. de Copenhague », 7e sér., 1904.

struttura degli ambulacri e dei tubercoli. Successivamente lo Jackson [1] è riuscito a dimostrare che per la sistematica di questi organismi potevano essere dedotti argomenti di primo ordine dalla costituzione dell'apparato dentario o masticatorio e più precisamente dalla stessa lanterna e dalle epifisi, a secondo che queste, in ciascuna piramide, si congiungono nella parte superiore per formare il grande forame, oppure rimangono disgiunte, lasciando il forame aperto; combinando i caratteri dei denti e quelli delle epifisi lo Jackson ottiene per gli Echinidi regolari, esclusi i Cidaridi e gli Echinoturidi, i seguenti gruppi:

Aulodonta, con denti scanalati e forame aperto;
Stirodonta, con denti carenati e forame aperto;
Camarodonta, con denti carenati e forame chiuso.

La classificazione delle forme viventi nei tre gruppi, a cui è dato il valore di ordini, porta a degli aggruppamenti veramente naturali in accordo completo con le reali parentele fra questi organismi. Recentemente il Mortensen ha visto la necessità di estendere tali ricerche anche alle forme fossili, allo scopo di fissare il loro giusto posto nel sistema e quindi le loro relazioni con le forme recenti. Si comprende facilmente come ci sia ancora tutto da fare a questo riguardo. Il Mortensen che sta presentemente elaborando la seconda parte della grandiosa monografia sugli Echinidi, in cui saranno trattati gli Stirodonta, affronta anche il problema di determinare quali delle numerose forme fossili appartengono a quest'ordine e quali dovranno essere ascritte agli altri proposti.

L'apparato masticatorio di *Orthopsis* appartiene per i fatti da noi messi in evidenza al tipo Camarodonta, cioè a quello con i denti carenati ed a forame chiuso.

Recentemente il prof. Gygnoux [2], in un suo importante lavoro, ha raggruppati i Glyfostomi nei tre ordini proposti dallo Jackson, includendo in essi un certo numero di generi fossili. Per questi ultimi egli, naturalmente, non ha potuto eseguire ricerche particolari e si è basato sulla conformazione della lanterna presso i rappresentanti tuttora viventi delle famiglie ed in mancanza di questi (nel caso di estinzione) sulla struttura dei generi attuali delle famiglie più vicine.

Orthopsis viene collocato con tutti i Pedinidi fra gli Aulodonta insieme con i generi viventi Lissodiadema, Chaetodiadema, Micropyga ecc. Ma ciò non è più ammissibile ora che si ha la precisa conoscenza della conformazione dell'apparato masticatorio di detto genere estinto.

Un caso analogo al nostro è quello studiato dal Mortensen [3] per *Pseudodiadema pseudiadema* Lamarck del Giurassico, che in base allo studio della

(1) Jackson, *Phylogeny of the Echini* in « Mém. Boston Soc. Nat. Hystory », VII, 1919.
(2) Gygnoux M., *Les Oursins réguliers fossiles. Evolution et classification.* Grénoble, 1933.
(3) Th. Mortensen, *Sur les affinités de « Pseudodiadema » et de quelques autres Échinides fossiles* in « Bull. Soc. Géol. de France » 5e sér., to. II, p. 431 à 440, 1932.

sua lanterna va collocato fra gli Stirodonta, mentre prima era classificato fra gli Aulodonta.

Questi singoli casi mostrano la necessità di estendere simili ricerche a tutti i generi fossili. Ma non è da illudersi che ciò possa essere fatto rapidamente per causa della scarsezza del materiale di cui si può disporre. Per altro i pochi casi finora constatati consigliano ad andare molto guardinghi prima di inquadrare le forme fossili nella classificazione proposta per le viventi.

La presente nota si deve intendere solamente come un contributo alla conoscenza dell'apparato masticatorio di un importante genere estinto.

Biologia. — *La partenogenesi sperimentale dell'uovo di Lampreda. Analisi citologica dell'attivazione semplice* [1]. Nota [2] di G. MONTALENTI, presentata dal Corrisp. F. RAFFAELE.

In un precedente lavoro [3] ho dato notizia dei risultati ottenuti sottoponendo le uova di Lampreda (*Lampetra* [*Petromyzon*] *fluviatilis* L.) alla azione di stimoli di natura chimica, capaci di provocarne lo sviluppo partenogenetico. Ho indicato come mezzo migliore per ottenere l'attivazione l'esposizione ai vapori di cloroformio per 45-60″; le uova riportate in acqua dopo tale trattamento reagiscono quasi tutte in modo che ripete perfettamente i fenomeni che avvengono in seguito all'entrata dello spermio nella fecondazione normale. « Lasciando a sè le uova così attivate, in acqua di fonte, compaiono talvolta, dopo un certo tempo, solchi irregolari e poco profondi destinati a scomparire e talora a riformarsi. La percentuale delle uova che li mostrano non è però molto alta, la massima parte rimangono esternamente immobili. La citolisi sopravviene abbastanza presto, quando ancora le uova vergini di controllo non sono alterate, almeno apparentemente ». Questi fenomeni mi fecero ritenere probabile che, analogamente a quanto avviene nelle uova degli Echinodermi e degli Anfibî, la semplice attivazione inizi un ciclo di monaster centrato sul pronucleo femminile.

L'analisi citologica ha confermato questa supposizione e mi ha dato modo di seguire nelle uova semplicemente attivate i movimenti del pronucleo femminile e del cosiddetto « plasma polare », che intendo descrivere brevemente in questa Nota.

È necessario, per comprendere i fenomeni intimi che avvengono nelle uova partenogenetiche, riassumere brevemente il corso degli eventi che seguono

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 26 giugno 1934.

(3) G. MONTALENTI, *Sviluppo partenogenetico di uova di Lampreda sottoposte all'azione di agenti chimici*, « Arch. zool. ital. », XVII, 1932, pp. 339-363.

la fecondazione, e che, nella lampreda, hanno aspetti particolarmente interessanti.

Il primo accenno dell'avvenuta fecondazione è il distaccarsi dell'uovo dalla membrana, nella regione del polo animale, con la formazione di una fossetta apicale. Il distacco procede poi gradualmente verso il polo vegetativo, manifestandosi come un'onda di contrazione, che in circa 5′ percorre il suo cammino dall'uno all'altro polo. Al polo animale frattanto compare una goccia di plasma ialino, che a mano a mano si fa più sporgente e tonda, poi regredisce, riassorbita dall'uovo. Quando l'onda di contrazione ha finito il suo percorso, anche la goccia ialina ha per lo più terminato il suo ciclo. Questo è quanto si può osservare in vivo: poi l'uovo si orienta con il polo animale in alto, si può assistere alla emissione del secondo globulo polare, indi, dopo circa sei ore (a temperatura ambiente di 18-20°) compare il primo solco.

In sezione si può seguire il movimento di quel plasma ialino e privo di granuli di tuorlo, chiamato anche plasma polare dal Böhm, che, riassorbito dall'uovo, rimane per breve tempo a contatto con la superficie, si approfonda poi, mentre lo spermio che in esso è penetrato, va gonfiandosi e trasformandosi in pronucleo maschile. Allontanatosi dalla superficie, il plasma polare emette un prolungamento, quasi uno pseudopodo, in direzione del pronucleo femminile, il quale ha già emesso, nel frattempo, il secondo globulo polare e si trova ancora (circondato da scarsissimo plasma privo di tuorlo) in superficie e un poco discosto dal punto d'entrata dello spermio, che è quello ove geme la goccia del plasma polare. Raggiunto da quel diverticolo di plasma polare, il pronucleo femminile discende lungo la via che gli è offerta e raggiunge il pronucleo maschile, che sta presso a poco al centro della massa principale del plasma ialino. I due pronuclei, che subiscono le modificazioni consuete, qui perdono le membrane, e si fondono, mentre lo pseudopodo plasmatico viene ritirato, e si risolvono in cromosomi, che si centrano poi sulla prima mitosi. Come si vede i movimenti del plasma sono quanto mai caratteristici e coordinati in una successione ben definita.

Nelle uova attivate al cloroformio i fenomeni descritti si ripetono soltanto fino a un certo punto. Il plasma polare viene spremuto fuor dell'uovo in una goccia ialina, e poi riassorbito come di norma, ma è, naturalmente, privo dello spermio. Si approfonda tuttavia, come nell'uovo fecondato, e si distacca dalla zona corticale, più o meno completamente; non manda alcun prolungamento verso il pronucleo femminile, ma rimane immobile, o forse si muove verso altre direzioni. Il nucleo femminile, dal canto suo, liberatosi già del primo globulo polare emette, dopo l'attivazione, anche il secondo, come avviene nell'uovo fecondato. Rimane poi per un certo tempo in superficie, indi inizia la sua migrazione verso il centro dell'uovo. Non guidato dal diverticolo di plasma polare, si approfonda fra i granuli di

tuorlo e giunge generalmente fin sotto o vicino alla masserella del plasma polare, senza entrarvi. Là si compie la sua evoluzione partenogenetica: il pronucleo perde la membrana, si risolve in cromosomi e inizia così una mitosi monocentrica, i raggi del cui aster sono per lo più poco visibili. Finito il primo ciclo mitotico ne inizia un secondo e poi forse un terzo, se prima non avviene la citolisi.

Si conclude da queste osservazioni, che soltanto nell'uovo normalmente fecondato, o nell'uovo attivato e poi trattato con soluzioni saline ipertoniche, i movimenti del plasma polare hanno per risultato di accogliere il pronucleo femminile e di portarlo ad iniziare una mitosi dicentrica, nel centro di attività dell'uovo. Il pronucleo femminile, d'altra parte, è capace di migrare da solo in profondità, e, come nell'uovo di rana e degli Echinodermi, d'iniziare un ciclo di mitosi monocentriche.

Con il metodo usato per indurre le uova di lampreda a svilupparsi partenogeneticamente si possono dunque separare due momenti del processo: il primo, l'attivazione, ha come conseguenza alcuni movimenti del plasma polare, l'emissione del secondo polocito e la migrazione del pronucleo femminile in profondità. Il successivo trattamento con soluzioni ipertoniche, verisimilmente, ha le stesse conseguenze che nella fecondazione ha l'entrata dello spermio, il quale, forse per effetto della formazione dell'aster, provoca l'emissione di una guida plasmatica che accoglie il pronucleo femminile e rende possibile l'insorgenza di una mitosi dicentrica.

Biologia (Morfologia sperimentale). — *Processi di "ripresa" e loro limiti nelle esperienze di centrifugazione nella ninfosi degli insetti* [1]. Nota [2] di C. GUARESCHI presentata dal Socio F. SILVESTRI.

In una Nota precedente [3] riferivo sui risultati ottenuti centrifugando, a velocità varie e per tempi pure vari, delle ninfe di *Lina populi*, risultati che si possono brevemente riunire in tre gruppi, che rappresentano tre gradi del medesimo fenomeno:

I) Ritardo nello sviluppo, con malformazioni di lieve entità sulle elitre e sulle ali.

II) Metamorfosi della parte anteriore (testa e torace) mentre l'addome rimane di aspetto ninfale. In questi casi le elitre e le ali sono di consistenza e colore normali, di grandezza, posizione e forma ninfali. Il controllo istologico dimostra la presenza di masse adipose ninfali limitate

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Anatomia ed Embriologia comparate della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 12 luglio 1934.

(3) Questi «Rendiconti», vol. XIX, ser. 6ª, fasc. 9, 1934.

all'addome (e più o meno abbondanti nei vari casi) o, almeno, molto più frequenti e compatte nella parte posteriore che non nell'anteriore.

III) Mancato sfarfallamento dopo un periodo di ninfosi doppio del normale. In tali casi il controllo istologico dimostra che i processi istogenetici propri della ninfosi si sono arrestati o quasi.

Desidero ora riassumere un secondo gruppo di esperienze, già impostato allora ed eseguito quest'anno, con cui indago più profondamente alcuni punti del problema e, più precisamente, rispondo ai due seguenti quesiti:

a) Le malformazioni descritte nei primi due gruppi di risultati si correggono e si regolano successivamente? In altre parole, i processi della metamorfosi (le malformazioni possono essere considerate come arresti o rallentamenti della metamorfosi di alcune zone) possono proseguire anche dopo lo sfarfallamento?

b) L'arresto della metamorfosi è temporaneo o persistente?

Per rispondere alla prima domanda basterà descriva brevemente due dei casi ottenuti.

Lina populi CV.

Centrifugata 36^h dopo il desquamamento della spoglia larvale, dalla coda alla testa per 5' a 2000 giri.

Sfarfallata dopo 6 giorni di ninfosi.

Fissata dopo altri 3 giorni perchè morta.

Descrizione interna. — Tipicamente emisviluppata; testa e torace ben sviluppati, addome inguainato nella spoglia ninfale, bianco e di aspetto ninfale. Elitra sinistra di colore e consistenza dell'adulto, di grandezza e posizione ninfale; elitra destra gonfia e ripiena di liquido. Ali piccole, malformate prive delle ripiegature.

Nei giorni seguenti allo sfarfallamento l'animale sembra progredire nello sviluppo; l'addome si imbrunisce lentamente e parzialmente; l'elitra destra si sgonfia e diviene simile all'altra. La *Lina* però non mangia ed al terzo giorno muore.

Controllo istologico. — Nel torace e nella testa l'istogenesi è completa; nell'addome vi sono ancora masse adipose ninfali, ma piccole, scarse e frammentarie. L'istogenesi è bene avanzata.

Dalle condizioni in cui si trovava l'animale appena sfarfallato si deve ammettere con certezza che l'istogenesi è progredita dopo lo sfarfallamento.

Lina populi CXVI.

Centrifugata 36^h dopo il desquamamento dalla spoglia larvale, dalla testa alla coda per 5' a 2000 giri.

Sfarfallata dopo 7 giorni di ninfosi.

Nutrita.

Fissata 18 giorni dopo lo sfarfallamento.

Descrizione esterna. — L'apice delle elitre, e particolarmente di quella destra, è storto e malformato: le ali sporgono.

Controllo istologico. — Istogenesi completa e normale.

Anche in questo caso l'animale, che è sfarfallato, se pur non eccessivamente, ma certamente un po' anormale, conteneva senza dubbio (l'esame di tutti i casi simili, fissati appena sfarfallati, e che ho citati nella comunicazione precedente lo dimostra) delle masse adipose ninfali e dei tessuti non ancora istogeneticamente completi. Nei 18 giorni in cui è vissuto dopo lo sfarfallamento, i processi istogenetici si sono compiuti.

Questi due casi ed altri simili mi permettono dunque di rispondere affermativamente al primo quesito: *i processi istogenetici, quando, per qualche ragione, vengono rallentati od ostacolati durante il periodo della ninfosi, possono proseguire anche dopo lo sfarfallamento.* Naturalmente le malformazioni e le imperfezioni che interessano le parti chitinose, e che, quindi, si fissano con l'indurimento di queste, non possono più venir corrette. Così pure se le imperfezioni e le mancanze di sviluppo degli organi interni sono molto gravi, non ostante il proseguire dei processi istogenetici, l'animale, non potendo nutrirsi, muore prima che essi siano completamente compiuti.

La seconda questione è stata affrontata con l'osservazione prolungata delle ninfe più fortemente colpite e che non mi avevano mostrato, lo scorso anno, alcuno sfarfallamento dopo un periodo di ninfosi doppio del normale.

Dopo un periodo lunghissimo, che ha raggiunto il quadruplo del normale, gli esemplari centrifugati con una velocità di 3000 giri al minuto per 10' muoiono e si seccano. Il controllo istologico dimostra che essi, se pure in qualche caso hanno un po' proseguito nello sviluppo (ed in questi casi sempre più nella parte anteriore del corpo che non nell'addome, il che conferma ancora una volta l'esistenza delle due zone di diversa suscettibilità da me ammessa nella nota precedente), sono sempre ancora molto lontani dalle condizioni normali di sfarfallamento. In alcuni casi poi, che possiamo naturalmente considerare come i casi di maggiore alterazione, più che di un rallentamento si può parlare di un vero e proprio arresto di sviluppo!

Tutte queste esperienze ci portano ad una logica conclusione: la forza centrifuga agisce sugli insetti in ninfosi come una turba dei processi della metamorfosi, che tende ad arrestarli o a ritardarli, secondo l'intensità e la durata della forza stessa e la resistenza costituzionale dei vari esemplari. Tali processi, sempre secondo il grado in cui sono stati colpiti, possono proseguire in qualsiasi momento, e giungere anche a manifestarsi fin dopo lo sfarfallamento.

Considerata in tal modo la questione, come ben si capisce, io tendo ad ammettere, non una azione specifica della centrifugazione, ma una azione generale di turbamento dei processi della metamorfosi. Tutto mi lascia ritenere che anche altre cause potranno produrre gli stessi effetti: è quanto spero di poter dimostrare con prossime esperienze.

Botanica (Fisiologia vegetale). — *Azione di alcuni sali sulla germinazione di embrioni di grano staccati dalla cariosside* [1]. Nota [2] di GIUSEPPINA DRAGONE-TESTI, presentata dal Corrisp. E. CARANO.

In una Nota precedente [3] ho dato ragguaglio di alcune esperienze eseguite sulla germinazione di embrioni di grano separati con cura degli abbondanti tessuti di riserva dell'albume. In essa notavo che se gli embrioni venivano allevati sperimentalmente in soluzioni di sali che contenevano anche alcuni zuccheri, mono- e disaccaridi, come glucosio e saccarosio, germinavano, si accrescevano, inverdivano alla luce e, trapiantati in terra, attecchivano, continuando il loro sviluppo. Aggiungevo inoltre, che se invece erano posti su substrati contenenti solo Knop, essi, pur formando alla luce clorofilla, e pur emettendo appena l'estremo apice delle radichette, riuscivano ad accrescersi solo sino ad un certo limite, oltre il quale lentamente si decoloravano, divenivano flaccidi, e finivano col morire. L'esame microscopico, eseguito in quest'ultimo stadio, mostrava evidenti segni di autolisi. Concludevo allora, che, malgrado la formazione della clorofilla, i fenomeni fotosintetici dovevano essere stati meno intensi di quelli respiratorî e che conseguentemente la piantina non era stata capace di provvedere coi propri mezzi a costruire quella quantità di idrati di carbonio necessaria a superare i primi stadi di sviluppo.

Allo scopo di assicurarmi di questa conclusione ho pensato di aggiungere in dosi piccolissime alle soluzioni alcuni sali che avrebbero potuto esercitare essenzialmente la loro azione non come materiali plastici, ma come stimolanti.

I substrati furono preparati, come nell'esperienza precedente, sciogliendo a bagnomaria gr. 1.5 di agar, lavato a lungo con acqua corrente, in 100 cc. di soluzione salina completa di Knop, alla quale erano stati o no aggiunti, in misura equivalente ad una soluzione N/500, i sali seguenti:

1) borace;
2) solfato di rame;
3) nitrato di cobalto;
4) solfato di nichelio;

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto Botanico di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 7 luglio 1934.

(3) G. DRAGONE-TESTI, *Germinazione di embrioni di grano fuori della cariosside.* «Rend. R. Acc. Naz. Lincei», ser. 6ª, vol. XIX, fasc. 9, 1934.

5) solfato di manganese;
6) nitrato di uranile;
7) solfato di zinco.

In alcune esperienze, inoltre, le soluzioni furono fatte con acqua distillata, ed in altre con acqua di fonte. Quest'ultima pur prestandosi meglio in questa sorta di esperienze, per la presenza di aria e di anidride carbonica, provoca la precipitazione di alcuni degli elementi dei sali aggiunti nella soluzione. Ho cercato di ridurre al minimo l'inconveniente derivante da questa causa, agitando continuamente durante la preparazione delle soluzioni di agar, allo scopo di impedire il depositarsi del precipitato sul fondo del recipiente, dove sarebbe rimasto inattivo, e di farlo rimanere, per quanto possibile, sospeso uniformemente nella massa.

Alcuni sali, come dirò in seguito, esplicarono diversamente la loro influenza sulle piantine, secondo che la loro soluzione era in acqua distillata o di fonte.

Sulle singole piastre contenute in capsule Petri, sterilizzate in stufa a 100°, furono seminati dieci embrioni distaccati con cura dall'albume, come nelle esperienze di cui ho già riferito. Le colture vennero esposte a luce solare diretta all'aperto nel mese di aprile e maggio, e a luce diffusa in giugno, per il naturale elevarsi eccessivo della temperatura a luce solare diretta.

La prima esperienza fu eseguita con soluzioni preparate con acqua distillata ed ebbe inizio il 16 aprile. Essa constò di due serie di substrati perfettamente identici, di cui una fu esposta all'inizio dell'esperienza, dopo la semina degli embrioni, all'irradiazione con raggi ultravioletti totali, ottenuti con lampada Hanau per la durata di mezz'ora sotto un angolo di 45° alla distanza di 50 cm. dalla sorgente luminosa. Le capsuline, come ho già accennato, furono poi esposte a luce solare diretta all'aria aperta.

Dirò subito che l'azione specifica dei singoli sali, lungi dall'essere stimolata dall'esposizione ai raggi ultravioletti fu, se non totalmente impedita, alquanto inibita, come ho verificato analizzando di confronto i caratteri delle piantine delle due serie perfettamente parallele.

Le osservazioni furono ripetute ogni ventiquattro ore, nei primi quindici giorni, ed ogni due giorni in seguito.

Dopo ventiquattro ore dall'inizio dell'esperienza, si notava che alcuni degli embrioni che avevano borace nella soluzione, accennavano ad inverdire, ma soltanto nella serie non irradiata.

Quarantotto ore dopo cominciava l'inverdimento di tutti gli altri posti su tutti i substrati, fatta eccezione per quelli che risentivano l'azione del solfato di nichelio e di rame. Tra tutti i sali aggiunti il borace, il nitrato di uranile e il solfato di zinco avevano provocato un inverdimento più intenso delle piantine; essi, e specialmente il solfato di zinco, avevano stimolato anche l'emissione di radichette, che non erano invece ancora apparse

nelle piantine di controllo, che si andavano sviluppando dagli embrioni messi sulla piastra preparata con sola soluzione di Knop.

Il solfato di nichelio che aveva esercitato un'azione negativa sull'inverdimento, stimolò in modo manifesto l'emissione delle radichette.

Riguardo all'accrescimento le piantine allevate in presenza di borace, e di solfato di zinco si andavano accrescendo più rapidamente delle altre, che rimanevano presso a poco delle stesse dimensioni di quelle di controllo. Aggiungo ancora che gli embrioni posti sulle piastre contenenti solfato di rame cominciavano ad assumere un color bruno–verdiccio, che lasciava sospettare l'accumulo nell'interno di essi di composti di questo elemento. Dopo quarantotto ore, dunque, si iniziava nei singoli embrioni l'azione specifica dei diversi sali aggiunti.

Nei giorni successivi questi fenomeni continuarono ad accentuarsi; permase lo stato di inverdimento più intenso nelle piantine allevate in presenza di borace, di nitrato di uranile e di solfato di zinco, ed un corrispondente sviluppo maggiore di esse; specialmente queste ultime mostravano una tendenza maggiore ad accrescersi e ad emettere radici tanto da lasciar sperare, in un primo tempo, alla possibilità di raggiungere, sebbene più lentamente, lo sviluppo ottenuto nelle altre serie in presenza di carboidrati.

Questi fenomeni si mantennero inalterati nei giorni successivi, finchè una settimana dopo l'inizio dell'esperienza la metà degli embrioni in solo Knop cominciava già a decolorarsi, come era avvenuto già negli altri casi precedenti; due di essi lasciavano scorgere già l'estremo apice della radichetta primaria fuoruscita appena dalla coleoriza.

Dieci giorni dopo in solo Knop, oltre i due embrioni precedenti, un altro aveva emesso le radici laterali, mentre in nitrato di uranile quattro ne presentavano la primaria e cinque le laterali ed in solfato di zinco tre avevano la primaria e sette le laterali.

Dopo due settimane in qualche piantina cresciuta sulla piastra contenente borace la prima fogliolina spuntava attraverso il coleoptile accresciuto. Pure nella coltura corrispondente della serie irradiata due embrioni accresciuti alquanto ed inverditi avevano emessa la prima fogliolina. In seguito però lentamente anche le piantine che si erano accresciute di più nei substrati nei quali aveva aggiunto i sali sopra indicati, tendevano a decolorarsi completamente, anzi ciò, nelle singole colture, si rivelava prima negli embrioni che si erano accresciuti con maggiore rapidità degli altri. Alla fine dell'esperienza tutti gli embrioni erano completamente decolorati. Essi poi inflaccidirono e finirono col morire. Ciò era avvenuto in tutti indistintamente un mese e mezzo dall'inizio dell'esperienza.

In linea generale l'andamento di prove identiche impiantate nel mese di giugno confermò il risultato di quella precedentemente descritta. Soltanto l'inverdimento degli embrioni in Knop non si verificò affatto, e quello degli embrioni delle altre colture fu meno intenso che non nella serie precedente.

Ciò poteva forse essere attribuito all'epoca ormai meno adatta a questo genere di lavori. Si ripeterono però gli stessi fenomeni stimolativi dell'inverdimento, dell'accrescimento, dell'emissione di radici nelle piantine poste sui substrati contenenti borace, nitrato di uranile e solfato di zinco. Anche in queste esperienze gli embrioni coltivati in presenza di solfato di nichelio rimasero perfettamente bianchi ed emisero delle brevi radichette con evidente geotropismo positivo, e quelli delle altre culture inverditi mostrarono in seguito, come sempre, la tendenza a decolorarsi.

Alquanto diversi furono i risultati ottenuti preparando le soluzioni con acqua di fonte.

Il solfato di manganese, che nelle esperienze precedenti aveva determinato lievi fenomeni di eccitamento, in queste si mostrò decisamente sfavorevole; gli embrioni presentarono una colorazione bruna, simile a quella caratteristica dei composti manganici, specialmente nelle regioni a contatto con le piastre; di queste ultime la porzione più prossima alle piantine diveniva più intensamente bruna, probabilmente per l'avvenuta ossidazione dei composti manganosi.

Diversa fu anche l'azione del solfato di rame: negli embrioni non si determinò arresto di sviluppo, nè accumulo di composti di rame, come nelle soluzioni corrispondenti fatte con acqua distillata; gli embrioni delle colture contenenti solfato di rame nella serie con acqua di fonte inverdirono normalmente, mentre quelli in solo Knop della stessa non inverdirono affatto, si accrebbero più di questi ultimi fino a determinare la fuoruscita della prima fogliolina dal brevissimo coleoptile.

Anche il solfato di nichelio non inibì la formazione della clorofilla. I risultati migliori si ottennero sempre con l'aggiunta di solfato di zinco, per la quale si verificarono inverdimento, migliore accrescimento ed emissione di un maggior numero di brevi radichette primarie e laterali. I sali di uranio in questa esperienza invece non produssero buoni risultati.

Una diecina di giorni dall'inizio delle prove però anche in questo caso pure gli embrioni più accresciuti cominciarono a decolorarsi più o meno rapidamente. Il solfato di zinco, benchè non impedisse alle piantine di subire la stessa sorte delle altre fu quello che determinò stimolazione maggiore. Esperienze successive confermarono questi risultati.

Da quanto ho precedentemente esposto posso concludere che i vari sali aggiunti alla soluzione completa di Knop in quantità equivalenti (soluzione N/500) esercitano sulla germinazione degli embrioni staccati dalla cariosside un'azione specifica talora diversa, secondo che la soluzione fu preparata con acqua distillata o di fonte.

Il solfato di nichelio, che soltanto in acqua distillata mostrò di inibire la formazione della clorofilla, eccitò sempre la formazione di radichette. Il solfato di rame che in acqua distillata causò in generale arresto di sviluppo

e di produzione di clorofilla, nonchè dannosi fenomeni di accumulo di composti di rame, in acqua di fonte al contrario determinò lievi fenomeni di stimolo nell'inverdimento e nell'accrescimento della piantina. Viceversa il solfato di manganese esercitò debole azione stimolante se aggiunto nelle soluzioni con acqua distillata, e nulla o addirittura negativa in quelle con acqua di fonte. In quest'ultimo caso negli embrioni si accumularono dei composti bruni.

Leggera azione eccitante produsse in tutti i casi il nitrato di cobalto. Anche il nitrato di uranile non fu in acqua di fonte altrettanto benefico come in acqua distillata.

I risultati migliori furono ottenuti per aggiunta di borace e più ancora di solfato di zinco, nel qual caso l'inverdimento e l'accrescimento furono più rapidi e la produzione di radichette fu più numerosa. In presenza di quest'ultimo composto lo sviluppo massimo che raggiunse la piantina fu di 8 mm., di cui 3 spettanti alla radichetta primaria e 5 al germoglio. Nessuno però dei sali aggiunti, almeno nelle condizioni sperimentali esposte e nella stagione indicata, determinò uno sviluppo ulteriore delle piantine, le quali, anche in queste condizioni, si decolorarono più o meno lentamente, divennero flaccide e finirono col morire.

Neanche, dunque, mediante l'azione stimolante dei vari elementi catalitici somministrati con la soluzione di Knop agli embrioni di grano asportati dalla cariosside sono riuscita a determinare in essi un impulso tale che permettesse loro di superare le grandi difficoltà di uno sviluppo autonomo nei primi stadi della germinazione.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1934 (Anno XII).

(Ogni Memoria e Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo)

Matematica (Algebra). — *Sopra un teorema fondamentale della teoria delle algebre.* Nota[1] del Corrisp. G. Scorza.

Nella sua classica Memoria *On hypercomplex numbers* lo Wedderburn credette di poter stabilire, generalizzando un teorema del Cartan, che un'algebra, non pseudonulla e non semi-semplice, è, in ogni caso, la somma (in generale, non diretta) di due sotto-algebre, delle quali una è semi-semplice e l'altra è la sotto-algebra eccezionale; ma la sua dimostrazione, assai laboriosa, lasciava l'adito a dubbi non lievi.

Sottoposte più tardi ad un esame più accurato la detta proposizione e la prova relativa, lo Wedderburn riescì a semplificare quest'ultima ed a porla al riparo di ogni obiezione, ma dovette introdurre nell'enunciato di quella un'ipotesi restrittiva; e cioè dovette supporre che in esso si parlasse non già di algebre qualsiansi, ma di algebre definite in corpi numerici a sottocorpo fondamentale infinito (indi isomorfo al corpo razionale)[2].

In tal forma appunto si trova presentato il teorema nel libro del Dickson *Algebras and their arithmetics*, ove apparve per la prima volta la nuova dimostrazione dello Wedderburn.

Ma in realtà, il teorema è vero anche per le algebre nei corpi finiti; esso non può cadere in difetto che per algebre in corpi infiniti, ma a sottocorpo fondamentale finito.

(1) Pervenuta all'Accademia il 7 agosto 1934.

(2) Per questa nozione vedi G. Scorza, *Corpi numerici e algebre* (Messina, Principato, 1921), p. 19 e sgg.; volume che in tutto il seguito sarà indicato con la sigla *C. N. A.*

È quanto si vuol stabilire in questa Nota, nella quale vengono anche dedotte alcune conseguenze del teorema in discorso, che non sembra siano state mai osservate e che, per quanto semplici, non paiono prive di interesse.

1. Premettiamo la seguente osservazione:

Se u è un automodulo principale dell'algebra A, *un elemento è eccezionale per la sotto–algebra* $u\mathrm{A}u$, *quando, e solo quando, è eccezionale per* A;

asserzione che sarà evidentemente provata non appena sia fatto vedere che, se y è un elemento eccezionale per $u\mathrm{A}u$, esso è tale anche per A. E per questo giova supporre che A sia priva di modulo, indi dotata di sotto–algebra eccezionale, che diremo E, perchè altrimenti il modulo sarebbe u, e, risultando allora $u\mathrm{A}u = \mathrm{A}$, l'enunciato si ridurrebbe ad una tautologia.

Essendo u un automodulo principale di A si può porre (*C. N. A.*, p. 277)

$$\mathrm{A} = u\mathrm{A}u + \mathrm{S} \quad , \quad \text{con } u\mathrm{A}u \wedge \mathrm{S} = 0 \quad \text{ed} \quad \mathrm{S} \leq \mathrm{E};$$

quindi, se x è un elemento qualsiasi di A, sussiste un'eguaglianza (ed una sola) del tipo

$$x = x_1 + s,$$

con x_1 in $u\mathrm{A}u$ ed s in S, indi in E.

Data l'invarianza di E in A, risultano contenuti in E, al pari di s, tutti i prodotti che contengono s a fattore, quindi, qualunque sia l'intero positivo h è

$$(xy)^h = (x_1 y + sy)^h = (x_1 y)^h + \varepsilon_h,$$

con e_h elemento conveniente di E. In virtù dell'ipotesi fatta su $y, x_1 y$ è, al pari di y, contenuto nella sotto–algebra eccezionale di $u\mathrm{A}u$, quindi per h abbastanza elevato, è $(x_1 y)^h = 0$, ossia $(xy)^h = e_h$. Intanto e_h è nullo o pseudonullo, quindi è tale anche xy; e poichè x è un qualsiasi elemento di A, ciò significa che y è eccezionale per A.

2. *Se* A *è un'algebra, di ordine n, in un corpo finito* Γ, *dotata di un unico automodulo u, si può porre* $\mathrm{A} = \mathrm{P} + \mathrm{E}$, *dove* P *è un'algebra primitiva ed* E, *o è zero, o è la sotto–algebra eccezionale di* A.

Poichè u è l'unico automodulo di A, esso è primitivo e principale; quindi $u\mathrm{A}u$ non contiene automoduli diversi dal suo modulo u ed è

$$\mathrm{A} = u\mathrm{A}u + \mathrm{S},$$

dove S o è zero, o è contenuto nella sotto–algebra eccezionale di A.

Segue, per il lemma precedente, che il teorema sarà stabilito per A quando sia stato dimostrato per $u\mathrm{A}u$; dunque non si vien meno alla generalità se, come appunto vogliamo fare, si suppone che u sia addirittura il modulo di A.

In un'algebra dotata di modulo, ma priva di automoduli diversi dal modulo, ogni eventuale divisore dello zero è addirittura un elemento eccezionale (*C. N. A.*, p. 264); quindi A o è primitiva, o è dotata di sotto-algebra eccezionale. Scartato il primo caso, nel quale il teorema è evidente, supponiamo che si verifichi il secondo, e sia E la sotto–algebra eccezionale di A.

Indichiamo con $[x]$ la classe modulo E individuata da un elemento di A che sia stato denotato con x; di guisa che $[x]$ descriverà l'algebra A — E, complementare di E rispetto ad A, allorchè x descrive A.

L'algebra A — E è primitiva (*C. N. A.*, p. 284) e il suo modulo è $[u]$; inoltre il corpo Γ è finito, dunque, se il suo ordine è ν, per un bel teorema dello Wedderburn (*C. N. A.*, p. 450 e sgg.), essa è isomorfa ad un corpo algebrico dedotto da Γ mediante un polinomio $\varphi(\xi)$ di grado ν, irriducibile in Γ. Segue che A — E ammette elementi con l'equazione minima $\varphi(\xi) = 0$, e se $[y]$ è uno di essi, posto

$$\varphi(\xi) = \xi^{\nu} + \alpha_1 \xi^{\nu-1} + \cdots + \alpha_{\nu-1} \xi + \alpha_{\nu},$$

si avrà

$$[y]^{\nu} + \alpha_1 [y]^{\nu-1} + \cdots + \alpha_{\nu-1} [y] + \alpha_{\nu} [u] = [0],$$

cioè

$$y^{\nu} + \alpha_1 y^{\nu-1} + \cdots + \alpha_{\nu-1} y + \alpha_{\nu} u = e', \tag{1}$$

con e' elemento di E.

Poichè $\varphi(\xi)$ è irriducibile in Γ, la sua derivata $\varphi'(\xi)$ non è certo nulla (*C. N. A.*, p. 163); d'altronde $\varphi(\xi) = 0$ è l'equazione minima di $[y]$ in A — E, dunque è $[\varphi'(y)] = \varphi'([y]) \neq [0]$, cioè $\varphi'(y)$ è un elemento di A esterno ad E, indi dotato di inverso. Ebbene poniamo

$$e'' = -e' \{\varphi'(y)\}^{-1}, \tag{2}$$

di guisa che e'' sarà, al pari di e', un elemento di E.

La (1) e (2) mostrano che e' ed e'' appartengono alla sotto–algebra potenziale di A generata da y, e questa è commutativa; dunque e' ed e'' sono permutabili con y e $\{\varphi'(y)\}^{-1}$.

Ciò premesso, pongasi

$$z = y + e'',$$

di guisa che z sarà come y un elemento della classe $[y]$.

Per ogni intero positivo $k > 1$ si avrà, indicando con c_k un conveniente elemento di A,

$$z^k = y^k + k y^{k-1} e'' + c_k e''^2;$$

quindi sarà

$$\varphi(z) = \varphi(y) + \varphi'(y) e'' + c e''^2,$$

con c elemento di A. Ma

$$\varphi(y) + \varphi'(y)\, e'' = e' - e' = 0,$$

dunque resta

$$\varphi(z) = c e''^2, \tag{3}$$

ossia $\varphi(z)$ è un elemento di E^2.

Ora si immagini di ripetere per z il ragionamento che si è fatto per y. Come dall'elemento y della classe $[y]$, per il quale $\varphi(y)$ è in E, si è passati all'elemento z della classe stessa per il quale $\varphi(z)$ è in E^2, così da z si passerà ad un elemento t della classe $[z] = [y]$ per il quale $\varphi(t)$ è in E^4.

Si conclude, ripetendo questa argomentazione un conveniente numero di volte, che esiste certo nella classe $[y]$ un elemento, e sia v, per il quale $\varphi(v)$ riesce un elemento di E^s, con s intero positivo non inferiore all'indice di E. Ma per un tale valore di s è $E^s = 0$, dunque è $\varphi(v) = 0$.

Quest'uguaglianza, attesa l'irriducibilità di $\varphi(\xi)$, mostra che $\varphi(\xi) = 0$ è l'equazione minima di v in A; dunque la sotto-algebra potenziale P di A generata da v è dell'ordine ν. Intanto, essendo $[v] = [y]$, l'equazione minima di $[v]$ in A — E è pure $\varphi(\xi) = 0$, dunque A — E coincide con l'algebra potenziale generata da $[v]$ e qualunque sia l'elemento $[x]$ di A — E sussiste un'eguaglianza ed una sola del tipo

$$[x] = \lambda_1 [v]^{\nu-1} + \lambda_2 [v]^{\nu-2} + \cdots + \lambda_{\nu-1} [v] + \lambda_\nu [u],$$

con le λ numeri di Γ.

Ciò significa che qualunque sia x in A, si ha per x un'eguaglianza ed una sola del tipo

$$x = \lambda_1 v^{\nu-1} + \lambda_2 v^{\nu-2} + \cdots \lambda_{\nu-1} v + \lambda_\nu u + e,$$

con le λ numeri di Γ ed e elemento di E.

Ma al variare delle λ in Γ l'elemento

$$\lambda_1 v^{\nu-1} + \lambda_2 v^{\nu-2} + \cdots + \lambda_{\nu-1} v + \lambda_\nu u$$

descrive l'algebra P primitiva (ed isomorfa ad A — E), dunque è

$$A = P + E$$

e il teorema è dimostrato.

3. Dopo ciò un ragionamento noto, che qui si riporta solo per comodità del lettore e per chiarezza di quanto segue, mostra che:

Se A *è un'algebra in un corpo finito* Γ *essa o è pseudonulla, o è semi-semplice, o è somma di due sotto-algebre delle quali l'una è semi-semplice e dotata di modulo, l'altra è la sotto-algebra eccezionale.*

Suppongasi, infatti, che A non sia nè pseudonulla, nè semi-semplice, indi dotata di sotto-algebra eccezionale (propria) E; e, come è lecito senza

venir meno alla generalità, si supponga che A sia dotata di modulo e che questo sia u.

Infine la *segnatura* (*C. N. A.*, p. 355), di A — E, cioè di A, sia $(p_1, p_2, \cdots, p_m)$.

Se $m = 1$ e $p_1 = 1$, A è a modulo primitivo, indi non ammette automoduli diversi dal modulo e il teorema ora enunciato si riduce a quello del n. 2.

Se $m = 1$ ma $p_1 > 1$, A è il prodotto diretto di un'algebra B a modulo primitivo e di un'algebra regolare C di ordine p_1^2. Ma per il teorema del n. 2 è

$$B = P + E_1,$$

dove P è un'algebra primitiva ed E_1 è la sotto-algebra eccezionale di B; dunque

$$A = B \times C = P \times C + E_1 \times C.$$

Ora $P \times C$ è un'algebra semplice, ed $E_1 \times C$ è la sotto-algebra eccezionale di A, dunque anche in questo caso il teorema è dimostrato.

Se $m > 1$, è

$$A = H_1 \dotplus H_2 \dotplus \cdots \dotplus H_m + S,$$

dove H_j è un'algebra dotata di modulo con la segnatura (p_j), ed $S < E$.

Ma, per quanto or ora è stato detto, è

$$H_j = K_j + E_j$$

dove K_j è semplice ed E_j è zero, o è la sotto-algebra eccezionale di H_j; dunque

$$A = K_1 \dotplus K_2 \dotplus \cdots \dotplus K_m + \sum_j^{1 \cdots m} E_j + S.$$

Ora

$$\sum_j^{1 \cdots m} E_j + S = E,$$

e $K_1 \dotplus K_2 \dotplus \cdots \dotplus K_m$ è un'algebra semi-semplice, quindi il teorema è pienamente dimostrato.

4. Giustifichiamo adesso quanto è stato detto nelle righe introduttive a proposito delle algebre nei corpi infiniti, ma a sotto-corpo fondamentale finito, mostrando che esistono in codesti corpi delle algebre per le quali il teorema del n. 3 cade in difetto.

Sia C [2] il corpo costituito dalle due classi in cui si distribuiscono gli interi relativi rispetto al modulo 2, e sia Γ il corpo derivato da C [2] me-

diante l'aggiunta dell'indeterminata ξ. Detta ζ un'ulteriore indeterminata, nel corpo Γ l'equazione

$$\varphi(\zeta) = \zeta^2 + \xi = 0 \tag{4}$$

sarà irriducibile.

Ciò posto, si consideri in Γ l'algebra potenziale A col modulo u generata da un elemento j con l'equazione minima

$$j^4 + \xi^2 u = 0 \tag{5}$$

Il suo elemento corrente sarà

$$x = \lambda_0 u + \lambda_1 j + \lambda_2 j^2 + \lambda_3 j^3 \tag{6}$$

con le λ numeri di Γ, cioè frazioni algebriche con l'indeterminata ξ nel corpo $C[2]$.

La (5), badando che *in* Γ è $2 = 0$, può scriversi

$$(j^2 + \xi u)^2 = 0 \tag{7}$$

e dunque, se poniamo

$$\omega = j^2 + \xi u\,, \tag{8}$$

è $\omega^2 = 0$ ed ω è un elemento (pseudonullo, indi attesa la commutabilità di A) eccezionale. Allora anche

$$j\omega = j^3 + \xi j \tag{9}$$

è eccezionale, con $(j\omega)^2 = 0$; e avvertasi che ω e $j\omega$ sono indipendenti, perchè altrimenti l'equazione minima di j non sarebbe del 4° grado.

Poichè *in* Γ è $2\lambda_2 \xi u = 2\lambda_3 \xi j = 0$, l'elemento x può scriversi

$$x = (\lambda_0 + \lambda_2 \xi) u + (\lambda_1 + \lambda_3 \xi) j + \lambda_2 \omega + \lambda_3 j\omega. \tag{10}$$

Detta E la sotto-algebra eccezionale e indicata con $[x]$ la classe mod. E individuata da x, la (10) dà

$$[x] = (\lambda_0 + \lambda_2 \xi)[u] + (\lambda_1 + \lambda_3 \xi)[j].$$

Ma per la (8)

$$[j]^2 + \xi[u] = [0],$$

e la (4) è irriducibile in Γ; dunque $[x]$, al variar di x, descrive un'algebra primitiva del 2° ordine. Ciò significa che anche E è dell'ordine 2 e generata dalle unità ω e $j\omega$.

Se A, in conformità del teorema del n. 3, fosse somma di un'algebra primitiva P e di E, riuscendo certo nulla l'intersezione di P ed E, sarebbe P

isomorfa ad A — E e dunque dovrebbe esistere in A un elemento x per il quale risultasse, come per l'elemento $[j]$ di A — E, $x^2 + \xi u = 0$, o, ciò che *in* Γ fa lo stesso,

$$x^2 = \xi u .$$

Ora questo è impossibile. La (10) dà

$$(11) \qquad x^2 = (\lambda_0 + \lambda_2 \xi)^2 u + (\lambda_1 + \lambda_3 \xi)^2 j^2 =$$
$$= [(\lambda_0 + \lambda_2 \xi)^2 + (\lambda_1 + \lambda_3 \xi)^2 \xi] u + (\lambda_1 + \lambda_3 \xi)^2 \omega ,$$

quindi perchè venga x^2 eguale ad un multiplo scalare di u, occorre che sia $(\lambda_1 + \lambda_3 \xi)^2 = 0$. Ma quando ciò accade la (11) diviene

$$x^2 = (\lambda_0 + \lambda_2 \xi)^2 u ,$$

e qui è impossibile avvalersi di λ_0 e λ_2 in modo che riesca

$$(\lambda_0 + \lambda_2 \xi)^2 = \xi ,$$

dunque *l'algebra* A *non è somma di un'algebra primitiva e della sotto-algebra eccezionale.*

5. Sia ora Γ un corpo numerico infinito o finito, secondo che tale è il suo sotto-corpo fondamentale, e sia A un'algebra in Γ; di guisa che ad A sarà applicabile il teorema dello Wedderburn.

Supponiamo che A sia dotata di modulo e di sotto-algebra eccezionale E e che l'algebra A — E sia semplice. Dico che:

Se in conformità del detto teorema, si pone

$$A = R + E ,$$

con R *algebra semplice, l'ordine* n_1 *di* R *è un divisore comune degli ordini* n *ed* $n - n_1$ *di* A *ed* E, *e l'indice* r *di* E *non supera il quoziente* n/n_1.

Sia (p_τ) la segnatura di A; allora è

$$A = B \times C \quad , \quad B = P + E_1 \quad , \quad R = P \times C \quad , \quad E = E_1 \times C ,$$

dove - dalle algebre B, C, P, E_1 - B è a modulo primitivo, C è regolare e dell'ordine p_1^2, P è primitiva ed E_1 è la sotto algebra eccezionale di B. Sia ν l'ordine di P.

Il modulo di P coincide con quello di B, quindi, per un teorema noto (*C. N. A.*, p. 327), l'ordine di B è divisibile per quello di P. Se l'indichiamo con $q\nu$, in base alle uguaglianze $A = B \times C$ ed $R = P \times C$, sarà

$$n = q\nu p_1^2 \quad , \quad n_1 = \nu p_1^2 ;$$

per conseguenza n_1 riesce, come volevasi, un divisore di n (ed $n - n_1$).

Da $E = E_1 \times C$ si trae, qualunque sia l'intero positivo s,

$$E^s = E_1^s \times C^s = E_1^s \times C,$$

Dunque l'indice r di E è quello di E_1.

L'algebra E_1^s, per $s < r$, è, al pari di E_1, invariante in B, perchè da

$$BE_1 = E_1 B = E_1 \text{ (1)}$$

si trae, se $s > 1$,

$$BE_1^s = BE_1 \cdot E_1^{s-1} = E_1 \cdot E_1^{s-1} = E_1^s \quad \text{e similmente} \quad E_1^s B = E_1^s;$$

inoltre si ha $P^2 = P$ ed $E_1^{2s} < E_1^s$, quindi riesce

$$(P + E_1^s)^2 = P^2 + PE_1^s + E_1^s P + E_1^{2s} = P + E_1^s$$

e $P + E_1^s$ è una sotto algebra di B avente per modulo quello comune di B e P. Segue che l'ordine di $P + E_1^s$ è un multiplo di ν, e che, per conseguenza, tale è pure l'ordine di E_1^s. Indichiamo quest'ultimo con $q_s \nu$, se $s > 1$; mentre da $B = P + E_1$ e dalle posizioni fatte segue che l'ordine di E_1 è $(q - 1)\nu$.

Essendo $E_1 > E_1^2 > \cdots > E_1^{r-1} > E^r = 0$, sarà

$$(q - 1)\nu > q_2 \nu > \cdots > q_{r-1} \nu > 0,$$

ossia

$$q - 1 \geq q_2 + 1 \ , \ q_2 \geq q_3 + 1 \ , \cdots , q_{r-2} \geq q_{r-1} + 1 \ , \ q_{r-1} \geq 1;$$

e dunque, sommando, sarà $q - 1 \geq r - 1$, cioè, come volevasi, $r \leq q = n/n_1$.

Notisi che, *se n è privo di divisori quadrati* ($\neq 1$), *è* $p_1 = 1$, indi A *a modulo primitivo;* che se poi n è un numero primo, non potendo essere $\nu = n$ (perchè altrimenti sarebbe $n_1 = n$ ed A sarebbe priva di sotto-algebra eccezionale), sarà necessariamente $\nu = 1$; dunque *in tal caso l'ordine di* E *sarà* $n - 1$.

(1) Qui si scrive $BE_1 = E_1 B = E_1$, anzi che $BE_1 \leq E_1$, $E_1 B \leq E_1$, perchè B è dotata di modulo. Lo stesso dicasi per le eguaglianze successive del testo.

Chimica (Chimica fisica). — *Sulla possibilità di separare* D_2O *da* H_2O *per congelamento frazionato*[1]. Nota[2] del Socio G. Bruni.

Nel fascicolo dell'8 aprile di quest'anno di questi « Rendiconti », alle pp. 453–457, fu pubblicata una Nota mia e di M. Strada sull'argomento indicato nel titolo.

In un primo capitolo io esponevo la possibilità teorica di una separazione dell'acqua pesante da quella comune per congelamento frazionato, basata sul fatto ben noto che D_2O ha un punto di congelamento di 3°.8 superiore a quello di H_2O, e sulla ammissione che le due sostanze siano isomorfe e formino una serie ininterrotta di soluzioni solide.

Il fondamento di questa possibilità si basa su principî elementari della teoria delle fasi e non si presta a discussioni.

Circa alla possibilità pratica di ottenere la separazione in una misura più o meno apprezzabile, essa dipende solo, come io feci notare, dalla posizione relativa, ossia dalla distanza più o meno grande, delle due curve del liquido e del solido.

Nei capitoli successivi furono esposti i risultati di esperienze da me affidate all'ing. Strada. Egli aveva eseguite due serie di congelamenti frazionati partendo rispettivamente da 1500 e 4000 litri di acqua, e in sette, rispettivamente nove congelamenti parziali, era giunto a 21, rispettivamente 24 cm^3 di acqua che dopo rispettive distillazioni e purificazioni mostravano una densità da cui si calcolava un contenuto in D_2O del 3.6 rispettivamente 4.1 per mille. Le frazioni intermedie davano valori di densità pure intermedi, ciò che rendeva attendibile il risultato. Dati analoghi l'ing. Strada otteneva da una simile serie di frazionamenti effettuati partendo da acqua di vecchie celle di un impianto di idrogeno elettrolitico.

Essendomisi successivamente presentati dei dubbi sulla attendibilità di queste esperienze, ho dovuto pregare il prof. A. Quilico di ripeterle, ciò che egli ha fatto con la più scrupolosa diligenza.

Il metodo seguìto fu sostanzialmente lo stesso, anzi, furono adottati dispositivi atti a intensificare l'effetto di separazione; così il ghiaccio fu separato mediante centrifuga in modo da avere una massa secca di minuti cristalli. Anche questa volta, per facilitare la formazione del ghiaccio in forma fine, si era aggiunto ai liquidi sottoposti a congelamento, il 6 % di NaCl.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale del R. Politecnico di Milano.
(2) Pervenuta all'Accademia il 20 agosto 1934.

Nelle misure, eseguite sempre su 100 cm^3, si tenne conto della temperatura fino a 0°,01 e si introdussero le relative correzioni. Prima delle misure l'acqua era sottoposta ad otto successive distillazioni; due volte da sola, due su permanganato acido e poi alcalino, una su potassa caustica, una su barite, e finalmente due distillazioni da sola in apparecchio di quarzo, rigettando la prima porzione.

Partendo da 4000 litri di acqua, e prelevando ogni volta circa 1/3 come ghiaccio, il volume iniziale fu ridotto successivamente in nove volte a: cm^3 1200000; 360000; 108000; 32000; 9000; 2600; 900; 280.

Sull'ultima frazione furono eseguite *nove* distinte misure di densità, cioè riempiendo ogni volta separatamente il picnometro, ed ogni volta di confronto con l'acqua distillata di partenza, purificata allo stesso modo. Le differenze assolute di peso trovate, corrette per la temperatura furono (in grammi):

+ 0.00131	+ 0.00036	— 0.00011	— 0.00060	+ 0.00065
+ 0.00055	+ 0.00038	— 0.00092	— 0.00013 .	

Come si vede le differenze furono in entrambi i sensi con leggerissima prevalenza per l'aumento, dovuta quasi esclusivamente alla prima misura, probabilmente un po' meno precisa delle successive.

Per ovviare alla supposizione che le ripetute ebollizioni con reagenti chimici acidi ed alcalini, potessero aver prodotto una distruzione totale o parziale del D_2O, il prof. Quilico ripetè altre cinque misure su una frazione purificata per semplice distillazione, ma i risultati furono praticamente identici.

Risultati pure identici si ottengono con altre misure eseguite su acqua della quinta frazione.

Il risultato è che le misure di Strada sono totalmente inattendibili e che operando come si è fatto, *non* si ottiene un frazionamento sicuramente apprezzabile col tipo di misure adottato. Se un frazionamento ha luogo esso è certamente inferiore ad 1/10000, e probabilmente ad 1/100000, quando la massa si riduce a 1/14000 della primitiva.

Quanto alla ragione di questo comportamento diverso da quello degli altri corpi isomorfi finora noti, esso è dovuto, quasi sicuramente, a una circostanza messa da me in rilievo, e cioè che le dimensioni del reticolo dell'acqua sono determinate esclusivamente o quasi da quelle dell'ossigeno, mentre gli atomi di H o di D, per la loro piccolezza, vi trovano posto negli spazi vuoti.

Le due sostanze si comportano quindi praticamente come una sola nel reticolo cristallino e non si differenziano nel congelamento. Le due curve del liquido e del solido praticamente coincidono, formando un caso di isomorfismo ideale.

Pure riconoscendo, come io ho esplicitamente fatto nella mia Nota, l'influenza di queste circostanze, non era possibile escludere *a priori* che una separazione apprezzabile potesse realizzarsi. È probabile che una simile separazione esista, ma essa è di un ordine di grandezza inferiore a quella apprezzabile con misure normali di densità.

Ringrazio di tutto cuore il prof. Quilico della grande pena e fatica a cui si è sottoposto.

Biologia. — *Prevalenza del pronucleo femminile in alcune fecondazioni sperimentali dei Metazoi e nella coniugazione di un Unicellulare.* Nota [1] del Socio A. Russo.

L'analisi citologica delle cellule sessuali, sottoposte a procedimenti sperimentali, come nella fecondazione parziale e merogonica, nella partenogenesi, nella ginogenesi, nelle ibridazioni eterogenee, ha messo in rilievo alcuni fenomeni nucleari, ritenuti quali deviazioni nel normale sviluppo. Sopratutto è notevole che i cromosomi del pronucleo maschile, in determinate condizioni sperimentali della fecondazione, vengono eliminati, sicchè lo sviluppo dell'embrione si compie con la partecipazione del solo pronucleo femminile.

Fra i molti e notevoli risultati sperimentali, che dimostrano la relativa indipendenza del pronucleo femminile da quello maschile per lo svolgimento dei processi embriogenetici, sono da ricordare quelli, ottenuti dagli Hertwig [2], assoggettando lo sperma degli Anfibi e degli Echinodermi alle emanazioni di Radio. Con irradiazioni non molto prolungate, i fenomeni della fecondazione procedono abbastanza bene, in quanto che i due pronuclei, come nella fecondazione normale, si uniscono fra loro. In questo caso, gli embrioni, che ne derivano, per l'alterazione della cromatina del nucleo spermatico, sono più o meno deformi e la deformità è tanto maggiore quanto più è durata la irradiazione, fino ad un limite, in cui la fecondazione non è più possibile. Fu osservato però, che al di là di tale limite, quando lo sperma sia più fortemente irradiato, tanto più lunga è stata la irradiazione tanto maggiore è la possibilità di avere degli embrioni, i quali, in questo caso, sono più vicini al normale, ma più piccoli.

L'analisi citologica delle ova, fecondate con tali spermii, dimostrò che il pronucleo maschile non si univa più al pronucleo femminile, degenerando

(1) Pervenuta all'Accademia il 7 luglio 1934.

(2) O. Hertwig, *Versuche an Tritoneiern über die Einwirkung bestrahlter Samenfäden* ecc., « Archiv f. mikrosk. Anatomie », vol. 82, 1913; G. Hertwig, *Das Schicksal des mit Radium bestrahlten Spermachromatins im Seeigelei*, « Ibid. », vol. 79, 1912; P. Hertwig, *Das Verhalten des mit Radium bestrahlten Spermachromatins im Froschei* ecc., « Ibid. », vol. 81, 1913.

nel protoplasma ovulare, e che questo provvedeva da solo allo sviluppo dell'embrione.

Il fenomeno di ginogenesi sopra cennato, ottenuto per via sperimentale, ha riscontro in una ginogenesi naturale, osservata da Krüger in *Rhabditis aberrans* (1) e da Paula Hertwig (2) in un mutante di altro Nematode, *Rhabditis pellio*, il cui ovo, dopo avere ricevuto lo spermio, compie lo sviluppo con il solo pronucleo femminile, perchè quello maschile si disperde nel protoplasma (3).

In relazione alla prevalenza che il pronucleo femminile ha su quello maschile stanno anche alcuni fenomeni nucleari, studiati con l'analisi citologica dei germi, durante lo svolgersi dei fenomeni di *fecondazione crociata eterogenea*. Difatti, in alcuni casi, fu osservato che i cromosomi paterni, quasi non necessari per lo sviluppo dell'embrione, vengono eliminati dal 1° fuso di segmentazione o in quello di uno dei blastomeri successivi, come dimostrò il Baltzer (4) negl'incroci eterogenei *Strongylocentrotus* ♀ × *Sphaerechinus* ♂. Nei bastardi derivati, solo i cromosomi del pronucleo femminile prendevano parte allo sviluppo dell'embrione, che era con caratteri materni.

Un fenomeno analogo, cioè la non partecipazione del pronucleo maschile alla formazione dei nuclei riproduttori dei nuovi individui, si osserva normalmente nei gameti di un unicellulare, *Cryptochilum echini*, durante la loro coniugazione.

Nell'unicellulare, come nei Metazoi, i gameti sono anche sessualmente diversi prima di accoppiarsi, per la diversa quantità di sostanza nucleare del loro pronucleo (*micronucleo*). Anche in questo organismo elementare il gamete femminile è prevalente su quello maschile, in quanto il suo pronucleo fornisce a questo una sua parte, necessaria al successivo sviluppo degli individui, che da esso derivano. Al contrario, il pronucleo del gamete maschile

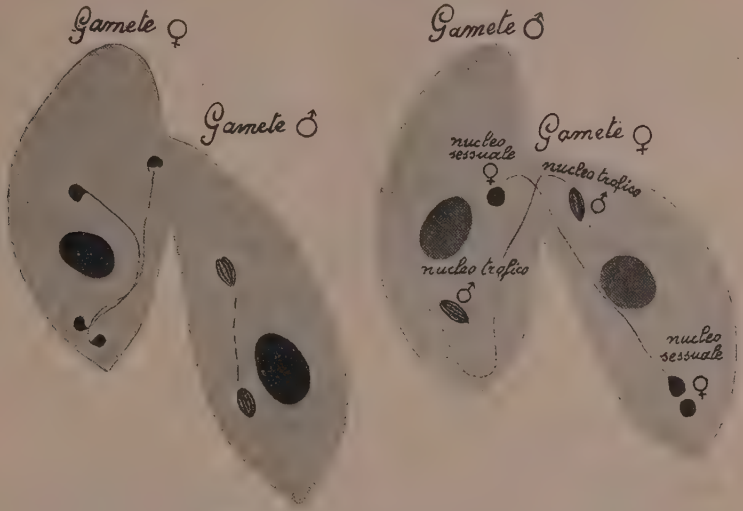
(1) E. Krüger, *Fortpflanzung und Keimzellenbildung von Rhabditis aberrans*. « Zeitschrift f. Wissen. Zoologie », vol. *105*, 1913.

(2) P. Hertwig, *Abweichende Form der Parthenogenese bei einer mutation von Rhabditis pellio. Eine experimentell-cjtologische Untersuchung*, « Arch. f. Mikr. Anat. », vol. *94*, 1920.

(3) Furono ottenuti, anche sperimentalmente, alcuni casi di androgenesi, in cui il solo pronucleo maschile iniziava i processi di segmentazione, mentre il pronucleo femminile si dissolveva. Tali casi, in cui raramente l'embrione raggiunge stadi avanzati del suo sviluppo, furono ottenuti negli Anfibi da Günther Hertwig e da Paula Hertwig (« Arch. f. Mikr. Anat. », vol. *77*, 1911; vol. *100*, 1924), irradiando le ova con il Radio o con le emanazioni di Mesotorio, ed in un Chetopode da Packard (« Biol. Bullet.-W. », H. *55*, 1928). In tutti i casi di androgenesi, l'anormalità dello sviluppo è più evidente che nella ginogenesi per l'impossibilità che ha il pronucleo maschile di vivere a lungo in un protoplasma non specifico.

(4) F. Baltzer, *Ueber die Beziehung zwischen dem Chromatin und der Entwicklung und Vererbungsrichtung bei Echinodermen bastarden*, « Arch. Zellforschung », vol. *5*, 1910.

non partecipa al processo riproduttivo, perchè da esso si formano nuclei trofici (*macronuclei*), destinati ad essere riassorbiti dal protoplasma.



Due stadi della coniugazione principale di *Cryptochilum e.*, in cui si osserva che il pronucleo del gamete ♀, dopo due mitosi, fornisce un nucleo riproduttore al gamete ♂, e che il pronucleo di questo fornisce invece i nuclei di natura trofica.

Dall'analisi dei nuclei sessuali dei due gameti, durante la loro coniugazione, risulta che, in una prima fase, quello del gamete femminile, riferito all'unità compie due mitosi con celerità maggiore dell'unica divisione, che, con processo atipico, compie il nucleo del gamete maschile, che è metà del primo. In fase successiva, mentre uno dei quattro nuclei, formatisi dopo le due mitosi, emigra nel gamete maschile per fornirgli, con una 3ª mitosi, il nucleo sessuale, uno dei due nuclei, formatisi per divisione atipica, emigra nel gamete femminile, dove, anche con lo stesso processo, forma due altri nuclei, che hanno però funzione trofica (1).

Da quanto fu sommariamente esposto risulta che, se le modalità dei due processi di prevalenza del nucleo femminile sono diverse, esiste una perfetta analogia tra i fenomeni nucleari, che si compiono nelle ova di alcuni metazoi, fecondate in condizioni sperimentali, e quelli osservati nei nuclei sessuali dei due gameti di *Cryptochilum*, durante la coniugazione. In entrambi i casi, il pronucleo femminile dimostra una spiccata prevalenza su quello

(1) Per più estese notizie su la sessualità dei gameti, sui processi nucleari durante la coniugazione, su la struttura dei nuclei e su la loro diversa natura, *germinativa* e *trofica*, si riscontri la mia Memoria: *Ciclo evolutivo di « Cryptochitum echini » Mps. (Ciliato parassita del « Paracentrotus lividus » Mrtsn.)* « Memorie della R. Accad. Naz. dei Lincei », Roma, ser. 6ª, vol. IV, fasc. IV, 1930.

maschile, perchè, come lo spermio nei casi di ginogenesi, dopo avere attivato i processi iniziali della fecondazione, non prende parte alla formazione del 1° nucleo embrionale o, prendendovi parte, come nelle fecondazioni crociate eterogenee, i suoi cromosomi sono subito espulsi, nell'unicellulare, solo il nucleo sessuale del gamete femminile fornisce i nuclei germinativi a tutti gl'individui delle due categorie, che ne costituiscono il ciclo biologico, mentre il nucleo del gamete maschile, pur penetrando nel gamete femminile, fornisce solo nuclei nutritizi, ma non prende parte ai fenomeni riproduttivi.

Dai fatti messi in evidenza si potrebbe dedurre, con più ragione, che fenomeni o strutture, ritenuti quali anomalie negli animali superiori, possono spesso avere riscontro in fenomeni e strutture normali di animali inferiori e che l'analisi citologica di questi, fatta dai zoologi, anche da tale punto di vista, potrebbe portare nuovi dati alla soluzione di vari problemi biologici.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica (Analisi). — *Sulla trasformata generalizzata di Eulero delle serie prodotto di due altre.* Nota [1] di U. Broggi, presentata dal Corrisp. L. Berzolari.

È noto che ove le serie $a_0 + a_1 + \cdots, b_0 + b_1 + \cdots$ siano sommabili (B) e possa scriversi

$$\int_0^\infty e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}\, dt \int_0^\infty e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!}\, dt = \int_0^\infty e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} d_n \frac{t^n}{n!}\, dt$$

è anche

$$d_0 = 0 \quad , \quad d_n = c_{n-1} = a_0 b_{n-1} + a_1 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_0 .$$

Il risultato, al quale perviene E. Borel [2] trasformando il prodotto dei due integrali del primo membro, verrà da noi ottenuto come caso particolare di un altro, che stabiliremo elementarmente, concernente il prodotto delle trasformate di Eulero di ordine u (o trasformate (E_u)) delle due serie $\sum a_n , \sum b_n$.

Si dimostrerà parimenti che ove le trasformate $(E_u), (u \geqq 0)$, delle tre serie $\sum a_n , \sum b_n , \sum c_n$ convergano, e le loro somme siano rispettivamente uguali ad A, B, C, è anche $C = AB$ [3], e, più generalmente, che se

(1) Pervenuta all'Accademia il 2 agosto 1934.

(2) Cfr. E. Borel, *Leçons sur les séries divergentes*, § 52.

(3) Cfr. per una diversa dimostrazione K. Knopp, «Mathematische Zeitschrift», vol. XVIII, p. 130.

convergono le trasformate (E_u) delle serie $\sum a_n$, $\sum b_n$, con somme rispettivamente uguali ad A e B, la trasformata (E_u) della serie $c_0 + c_1 + \cdots$ è sommabile (C, 1) e la sua somma secondo Cesàro è uguale ad A . B.

Sia $u \geqq 0$. Trasformata di Eulero di ordine u, o trasformata (E_u) della serie

$$a_0 + a_1 + \cdots \tag{1}$$

è la serie

$$\frac{a_0}{1+u} + \frac{a_0 u + a_1}{(1+u)^2} + \frac{a_0 u^2 + \binom{2}{1} a_1 u + a_2}{(1+u)^3} + \cdots \tag{2}$$

di termine generale

$$\frac{1}{(1+u)^{n+1}} \left[a_0 u^n + \binom{n}{1} a_1 u^{n-1} + \cdots + a_n \right].$$

Se (2) converge, converge ogni trasformata (E_v) corrispondente a $v > u$. Sussistono i teoremi:

I. *Il termine n-esimo della serie prodotto delle trasformate* (E_u) *delle serie* $a_0 + a_1 + \cdots$; $b_0 + b_1 + \cdots$ *è il termine* $(n+1)$*-esimo della trasformata* (E_u) *della serie* $0 + c_0 + c_1 + \cdots$, *dove* $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$.

Il coefficiente di $a_h b_k u^{n-h-k}$ al numeratore del termine di denominatore $(1+u)^{n+2}$ della serie prodotto delle due trasformate (E_u) delle serie $a_0 + a_1 + \cdots$; $b_0 + b_1 + \cdots$, è, come si vede agevolmente

$$\binom{n-h}{k} + \binom{h+1}{h}\binom{n-h-1}{k} + \binom{h+2}{h}\binom{n-h-2}{k} + \cdots + \binom{n-k}{h}$$

uguale a

$$\binom{n+1}{h+k+1}$$

poichè [1]

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=n} \binom{n-\rho}{k}\binom{m+\rho}{m} = \binom{m+n+1}{k+m+1}.$$

Esso è solo funzione di $h+k$, ed è pertanto

$$\frac{1}{(1+u)^{n+1}} \left[\binom{n}{1} c_0 u^{n-1} + \binom{n}{2} c_1 u^{n-2} + \cdots + c_{n-1} \right]$$

(1) Cfr. E. Netto, *Lehrbuch der Kombinatorik*, 1901, p. 15, formola (11).

il termine n-esimo del prodotto delle trasformate (E_u) delle serie $a_0 + a_1 + \cdots ; b_0 + b_1 \cdots$, termine $(n+1)$-esimo della trasformata (E_u) della serie $0 + c_1 + c_2 + \cdots$. Alla serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+u)^{n+2}} \left[\binom{n+1}{1} c_0 u^n + \binom{n+1}{2} c_1 u^{n-1} + \cdots + c_n \right]$$

si perviene integrando formalmente termine a termine l'integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-t(1+u)} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\binom{n+1}{1} c_0 u^n + \binom{n+1}{2} c_1 u^{n-1} + \cdots + c_n \right] \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} dt,$$

che si suppone convergere, e che, come si vede immediatamente, coincide colla somma (B) della serie $0 + c_0 + c_1 + \cdots$. È infatti

$$\int_0^{\infty} e^{-t(1+u)} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\binom{n+1}{1} c_0 u^n + \binom{n+1}{2} c_1 u^{n-1} + \cdots + c_n \right] \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} dt =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-t(1+u)} \left[\left(1 + \frac{tu}{1!} + \frac{t^2 u^2}{2!} + \cdots \right) \left(c_0 \frac{t}{1!} + c_1 \frac{t^2}{2!} + \cdots \right) \right] dt =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} dt .$$

Si ha analogamente, se le serie $a_0 + a_1 + \cdots$, $b_0 + b_1 + \cdots$ sono sommabili (B)

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+u)^{n+1}} \left[a_0 u^n + \binom{n}{1} a_1 u^{n-1} + \cdots + a_n \right] \frac{t^n}{n!} dt$$

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+u)^{n+1}} \left[b_0 u^n + \binom{n}{1} b_1 u^{n-1} + \cdots + b_n \right] \frac{t^n}{n!} d$$

mentre l'integrazione formale termine a termine dei secondi membri conduce alle trasformate (E_u) delle serie $a_0 + a_1 + \cdots ; b_0 + b_1 + \cdots$

Se ne deduce, se le tre serie $a_0 + a_1 + \cdots$, $b_0 + b_1 + \cdots$, $0 + c_0 + c_1 + \cdots$, dove

$$c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_0 b_n ,$$

sono sommabili (B), che perchè sussista la relazione

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!} dt \int_0^{\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} d_n \frac{t^n}{n!} dt$$

deve essere

$$d_0 = 0 \quad , \quad d_n = c_{n-1} .$$

E poichè, se converge la trasformata (E_u) della serie $0 + c_0 + c_1 + \cdots$ converge la trasformata (E_u) di $c_0 + c_1 + \cdots$, e con ugual somma [1], può venire affermato che

II. *Se convergono le trasformate* (E_u) *delle tre serie* $a_0 + a_1 + \cdots ; b_0 + b_1 + \cdots ; c_0 + c_1 + \cdots$; *dove* $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$, *ed hanno somme rispettivamente uguali ad* A, B, C, *è*

$$C = AB. \tag{1}$$

Per il teorema di Mertens basta la convergenza delle trasformate (E_u) delle serie $a_0 + a_1 + \cdots ; b_0 + b_1 + \cdots$ e la convergenza assoluta di una delle due trasformate perchè converga la trasformata (E_u) della serie $c_0 + c_1 + \cdots$ e sussista la (1).

Un noto teorema di Cesàro permette affermare più generalmente che, se le trasformate (E_u) delle serie $a_0 + a_1 + \cdots ; b_0 + b_1 + \cdots$ convergono, con somme A rispettivamente B, ed è

$$s_n = c_0 + c_1 + \cdots + c_n$$

$$w_n = \frac{1}{(1+u)^{n+2}} \left[\binom{n+1}{1} c_0 u^n + \binom{n+1}{2} c_1 u^{n-1} + \cdots + c_n \right]$$

$$\sigma_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$$

è anche

$$\frac{\sigma_0 + \sigma_1 + \cdots + \sigma_n}{n+1} \to AB, \quad \text{se} \quad n \to \infty .$$

Può venire dedotto, che

III. *La trasformata* (E_u) *della serie* $c_0 + c_1 + \cdots$, *prodotto delle due serie* $a_0 + a_1 + \cdots ; b_0 + b_1 + \cdots$, *di cui le trasformate* (E_u) *convergono, è sommabile* (C, 1) *e la sua somma secondo Cesàro è uguale al prodotto delle somme delle trasformate* (E_u) *di* $a_0 + a_1 + \cdots ; b_0 + b_1 + \cdots$.

s_n , w_n , σ_n conservino il loro significato, e sia $v_0 + v_1 + \cdots$ la trasformata (E_u) di $c_0 + c_1 + \cdots$ È allora

$$v_n = \frac{1}{(1+u)^{n+1}} \left[c_0 u^n + \binom{n}{1} c_1 u^{n-1} + \cdots + c_n \right]$$

$$\tau_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

$$= \frac{1}{(1+u)^{n+1}} \left[\binom{n+1}{1} s_0 u^n + \binom{n+1}{2} s_1 u^{n-1} + \cdots + s_n \right]$$

(1) Si cfr. ad esempio, U. Broggi, *Sul metodo generalizzato di sommazione di Eulero.* «Rend. Lincei», vol. XIX, ser. 6ª, p. 279.

mentre, come si vede agevolmente

$$\sigma_n = \frac{1}{(1+u)^{n+2}}\left[\binom{n+2}{2} s_0 u^n + \binom{n+2}{3} s_1 u^{n-1} + \cdots + s_n\right].$$

È dunque

$$\tau_n - \sigma_n = \frac{1}{(1+u)^{n+2}}\left[\binom{n+1}{1} c_0 u^{n+1} + \binom{n+1}{2} c_1 u^n + \cdots + c_n u\right]$$

$$= u w_n$$

$$\frac{\tau_0 + \tau_1 + \cdots + \tau_n}{n+1} = \frac{\sigma_0 + \sigma_1 + \cdots + \sigma_n}{n+1} + u\frac{\sigma_n}{n+1}.$$

Poichè, se $n \to \infty$

$$\frac{\sigma_0 + \sigma_1 + \cdots + \sigma_n}{n+1} \to AB$$

e quindi

$$\frac{\sigma_n}{n+1} \to 0$$

il teorema è dimostrato.

Matematica. — *Certains aspects de l'itération des transformations fonctionnelles linéaires, et quelques notions qui s'en dégagent.* Nota [1] di A. Fouillade, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. La présente communication est issue de recherches ayant pour but de généraliser le principe de Dirichlet, au point de vue introduit par M. Lebesgue [2] et prolongé, après M. Bouligand [3], par un théorème que j'ai donné en 1931 [4] et qui établit la convergence des fonctions déduites d'une fonction continue initiale au moyen de l'itération d'une opération fonctionnelle linéaire d'une certaine classe.

Dans ces recherches, une part a été faite au cas des substitutions linéaires à un nombre fini de variables. Dans les résultats que j'ai énoncés sur ce point particulier [5], M. Kolmogoroff [6] a reconnu des propositions de la théorie

(1) Pervenuta all'Accademia il 7 luglio 1934.

(2) H. Lebesgue, « Comptes Rendus », 154, 1912, p. 335.

(3) G. Bouligand, « Comptes Rendus », 184, 1927, p. 430; et « Bull. Sc. Math. », to. 51, mai 1927.

(4) A. Fouillade, « C. R. », 27 avril 1931, p. 1010; et aussi « C. R. », 8 mai 1933, to. 196, p. 1361.

(5) A. Fouillade, *Sur l'itération de certaines substitutions linéaires*, « Acad. Roy. de Belgique », 1933–4.

(6) « Zentralblatt für Mathematik », mars 1934.

des probabilités « en chaine », déja établies par MM. Von Mises [1] et Fréchet [2]; c'est pourquoi il me paraît d'autant plus intéressant de donner une suite à mes tentatives. En s'attachant systématiquement aux notions qui se présentent de la façon la plus naturelle - en particulier dans la tendance « potentialisante » - on peut concevoir sous un aspect plus géométrique certaines propriétés relatives à l'itération des opérations linéaires, et aussi obtenir des propositions indépendantes de la théorie des déterminants, et plus générales que celles qui dérivent de cette théorie.

2. Soit un ensemble fermé borné E d'un espace à un nombre fini et déterminé de dimensions; soit une *fonction d'ensemble et de point* $K(P, e)$, définie sur E, et mesurable (B), c'est-à-dire telle que pour tout point P de E, $K(P, e)$ est une fonction d'ensemble définie pour tout ensemble mesurable (B), et que, pour tout ensemble mesurable (B) $\mathcal{E}$, $K(M, \mathcal{E})$ est une fonction de point qui est mesurable (B). Nous supposons en outre que E est mesurable (B), que $K(M, E)$ est bornée et que $K(M, CE) = 0$, CE étant le complémentaire de E.

Soit $F(M)$ une fonction mesurable (B) et bornée; $K(P, e)$ définit une *transformation fonctionnelle linéaire* qui, à $F(M)$, fait correspondre $F_1(M)$, mesurable (B) et bornée, par la formule:

$$(1) \qquad F_1(P) = \int_E F(M)\, d_M K(P, e).$$

À cette transformation T, on peut associer une transformation τ des fonctions d'ensemble, au moyen de la formule:

$$(2) \qquad \varphi_1(e_0) = \int_E K(M, e_0)\, d_M \varphi(e).$$

Dans ce qui va suivre, nous supposerons que ces transformations sont *positives*, c'est-à-dire que $K(P, e)$ est positive [3].

Dans le cas des substitutions linéaires de l'algèbre, on peut étudier par différentes méthodes la dépendance des variables entre elles et leur séparation en groupes autonomes; ici, on peut effectuer une étude analogue à certains égards, et, comme en algèbre, au moyen d'une méthode directe, issue de

(1) R. Von Mises, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, 1931, p. 533 et suiv.

(2) M. Fréchet, « Ann. Scuola norm. sup. di Pisa », II, s. 2, pp. 131-164, 1933.

(3) Moyennant certaines précautions, les définitions qui suivent s'appliquent au cas général. On peut aussi les appliquer aux opérations linéaires dans le champ des fonctions mesurables, et même à des opérations simplement additives et homogènes, mais non continues, c'est-à-dire non linéaires. Enfin on peut envisager un ensemble E prélevé sur un espace abstrait ayant des propriétés topologiques convenables (voir S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, « Monogr. Matematyczne », Warszawa, 1932).

quelques notions concrètes. Cette note a pour but de préciser certaines définitions utiles et de donner un théorème général préliminaire dont la démonstration et quelques applications paraîtront dans un autre recueil.

3. Soient un point P et la fonction d'ensemble $K(P, e)$ qui lui est attachée. Considérons la dérivée inférieure, sur un réseau, de cette fonction; elle est mesurable (B). L'ensemble des points où elle est non-nulle, et qui est mesurable (B), sera appelé *ensemble métaséquent du point* P, en abrégé *Métaséquent de* P ou encore $\mathfrak{M}_P$.

Par définition, le *Métaséquent d'un ensemble* $\mathcal{E}$ est la réunion des métaséquents des différents points de l'ensemble; le *Conséquent de* $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points P tels que $K(P, \mathcal{E}) > 0$. Nous appellerons *ensemble support* relatif à un ensemble $\mathcal{E}$, tout ensemble mesurable $S_{\mathcal{E}}$ inclus dans le métaséquent de $\mathcal{E}$, et tel que pour tout point de $\mathcal{E}$, $K(P, CS_{\mathcal{E}}) = 0$. Un ensemble support sera dit *réduit* si tout sous-ensemble mesurable de mesure positive admet un conséquent qui contient au moins un point de $\mathcal{E}$.

Ensemble indépendant. – *Nous appelons ainsi un ensemble* $\mathcal{E}$ *qui est son propre support, c'est-à-dire tel que,* P *étant un quelconque de ses points, on a* $K(P, C\mathcal{E}) = 0$. Un ensemble indépendant réduit est un ensemble indépendant qui ne contient aucun sous-ensemble ε, non indépendant et de mesure positive, tel que $\mathcal{E} - \varepsilon$ soit aussi indépendant. Un ensemble indépendant réduit est donc connu à un ensemble de mesure nulle près.

Ensemble indécomposable. – *Nous appelons ainsi un ensemble indépendant qui ne peut être divisé en deux ensembles indépendants disjoints.*

Nous appellerons ensemble rétenseur, en abrégé ER [1], *un ensemble indécomposable réduit qui est inclus dans son métaséquent, et est tel que tout sous-ensemble indépendant ait, non seulement même mesure que lui, mais aussi même métaséquent.*

Considérons les puissances des transformations T et τ. Elles sont définies par les fonctions itérées d'ordre n $K_n(P, e)$, car on démontre que l'on a, avec les hypothèses faites sur la mesurabilité:

$$K_n(P, e') = \int_E K_{n-1}(M, e')\, d_M K(P, e) = \int_E K(M, e')\, d_M K_{n-1}(P, e),$$

et que K_n a les mêmes propriétés utiles que K.

Relativement aux transformations T^n et τ^n, nous pouvons envisager les notions précédentes, et appeler métaséquents, conséquents, et supports *d'ordre* n, les métaséquents, conséquents et supports relatifs à $K_n(P, e)$.

4. Nous avons été amené à faire, indépendamment l'une de l'autre, deux hypothèse de commodité; ce sont les suivantes:

(1) Notation déjà employée dans le Mémoire cité de l'Académie de Belgique.

Hypothèse C. – *La transformation* T *conserve la continuité*, c'est-à-dire transforme une F (M) continue en une F_1 (M) continue. Dans ce cas, à toute suite de points $P_1, P_2, \cdots, P_n, \cdots$ tendant vers un point limite unique P_0, correspond une suite $K(P_n, \varepsilon)$ qui est convergente, au sens de M. de la Vallée Poussin (1) et tend, avec ce sens, vers $K(P_0, \varepsilon)$. De plus, la transformation τ conserve la convergence précédente des fonctions positives d'ensemble.

D'autre part, *dans l'hypothèse* C, *si un ensemble est indépendant, sa fermeture l'est aussi*, et la considération d'ensembles fermés simplifie certains problèmes. Nous réservons le nom de *Substitutions* aux transformations linéaires fonctionnelles qui vérifient l'hypothèse C.

Hypothèse M. – *Le métaséquent d'ordre q de tout point* P *a une mesure non-nulle, bornée inférieurement par un nombre positif* μ. Dans ce qui suit, nous supposons pour simplifier $q = 1$. Quand il n'en est pas ainsi, ce qui suit s'applique au moins à T^q.

Cette hypothèse a pour conséquence qu'il ne peut exister aucun ensemble support, aucun ensemble indépendant de mesure nulle. En outre, comme on montre – dans tous les cas – que deux ensembles indécomposables réduits ont un produit qui, s'il n'est pas vide, a même mesure que chacun des deux ensembles, *il ne peut exister qu'un nombre fini d'ensembles indécomposables réduits disjoints*, puisque E est borné. Aussi l'hypothèse M nous assure-t-elle de rencontrer certaines propriétés analogues à celles des substitutions portant sur un nombre fini de variables.

L'hypothèse C se présente naturellement lorsqu'on étudie certains problèmes de la théorie du potentiel ; l'hypothèse M se présente plutôt dans des questions relatives aux équations intégrales, et dans la théorie des probabilités « en chaîne » où elle est vérifiée dans la quasi-totalité des cas pratiques.

5. Soient $\mathfrak{E}$ un ensemble indécomposable réduit, P un point quelconque de $\mathfrak{E}$, et $\mathfrak{M}_P^1, \mathfrak{M}_P^2, \cdots, \mathfrak{M}_P^n, \cdots$ les métaséquents successifs de P. $\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{M}_P^n$ est un support d'ordre n de P ; on montre que l'ensemble limite $\mathfrak{E}\mathfrak{M}_P^1 + \mathfrak{E}\mathfrak{M}_P^2 + \cdots + \mathfrak{E}\mathfrak{M}_P^n + \cdots$ est identique à $\mathfrak{E}$, à un ensemble de mesure nulle près. Cela étant, l'une ou l'autre des hypothèses C et M permet de démontrer le théorème d'existence suivant :

Tout ensemble indépendant contient au moins un ensemble indécomposable réduit, lequel contient un ensemble rétenteur.

On peut se demander si un ensemble indécomposable réduit, relativement à T, possède la même propriété relativement à T^n. On a le théorème fondamental suivant :

(1) C. de La Vallée Poussin, « Ann. Inst. H. Poincaré », 2, III, 1932, note 1 ; et « Ann. Scol. sup. di Pisa », s. II, v. II, 1933. [Au sujet de la conservation de la continuité : A. Fouillade, « Acad. R. de Belgique », XX, 1933-4, pp. 282-290].

THÉORÈME. – *$\mathcal{E}$ étant rétenseur par rapport à* T, *et p un nombre premier, $\mathcal{E}$, ou bien est rétenseur par rapport à* T^p, *ou bien se décompose en p ensembles rétenseurs par rapport à* T^p: $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \cdots, \mathcal{E}_p \equiv \mathcal{E}_0$ *et un ensemble de mesure nulle. Chaque ensemble $\mathcal{E}_q$ est support d'ordre* 1 *relativement au précédent, qui, à un ensemble de mesure nulle près, est son conséquent d'ordre* 1. *D'autre part,* $\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \cdots, \mathcal{E}_{p-1}$ *a même fermeture que $\mathcal{E}$.*

On peut, dans cet énoncé, se contenter de considérer des ensembles indécomposables et réduits, à la place de rétenseurs, mais alors il n'est plus vrai, en général, que la fermeture de $\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \cdots + \mathcal{E}_{p-1}$ soit identique à celle de $\mathcal{E}$.

Considérons maintenant T^p et un ensemble rétenseur par rapport à T^p, par exemple $\mathcal{E}_0$. On peut appliquer le théorème précédent, et si $\mathcal{E}_0$ est décomposable par rapport à $(T^p)^q$, il en est de même de $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \cdots$ etc., et finalement, on montre que $\mathcal{E}$ se décompose, à un ensemble de mesure nulle près e_0, qui appartient d'ailleurs à $\overline{\mathcal{E} - e_0}$, en k ensembles rétenseurs par rapport à T^k *et aussi par rapport à toute puissance de* T^k; ces k ensembles forment un cycle d'ensembles disjoints dont chacun est support d'ordre 1 relativement au précédent. Enfin $\mathcal{E}$ est rétenseur par rapport à T^n, si n est premier avec k.

ENSEMBLE TOTALEMENT RÉTENSEUR *par rapport à une transformation* T. – Nous appelons ainsi un *ensemble rétenseur par rapport à toute puissance de* T.

Nous venons de voir que si un ensemble est rétenseur par rapport à une transformation, il se décompose, à un ensemble de mesure nulle près, en un cycle de k ensembles totalement rétenseurs par rapport à la puissance $k^{\text{ième}}$ de la transformation considérée, et cela d'une seule façon, c'est-à-dire que *le nombre k est unique.*

Ce nombre qui, à certains égards, caractérise l'ensemble rétenseur, sera appelé le *degré* de cet ensemble.

6. EXEMPLES. – Supposons que E soit le segment $(0, 6)$ d'un axe et que $K(P, e)$ admette une densité. Alors, T se réduit à:

$$f_1(y) = \int_E f(x)\, D(y, x)\, dx.$$

Posons $D(y, x) = 1$ pour $i < y < i + 1$, $i + 1 \leq x \leq i + 2$, avec $i = 0, 1, 2, 3, 4$ et aussi pour $5 < y < 6$, $0 \leq x \leq 1$. Enfin, posons $D(y, x) = \frac{1}{2}$ pour $y = 1$ et $1 \leq x \leq 3$; $y = 3$ et $3 \leq x \leq 5$; $y = 5$ et $5 \leq x \leq 6$, ou $0 \leq x \leq 1$; $y = 2$ et $2 \leq x \leq 3$, ou $4 \leq x \leq 5$; $y = 4$ et $4 \leq x \leq 5$, ou $0 \leq x \leq 1$; $y = 6$ ou 0 et $0 \leq x \leq 1$ ou $2 \leq x \leq 3$; et dans les autres cas, $D(y, x) = 0$.

Le segment $(0, 6)$ est rétenseur par rapport à T, mais ne l'est pas par rapport à T^2. Enlevons les points d'abscisse 1, 3, 5; nous avons deux ensembles rétenseurs par rapport a T^2: E_1, ensemble des points d'abscisse $0 \leq x < 1$, $2 \leq x < 3$, $4 \leq x < 5$; E_2, ensemble des points $1 < x < 2$, $3 < x < 4$, $5 < x < 6$. E_2 se décompose en trois ensembles réten-

seurs par rapport à $(T^2)^3 = T^6$; E_1 aussi, à condition d'enlever les points $x = 0$, $x = 2$, $x = 4$. Finalement, le segment $(0, 6)$ se décompose, à un ensemble de mesure nulle près, en un cycle de 6 ensembles totalement rétenseurs par rapport à T^6, chacun étant support d'ordre 1 relativement au précédent.

En algèbre, nous aurons un exemple analogue en prenant une substitution à 6 variables définie par des coefficients m_i^j tels que $m_i^{i+1} = 1$, $m_6^0 = 1$, les autres étant nuls.

Matematica. — *Proprietà topologiche delle trasformazioni puntuali dello spazio.* Nota[1] di O. Onicescu, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. Se le funzioni

$$(1) \quad X = X(x, y, z) \quad , \quad Y = Y(x, y, z) \quad , \quad Z = Z(x, y, z)$$

sono uniformi e regolari in tutto lo spazio reale $s(x, y, z)$, converremo di far corrispondere alla terna X, Y, Z una funzione complessa intiera nello spazio s; potremo, allora, studiare, con criteri già adoperati da noi per lo studio topologico delle funzioni intiere della variabile complessa $x + iy$, certi aspetti topologici della corrispondenza dei due spazi s e $S(X, Y, Z)$.

In prima linea sta il problema dei punti *lacunari* (cioè dei punti non raggiungibili per mezzo della trasformazione (1) qualunque sia, in s, la terna reale x, y, z).

Nello spazio qui considerato le circostanze sono molto più variate che non nel caso, dominato dal teorema di Picard, del piano.

Tali circostanze variano[2] secondo il carattere delle varietà definite da

$$\Delta = \frac{D(X, Y, Z)}{D(x, y, z)} = 0 .$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 27 luglio 1934.

(2) I seguenti esempi mettono in evidenza diverse circostanze possibili.

1° La funzione

$$X = x + y \quad , \quad Y = xy \quad , \quad Z = z$$

per cui $\Delta \equiv x - y$, ammette tutta la regione $X^2 - 4Y < 0$ come lacuna della trasformazione.

2° La funzione

$$X = x^2 - y^2 \quad , \quad Y = xy \quad , \quad Z = z$$

rende $\Delta = 0$ lungo la linea $x = 0$, $y = 0$ e non ha punti lacunari.

Invece la funzione

$$X = e^x \cos y \quad , \quad Y = e^x \sin y \quad , \quad Z = z$$

ha sempre $\Delta \neq 0$ e ammette una retta $(X = 0, Y = 0)$ di punti lacunari (e assintotici)

3° Se consideriamo

$$X = (x - 1)^3 + 3xz^2 + y^3 + z^3 \quad , \quad Y = -x^3 + (y + 1)^3 + byz^2 \quad , \quad Z = z$$

si ha $\Delta = 0$ solo nei punti isolati: $(0, -1, 0)$ e $(1, 0, 0)$ e nessun punto lacunare.

2. Prendiamo in considerazione, in questa Nota, il campo funzionale limitato dalle seguenti due restrizioni:

a) Si ha $\Delta = 0$ solo *in un insieme discreto di punti* $a_i(x_i, y_i, z_i)$ *di cui gli eventuali punti di accumulazione siano all'infinito.* (I punti corrispondenti nella S saranno $A_i(X_i, Y_i, Z_i)$).

b) *I punti assintotici della trasformazione sono in numero finito,* l'accezione di punto assintotico essendo la seguente:

A è punto assintotico se esiste in s una linea (l) tale che m allontanandosi all'infinito lungo l, il punto corrispondente M abbia come limite A.

Possiamo allora dimostrare il seguente teorema:

Le funzioni di questo campo non ammettono punti lacunari.

Osserveremo, in primo luogo, che gli eventuali punti lacunari sono punti assintotici; sono dunque in numero finito come questi, secondo le nostre ipotesi restrittive.

Consideriamo allora nello spazio S una superficie Σ semplice, chiusa, regolare, che non passi per nessuno dei punti A_i e che racchiuda uno degli eventuali punti lacunari sia P (necessariamente isolato secondo le premesse) e nessun altro punto assintotico.

Le superficie σ, che corrispondono, in base alla (2), nello spazio s, sono tutte regolari e aperte (altrimenti tutti i punti che sono racchiusi nella Σ sarrebbero punti effettivi, raggiungibili, della funzione), ciascuna di esse separando dunque lo spazio s in due regioni semplicemente connesse ed infinite.

Sia (C) una curva semplice e chiusa sopra la superficie Σ, abbastanza ristretta intorno ad un punto dato perchè una delle curve (c) corrispondenti su σ abbia gli stessi caratteri topologici della (C). Sia M un punto interno alla Σ, diverso da P; Q un punto della (C) e QM una linea semplice (L) tutta interna a Σ e non passante per P. A questa linea corrisponde una linea semplice gm, g appartenendo a (c).

Consideriamo una successione regolare di linee (L) quando Q percorre la curva (C), formante una specie di cono racchiudendo all'interno P. Le linee (l) corrispondenti formano allora una superficie chiusa col vertice m e la direttrice (c).

Quest'ultimo fatto è topologicamente impossibile, inquantochè ad una superficie chiusa intorno a P non può corrispondere una superficie chiusa in s. Perciò è impossibile l'esistenza del punto P.

In particolare un sistema di tre polinomi P, Q, R ai quali si applica la restrizione *a*) verifica il teorema precedente.

Matematica. — *Sur les équations fonctionnelles linéaires d'ordre infini.* Nota di M. GHERMANESCO, presentata [1] dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Comme une extension naturelle des équations aux différences finies habituelles, je veux signaler l'équation d'ordre infini

$$\overset{x}{\underset{\infty}{E}} F(x) = \sum_{1}^{\infty} c_n F(x - \lambda_n) = g(x), \tag{1}$$

dont l'étude paraît assez remarquable dans certains cas.

On peut faire diverses hypothèses sur les constantes c_n, λ_n. J'en considérerai, dans leurs lignes générales, deux, qui me paraissent être dignes d'intérêt.

1. L'hypothèse la plus simple est $\sum |c_n|$ convergente et

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n| \to 0. \tag{A}$$

Ce cas se présente comme le résultat du passage à la limite du cas n fini et on peut l'étudier à l'aide des procédés signalés jusqu'à présent dans la théorie des équations aux différences finies. On peut, par exemple, commencer par définir une classe de polynômes d'Appell, solutions des équations particulières

$$\overset{x}{\underset{\infty}{E}} G_n(x) = x^n. \tag{2}$$

On démontre aisément que ces polynômes sont uniques, puisque, dans le cas contraire, la différence de deux polynômes, supposés distincts, devra être solution de l'équation homogène

$$\overset{x}{\underset{\infty}{E}} F(x) = 0, \tag{3}$$

qui n'admet pas les polynômes comme solutions.

On trouve aussi, comme je l'ai fait pour n fini [2], une limitation pour le module du polynôme $G_n(x)$

$$|G_n(x)| < Ae^{\lambda|x|} M^n, \tag{4}$$

(1) Nella seduta del 17 giugno 1934.

(2) « Acta Mathematica », to. 62, 1934, pp. 305-326.

A, M, λ étant des constantes, de sorte que, si dans le cas de l'équation (1), $g(x)$ admet un développement

$$g(x) = \sum g_n x^n,$$

la solution principale de (1), donnée par

$$F(x) = \sum_0^\infty g_n G_n(x),$$

est absolument et uniformément convergente lorsque la série $\sum g_n M^n$ est convergente. Ce cas se présente surtout, lorsque $g(x)$ est une fonction entière du type exponentiel $q(x^p)$, défini dans une Note antérieure (1).

On peut encore réduire l'équation fonctionnelle (1) à une équation différentielle linéaire d'ordre infini, admettant une solution de la forme

$$F(x) = \sum_0^\infty a_n g^{(n)}(x).$$

On trouve facilement $a_n = G_n(0)$ et, de la limitation de $|G_n(x)|$, on déduit une autre pour $|a_n|$ et la convergence absolue et uniforme de la solution trouvée s'étudie assez facilement.

2. Il y a cependant une deuxième hypothèse à faire sur les constantes c_n, λ_n, qui conduit à un point de vue très remarquable dont on peut étudier l'équation fonctionnelle (1) et auquel ne s'appliquent plus les méthodes habituelles de la théorie des équations aux différences finies.

Supposons $\sum c_n$ en général divergente et les constantes λ_n réelles et telles que

$$(B) \qquad \begin{cases} 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n \to \infty, \\ \lim \dfrac{\log n}{\lambda_n} = 0 \quad , \quad \lim \dfrac{\log |c_n|}{\lambda_n} = C. \end{cases}$$

L'étude d'un cas particulier simple nous montrera assez la difficulté du problème dans le cas général. Désignons par $f(x) = \sum_0^\infty c_n e^{-\lambda_n x}$ la somme de la série de Dirichlet écrite et considérons le cas particulier $g(x) = e^{\xi x}$.

L'équation fonctionnelle particulière

$$(5) \qquad \sum_0^\infty F(x - \lambda_n) = e^{\xi x}$$

(1) « C. R. », Paris, to. 198, 1934, pp. 1293-95.

admet la solution, facile à determiner,

$$F(x) = \frac{e^{\xi x}}{f(\xi)},$$

qui existe lorsque seulement $\Re(\xi) > C$. Lorsque ξ est en général un zéro d'ordre m de multiplicité de $f(x)$, la solution principale de l'équation (5) est

$$F(x) = (-1)^m \frac{x^m e^{\xi x}}{f^{(m)}(\xi)}.$$

Lorsque $\Re(\xi) \leq C$, l'équation (5) n'admet pas en général de solution.

Plus généralement, lorsque $g(x) = x^p e^{\xi x}$, l'équation

$$\overset{x}{\underset{\infty}{E}} F(x) = x^p e^{\xi x}$$

admet comme solution principale

$$F(x) = P_p(x) e^{\xi x}$$

$P_p(x)$ étant un polynôme du p^e degré en x. Si ξ est un zéro d'ordre m de $f(x)$, le degré du polynôme $P_p(x)$ s'augmente de m unités.

Signalons, à cette occasion, que l'équation homogène (3) admet la solution assez générale

$$F(x) = \sum P_n(x) e^{\xi_n x},$$

ξ_n étant un zéro de $f(x)$ et $P_n(x)$ le polynôme correspondant, ayant un degré d'une unité moindre que l'ordre de multiciplité de ξ_n comme zéro de $f(x)$.

Il est facile de déduire, de l'étude de ces cas particuliers, que l'équation (1) aura une solution toutes le fois que la fonction donnée $g(x)$ pourra être mise sous la forme

$$g(x) = \sum Q_n(x) e^{\xi_n x} \quad , \quad \Re(\xi_n) > C,$$

$Q_n(x)$ étant des polynômes de degrés quelconques en x. L'étude d'autres cas de résolution pourra apporter des contributions notables à la théorie des séries de Dirichlet.

3. Le problème de la résolution de l'équation fonctionnelle (1) peut être formulé aussi de la manière suivante:

Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction donnée $g(x)$ *puisse être développée en série uniformément convergente de la forme*

$$g(x) = \sum_{1}^{\infty} c_n \, \mathrm{F}(x - \lambda_n),$$

la fonction $\mathrm{F}(x)$ *étant à déterminer, ainsi que les constantes* c_n, λ_n. (Cas particulier: les constantes sont données).

De ce qui précède, on déduit le développement remarquable suivant pour x^m

$$x^m = \sum_{1}^{\infty} c_n \, \mathrm{G}_n(x - \lambda_n)$$

les constantes c_n, λ_n étant données et satisfaisant à la première hypothèse faite dans cette Note.

Je termine en ajoutant qu'on peut étudier encore l'équation fonctionnelle (1) dans deux autres hypothèses, déduites des celles du texte en les combinant, savoir:

a) $\sum c_n$ convergente et λ_n réelles, telles que

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n \to \infty;$$

b) $\sum c_n$ divergente et les λ_n telles que

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n| \to 0.$$

L'hypothèse *a*) peut d'ailleurs rentrer dans la deuxième hypothèse faite dans le texte (B).

Matematica (Geometria). — *Sur les surfaces de genres un possédant une involution de bigenre un.* Nota [1] di L. Godeaux, presentata dal Socio F. Enriques.

M. Enriques a démontré que toute surface de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$) représentait une involution d'ordre deux appartenant à une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$), birationnellement équivalente à une quadrique double [2]. D'autre part, il a montré qu'une surfaces de genres zéro et de bigenre un possède un groupe discontinu, infini, de transformations birationnelles en elle-même [3]. La raison intime en est l'existence, sur la surface, de courbes fixes découpant, sur les courbes elliptiques d'un faisceau, des couples de points non équivalents. On peut se demander si une surface de genres un, possédant une involution d'ordre deux et de bigenre un, possède également un groupe discontinu infini de transformations birationnelles en elle-même. La réponse est affirmative et cela provient de l'existence, sur la surface de genres un, de faisceaux de courbes elliptiques bisécantes.

D'une manière précise, nous démontrons le théorème suivant:

Si une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$) *possède une involution d'ordre deux et de genres zéro, bigenre un* ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$), *elle est transformée en elle-même par les trasformations birationnelles d'un groupe infini discontinu.*

1. Soit F une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$) contenant une involution I_2 d'ordre deux, de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$). Désignons par Φ une surface image de l'involution I_2. Considérons, sur Φ, deux courbes elliptiques isolées, irréductibles, Γ_1, Γ_2, mutuellement adjointes et par suite ne se rencontrant pas. On a

$$2\Gamma_1 \equiv 2\Gamma_2,$$

et les courbes $2\Gamma_1$, $2\Gamma_2$ appartiennent à un faisceau linéaire de courbes elliptiques $|\Gamma|$.

Désignons respectivement par C_1, C_2, $\overline{C}$ les courbes qui correspondent sur F aux courbes Γ_1, Γ_2, Γ. L'involution I_2 étant dépourvue de points

(1) Pervenuta all'Accademia il 23 luglio 1934.

(2) F. Enriques, *Un'osservazione relativa alle superficie di bigenere uno.* («Rend. R. Accad. Bologna», 13 gennaio 1908). Voir aussi notre Note: *Sur un théorème de M. Enriques concernant les surfaces de bigenre un.* («Bull. Soc. Roy. de Liége», 1933, pp. 154-156).

(3) F. Enriques, *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno.* («Memorie R. Soc. ital. Scienze (dei XL)», 1906, ser. 3ª, to. XIV, pp. 327-352). Voir aussi G. Fano, *Superficie algebriche di genere zero e bigenere uno, e loro casi particolari.* («Rend. Circolo Matem. Palermo», 1910, to. XXIX, pp. 98-118).

unis, les courbes $C_1, C_2, \overline{C}$ sont elliptiques. Les courbes $\overline{C}$ forment sur F un faisceau linéaire de courbes elliptiques qui comprend, au moins comme parties, les courbes C_1, C_2.

Supposons les courbes $\overline{C}$ irréductibles; chacune d'elles est transformée en elle-même par I_2. Si l'on désigne par D la courbe qui, avec C_1, forme une courbe $\overline{C}$, et par Δ la courbe qui lui correspond sur Φ, on a $\Gamma \equiv \Gamma_1 + \Delta$ et, puisque $\Gamma \equiv 2\Gamma_1$, on aura $\Delta \equiv \Gamma_1$. Par suite, la courbe C_1, comptée deux fois, forme une courbe $\overline{C}$. Pour la même raison, la courbe C_2, comptée deux fois, forme une courbe $\overline{C}$ et on a

$$2C_1 \equiv 2C_2.$$

Mais la division, sur une surface de genres un, est une opération univoque [1], donc on a $C_1 \equiv C_2$. On en déduit que les courbes C_1, C_2 appartiennent à un faisceau $|C|$ de courbes elliptiques. Les faisceaux $|\overline{C}|, |C|$ sont de degré zéro et une courbe $\overline{C}$ ne rencontre pas en général une courbe C; on en conclut que chaque courbe $\overline{C}$ est composée de deux courbes C, contrairement à l'hypothèse d'irréductibilité des courbes $\overline{C}$.

Les courbes $\overline{C}$ doivent donc être composées de deux parties, conjuguées par rapport à I_2 et formant nécessairement un faisceau $|C|$. Ce faisceau contient deux courbes qui sont leurs propres conjuguées par rapport à I_2, ce sont les courbes C_1, C_2.

On observera que les courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma$ sont en général irréductibles, par suite les courbes C_1, C_2, C sont en général irréductibles.

2. On peut toujours trouver, sur la surface Φ, trois faisceaux de courbes elliptiques $|\Gamma|, |\Gamma'|, |\Gamma''|$ contenant chacun deux courbes réduites à des composantes doubles, tels qu'une courbe d'un des faisceaux rencontre toute courbe d'un autre faisceau en quatre points. Si l'on prend par exemple pour modèle projectif de Φ la surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre (ce qui ne restreint pas la généralité), il suffit de considérer les faisceaux découpés sur cette surface par les quadriques passant par quatre des arêtes du tétraèdre formant un quadrilatère gauche.

Aux faisceaux $|\Gamma|, |\Gamma'|, |\Gamma''|$ correspondent, sur F, des faisceaux de courbes elliptiques $|C|, |C'|, |C''|$. Aux quatre points communs à une courbe Γ et à une courbe Γ' correspondent sur F huit points suivant lesquels deux courbes C rencontrent deux courbes C'. Par suite les courbes C rencontrent les courbes C' en deux points. De même, les courbes C'' rencontrent les courbes C, C' en deux points.

Cela étant, considérons deux courbes C', C'' déterminées. Elle ne peuvent découper sur les courbes de $|C|$ des couples de points équivalents, car alors,

(1) F. Severi, *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique.* (« Annales Ecole norm. sup. », 1908, pp. 449-468).

d'après un théorème de M. Severi [1], elles seraient équivalents, ce qui est impossible, ou bien, ajoutées à des composantes de courbes réductibles du faisceau $|C|$, elles donneraient des courbes équivalentes; mais cela est également impossible, puisque le faisceau $|C|$ ne contient pas en général de courbes réductibles. Pour la même raison, les multiples des couples de points envisagés ne peuvent être équivalents.

Il suffit maintenant de reprendre le raisonnement de M. Enriques. Désignons par ζ l'intégrale elliptique de première espèce attachée à la courbe C générale, par A′ la somme de ses valeurs aux points de rencontre de C avec C′, par A″ la somme analogue relative à C″. On aura une transformation birationnelle

$$\zeta' \equiv \zeta + A' - A'' \qquad \text{(mod. périodes)},$$

définie rationnellement sur chaque courbe C. Et cette transformation birationnelle ne peut être cyclique.

En intervertissant les rôles des courbes C, C′, C″, et en partant des autres faisceaux de courbes elliptiques existant sur Φ, on définira un groupe infini discontinu de transformations birationnelles de F en elle-même. Ainsi se trouve démontré le théorème énoncé au début.

Matematica. — *Sur l'équation fonctionnelle de S. Chapman et sur les problèmes des probabilités en chaîne.* Nota [2] di M. Fréchet, presentata dal Socio F. Severi.

Introduction. – Nous n'entrerons pas ici dans tous les détails historiques et bibliographiques qui seraient nécessaires. Ceux-ci seront donnés dans le mémoire complétant les résultats de la présente Note et fournissant leurs démonstrations.

Contentons-nous de dire qu'une équation fonctionnelle obtenue par S. Chapman à l'occasion d'une étude sur la diffusion a été mise par B. Hostinsky et A. Kolmogoroff sous une forme plus symétrique et plus simple et rattachée au problème plus général des des probabilités en chaîne.

Dans ce problème, on considère un système matériel dépendant d'un nombre fini, ν, de paramètres et qui peut prendre tous les états Q formant un certain ensemble V (qu'on peut considérer comme une région de l'espace à ν dimensions). On suppose alors qu'il existe une probabilité déterminée $\bar{\omega}(M, s; v, t)$ pour que le système passe de l'état M à l'instant s à un quelconque des états d'un ensemble v à l'instant t.

(1) F. Severi, *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche.* (« Annali di Matematica », 1906, ser. 3ª, to XII, pp. 55–79).

(2) Pervenuta all'Accademia il 6 agosto 1934.

La fonction $\bar{\omega}(M, s; v, t)$ est, en vertu du théorème des probabilités totales, une fonction additive de l'ensemble v. Il est clair que

$$\bar{\omega}(M, s; v, s) = \delta(M, v) \tag{1}$$

en désignant par $\delta(M, v)$ un nombre égal à 1 si M appartient à v et à zéro si M n'appartient pas à v. *Quand* $s < t$, *on peut* considérer le cas simple (qui n'est pas nécessairement le seul) où la fonction additive de l'ensemble v peut être représentée par une intégrale de Lebesgue

$$\bar{\omega}(M, s; v, t) = \int_v f(M, s; Q, t)\, dQ \tag{2}$$

où dQ est un élement de l'espace à ν dimensions et où $\int_v$ est une intégrale ν-uple.

Quand on fait cette hypothèse, on trouve qu'en appliquant les théorèmes des probabilités totale et composées, la fonction f satisfait à l'équation

$$f(M, s; P, t) = \int_V f(M, s; Q, u) f(Q, u; P, t)\, dQ \tag{C}$$

que nous appellerons l'équation de S. Chapman, et qui doit être vérifiée pour $s < u < t$.

Il est important de faire une observation au sujet de la validité de l'expression (2). Ecrite pour $s < t$, elle reste compatible avec la condition (1) *quand* M n'appartient pas à v. Il suffit, en effet de poser

$$f(M, s; Q, s) = 0 \quad \text{pour} \quad M \neq Q. \tag{3}$$

Mais alors, la formule (2) *ne saurait subsister pour* $s = t$ *quand* M *appartient à* v.

Dès lors, il n'y a pas lieu de définir la valeur de $f(M, s; M, s)$. Ou encore; si une expression analytique de $f(M, s; Q, t)$ garde un sens quand on a simultanément $s = t$, $M = Q$, sa valeur ne saurait être considérée comme utilisable dans (2) pour $s = t$.

Nouvelle forme de solutions. – Nous avons eu ailleurs l'occasion de faire prévoir l'existence de deux formes très générales de solutions de l'équation (C).

Nous ne traiterons ici que la première. On l'obtient en appliquant une méthode classique en physique mathématique. Cette méthode consiste à chercher les solutions d'un problème qui se présentent sous la forme de séries de termes dont chacun est le produit de deux fonctions ne dépendant pas des mêmes variables.

On obtient alors ici comme solutions formelles de l'équation (C) toutes les fonctions de la forme

$$(4) \qquad f(M, s; P, t) = \sum_{i=1}^{i=+\infty} A_i(M, s)\, B_i(P, t)$$

où les fonctions A_i, B_i forment n'importe quel système biorthonormé sur V, c'est à dire, sont telles que

$$(5) \qquad \int_V A_i(M, s)\, B_j(M, s)\, dM = \delta_{ij}$$

où

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j . \end{cases}$$

Pour que cette solution (4), fournisse, sous les conditions (5), non seulement une solution de l'équation de Chapman, mais une solution du problème de probabilités correspondant, il faut que plusieurs conditions soient satisfaites. On doit avoir

$$0 \leq \bar{\omega}(M, s; v, t) \leq 1 .$$

D'ailleurs, il suffit pour cela qu'on ait

$$0 \leq \bar{\omega}(M, s; v, t) \quad \text{et} \quad \bar{\omega}(M, s; V, t) = 1$$

pour $s < t$ et par suite qu'on ait les deux conditions

$$(P) \qquad f(M, s; P, t) \geq 0$$

$$(T) \qquad \int_V f(M, s; P, t)\, dP = 1 .$$

Pour la seconde condition, il faut et il suffit que l'unité puisse être développable en série de la forme

$$(6) \qquad 1 = \sum_{i=1}^{i=+\infty} \beta_i A_i(M, s)$$

à coefficients β_i constants.

Par contre, il n'est pas nécessaire que la série (4) converge toujours. Il suffit qu'elle converge pour $s < t$.

Pour $s = t$, aussi bien que pour $s > t$, il n'est nécessaire ni de supposer que la série du second membre de (4) converge, ni même, si elle converge, que l'égalité (4) a lieu. Mais s'il en est ainsi, on devra avoir

$$(7) \qquad \sum_{i=1}^{i=+\infty} A_i(M, s)\, B_i(P, s) = 0 \quad \text{pour} \quad M \neq P .$$

D'ailleurs, dans ce cas, la convergence ne pourra être uniforme quand un des points M, P restant fixe, l'autre varie sur V. Car dans ce cas, en multipliant par $A_j(P,s)\,dP$ et intégrant, on aurait en vertu de (5), $A_j(M;s)\equiv 0$, quelque soient j, M, s.

En ce qui concerne la condition (P), on pourra s'assurer sur chaque exemple si elle est verifiée ou non.

Exemple. – Prenons le cas où $\nu = 1$ et où V est l'intervalle $(0,\pi)$. En employant les notations ordinaires x,y,z au lieu de M, P, Q, on satisfera à toutes les conditions du problème des probabilités en chaine en posant

$$\bar{\omega}(x,s;v,s) = 1$$

quand x appartient à l'ensemble linéaire v, et

$$(8)\qquad \bar{\omega}(x,s;v,t) = \int_v f(x,s;y,t)\,dy$$

quand $s<t$ avec

$$(9)\qquad f(x,s;y,t) = \frac{1}{\pi}\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{n=+\infty}\theta^n \cos nx \cos ny\right\}$$

avec

$$\theta = \frac{a(s)}{a(t)}$$

où $a(s)$ est une fonction positive croissante.

Le seconde membre converge uniformément en x et y quand $s<t$. On en conclut

$$(10)\quad f(x,s;y,t) = \frac{1-\theta^2}{2\pi}\left\{\frac{1}{1-2\theta\cos(x+y)+\theta^2} + \frac{1}{1-2\theta\cos(x-y)+\theta^2}\right\}.$$

Cette forme de f montre que $f(x,s;y,t)>0$ pour $s<t$.

Quand $s=t$ et si x n'appartient pas à v, on peut encore définir $\bar{\omega}$ par la formule (8) pourvu que f soit représenté par la formule (10) qui converge vers zéro quand $x\neq y$ et $s=t$ simultanément. On a même:

$$\lim_{t\to s}\left(\frac{1}{t-s}\right) f(x,s;y,t) = \frac{a'(s)}{\pi a(s)}\,\frac{1-\cos x\cos y}{(\cos x-\cos y)^2}.$$

Par contre, $f(x,s;x,t)$ tend vers l'infini quand t tend vers s et même:

$$\lim_{t\to s}(t-s) f(x,s;x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\dfrac{a'(s)}{a(s)} & \text{si } 0<x=y<\pi \\ \dfrac{2}{\pi}\dfrac{a'(s)}{a(s)} & \text{si } x=y=\begin{cases}0\\ \text{ou}\\ \pi\end{cases}\end{cases}.$$

Le problème le plus important dans la théorie des probabilités en chaine est d'étudier le comportement de $\bar{\omega}(x, s; J, t)$ (où J est un intervalle (α, β) donné) quand t croit indéfiniment.

Dans le cas de l'exemple actuel, deux cas seulement se présentent:

I – ou bien $a(t) \to +\infty$ avec t;

et alors la loi de probabilité tend à devenir indépendante de x et s et même à devenir uniforme, c'est à dire que

$$\lim_{t \to +\infty} \bar{\omega}(x, s; J, t) = \frac{\beta - \alpha}{\pi}$$

II – ou bien $a(t)$ tend vers une limite finie l quand $t \to +\infty$. Alors $\bar{\omega}(x, s; J, t)$ tend encore vers une limite, mais cette limite dépend à la fois de x, de s et de J.

Remarque. – Après un exemple fourni par B. Hostinsky, la formule explicite (10) présente un autre exemple d'une solution du problème ne rentrant pas dans la classe de solutions signalée par M. Kolmogoroff, solutions qui vérifient une équation de la forme

$$\frac{\partial f}{\partial s} + A(x, s)\frac{\partial f}{\partial x} + B^2(x, s)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

La fonction (10) substituée dans cette équation, ne peut, en effet, pour aucun choix des fonctions $A(x, s)$, $B(x, s)$, conduire à une identité.

D'autre part les solutions très générales (4), (5) présentées ci-dessus sont d'une forme très différentes de celles qu'a fait connaître B. Hostinsky dans ses dernieres conférences à Paris. Ces conférences n'étant pas encore publiées, il nous a été impossible de vérifier si, en outre de la différence considérable de forme, elles en sont substantiellement distinctes.

Meccanica. — *Sulla teoria della turbolenza.* Nota [1] di C. Ferrari, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. In una serie di Note apparse di recente G. D. Mattioli ha sviluppato una teoria della turbolenza servendosi di un metodo, che almeno formalmente, differisce alquanto da quello solito usato dagli altri Autori nello studio dello stesso problema, ed ha ottenuto risultati la cui concordanza coi risultati sperimentali appare molto soddisfacente. Poichè però le formole che il Mattioli determina hanno una espressione diversa da quelle ritrovate da Prandtl e e da Kàrmàn, il cui accordo coll'esperienza è pure ottimo, mentre una delle due equazioni fondamentali della teoria che il Mattioli sviluppa, e precisamente quella indicata come seconda nelle Note su citate, non appare a me sufficientemente giustificata dal punto di vista fisico, mi sembra opportuno mettere in chiaro come la nuova teoria contenga un'ipotesi, certo non irragionevole *a priori*, ma in sostanza arbitraria; ed indicare come, pure applicando lo stesso metodo, si possano ritrovare i risultati di Prandtl e di Kàrmàn.

2. Il Mattioli considera il movimento turbolento di un fluido perfetto entro un tubo rotondo; la massa fluida è disgregata ed i suoi elementi si mescolano continuamente fra loro; se l è il percorso di mescolamento, da ogni elemento di volume P le particelle disgregate sono espulse egualmente nei due versi, e percorrono la lunghezza l prima di mescolarsi con altra massa fluida, a cui cedono la quantità di moto ed il momento della quantità di moto possedute. La massa che nel tempo dt è espulsa dall'elemento di volume dP per ciascuno dei due versi è $\rho k d\mathrm{P} dt$, essendo ρ la densità e k una funzione del raggio r che ha le dimensioni di una frequenza. Applicando il teorema della quantità di moto alla massa fluida contenuta entro il cilindro di raggio r e racchiuso fra due sezioni normali all'asse del tubo distanti dx, il Mattioli deduce la prima equazione della sua teoria

$$(1) \qquad -\rho l^2 kr \frac{dv}{dr} = \frac{\sigma r^2}{2}$$

dove σ è il gradiente di pressione lungo il tubo $\left(\sigma = \frac{dp}{dx}\right)$, e v è la velocità. Il Mattioli applica quindi il teorema dei momenti della quantità di moto alla massa contenuta entro un settore di ampiezza $\Delta\varphi$ della corona cilin-

(1) Pervenuta all'Accademia il 12 luglio 1934.

drica di altezza Δr, e trova che l'*eccesso* di momento di quantità di moto uscito dal settore stesso rispetto a quello entrato è

$$\Delta = \rho \frac{\varepsilon^2}{12} \frac{d}{dr}\left(l^2 kr \frac{d^2 v}{dr^2}\right) \Delta\varphi \cdot \Delta r \tag{2}$$

avendo supposto che le particelle, che prendono parte al trasporto turbolento, siano parallepipede, uguali fra loro e di dimensioni ε secondo il raggio. Questa variazione Δ del momento di quantità di moto richiede l'esistenza di una coppia applicata al fluido, che è posta uguale a $\rho \frac{\varepsilon^2}{12} \Gamma r \Delta\varphi \Delta r$. Ora il Mattioli, che non vuole entrare nel problema di determinare da che cosa realmente questa coppia proceda, e come sia applicata al fluido, la pone senz'altro proporzionale a $\frac{d^2 v}{dr^2}$, perchè essa sarebbe certamente nulla se $\frac{dv}{dr}$ fosse costante dovunque: a questa posizione è però da osservare che la dipendenza della coppia dalla legge di variazione della velocità è già data dalla (2), dalla quale risulta appunto che annullandosi ovunque $\frac{d^2 v}{dr^2}$ la coppia stessa sarebbe nulla in ogni punto. Ogni altra considerazione basata su questo solo fatto è puramente ipotetica, e non dello stesso grado di arbitrarietà con cui si pongono le tensioni in un fluido viscoso semplicemente proporzionali alle velocità di deformazione in quanto, prescindendo dalle giustificazioni che dà delle formole relative la teoria cinetica dei gas, dette tensioni esistono realmente come forze applicate al fluido, e dipendono dalle velocità stesse secondo una legge *a priori* incognita. Nel problema in esame invece le uniche forze applicate sono pressioni normali, che, se costanti in ogni sezione trasversale, come il Mattioli suppone, sono incapaci di sviluppare la coppia (2), e se variabili la loro legge di variazione è definita senz'altro dalla (2), precisamente come la legge di variazione della pressione lungo l'asse del tubo è definita dalla (1). E di fatto per rendersi conto dell'arbitrarietà della posizione del Mattioli basta considerare i risultati a cui essa porterebbe qualora fosse applicata per stabilire l'equazione (1): l'eccesso della quantità di moto uscita rispetto a quella entrata è per una corona cilindrica di altezza Δr

$$-2\pi\rho \frac{d}{dr}\left[l^2 kr \frac{dv}{dr}\right] \Delta r ,$$

e questa deve essere uguale alla forza applicata allo stesso fluido. Poichè essa sarebbe certamente nulla se v fosse ovunque costante, si potrà ritenere detta forza proporzionale a $\frac{dv}{dr}$ e quindi $dF = 2\pi dr h \frac{dv}{dr}$, in cui h non dipende da r; e poichè è $dF = 2\pi r dr \rho\sigma$ si dedurrebbe $v = ar^2$!

Si deve ancora osservare che la (2) non è l'unica variazione del momento di quantità di moto della massa fluida contenuta entro Δr: di fatto in conseguenza del fenomeno di rimescolamento varia non solo la quantità di moto in ogni singola corona di altezza dr (dr infinitesimo rispetto a Δr), ma anche il suo momento rispetto al baricentro della massa considerata.

In ogni modo determinata la variazione complessiva Δ del momento della quantità di moto della massa contenuta entro la corona di altezza Δr, se la pressione è supposta distribuita uniformemente in ogni sezione trasversale, per l'equilibrio della massa stessa non può essere che $\Delta = 0$; e se i risultati che così si ottengono non sono in accordo con quelli dati dagli esperimenti segno è che l'ipotesi della costanza della pressione è falsa e che pertanto deve essere modificata definendola in base all'espressione di Δ, ed introducendo per il gradiente di p in direzione di r qualche costante sperimentale, come si fa per il gradiente di p nella direzione x dell'asse del tubo.

3. Riprendo pertanto in esame il problema tenendo presente i criteri sopra esposti; per maggiore semplicità però e coll'intento di ritrovare, pur col metodo indicato dal Mattioli, i risultati delle teorie di Prandtl e di Kàrmàn, considero il movimento turbolento di un fluido perfetto non lungo un tubo rotondo, ma in un piano, ed in luogo della funzione k introdotta dal Mattioli per caratterizzare la massa che prende parte al fenomeno di rimescolamento, considero, come fanno Prandtl e Kàrmàn, la componente v' della velocità propria del moto turbolento normale alla parete dell'ostacolo lambita dalla corrente che suppongo diretta come la velocità del moto medio secondo l'asse x.

L'applicazione del teorema della quantità di moto alla massa contenuta nel rettangolino elementare dy, dx, conduce alla nota equazione di Prandtl

$$\frac{dp}{dx} = -\rho \frac{d}{dy}\left(\overline{u'v'}\right) \tag{3}$$

in cui u' e v' sono le oscillazioni delle componenti della velocità rispettivamente nelle direzioni x e y indotte dalla turbolenza del moto, e ponendo $\overline{u'v'}$ il valor medio del loro prodotto. Se l è il percorso di mescolamento dei gruppi di molecole, è, secondo Prandtl,

$$u' = \pm l \frac{du}{dy} \quad ; \quad v' = \pm hl \frac{du}{dy}$$

dove u è la velocità media ed h una costante. Posto $\frac{dp}{dx} = -\sigma$ (σ costante positiva) la (3) risulta

$$\sigma = \rho \frac{d}{dy}\left[k_1 l^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2\right] \tag{4}$$

in cui k_1 è pure una costante. Applico ora il teorema del momento della quantità di moto alla massa fluida contenuta nel rettangolino $\Delta x, \Delta y$, il cui ordine di grandezza è uguale a quello delle dimensioni dei gruppi molecolari che prendono parte al trasporto turbolento. In ogni punto si ha una rotazione che ha l'asse normale al piano del moto, ed il modulo ω che risulta di una quantità costante $\omega_0 = \frac{du}{dy}$, e di una quantità variabile $\omega' = l\frac{d\omega_0}{dy} = l\frac{d^2u}{dy^2}$. La massa fluida che nel fenomeno di rimescolamento attraversa uno strato generico Δx è $\rho v' \Delta x$, e se ε^2 è il quadrato del suo raggio di inerzia, il momento della quantità di moto della massa stessa rispetto al proprio baricentro è $\rho \Delta x\, \varepsilon^2\, v'\, \omega$, per cui la variazione del momento di quantità di moto Δ_1 della massa entro il rettangolino considerato è $\rho\, \Delta x\, \Delta y \frac{d}{dy}[\varepsilon^2 \overline{v'\, \omega'}]$ indicando sempre col tratto sopra le lettere il valor medio nel tempo della espressione corrispondente. Si ha perciò

$$\Delta_1 = \rho\, \Delta x\, \Delta y \frac{d}{dy}\left[k_2\, \varepsilon^2\, l^2 \frac{du}{dy}\frac{d^2u}{dy^2}\right] \tag{5}$$

in cui k_2 è una costante. D'altra parte, sempre in conseguenza del fenomeno di rimescolamento, la massa che attraversa uno strato generico Δx, ossia $\rho v' \Delta x$, apporta un incremento di quantità di moto $\rho \overline{v'u'} \Delta x$, il cui momento rispetto al baricentro della massa fluida considerata è $\rho \overline{v'u'}\, y_g\, \Delta x$, se y_g è la coordinata della striscia Δx considerata rispetto al baricentro del rettangolino Δy. Per una striscia di spessore dy_g (dy_g infinitesimo rispetto a Δy) la variazione del momento della quantità di moto corrispondente è

$$\rho\, \Delta x \frac{d}{dy_g}\left(\overline{v'u'}\, y_g\right) dy_g$$

e per tutto Δy è

$$\Delta_2 = \rho\, \Delta x\, \Delta y \left(\overline{v'u'}\right)_0$$

se $\left(\overline{v'u'}\right)_0$ è il valor medio nel tempo del prodotto $v'u'$ calcolato nel baricentro del rettangolino considerato. Ma per la (3) è $\left(\overline{v'u'}\right)_0 = \frac{\sigma}{\rho} y$, se y è la coordinata del baricentro stesso, ed assumendo l'origine delle coordinate nel punto in cui u è massimo e pertanto $\frac{du}{dy} = 0$. Si ha quindi

$$\Delta_2 = \rho\, \Delta x\, \Delta y \frac{\sigma}{\rho} y = \Delta x \cdot \Delta y\, \sigma y. \tag{6}$$

Per l'equilibrio deve essere

$$(7) \qquad \Delta_1 + \Delta_2 = 0 = \rho \frac{d}{dy}\left[\varepsilon^2 k_2 l^2 \frac{du}{dy}\frac{d^2u}{dy^2}\right] + \sigma y$$

e pertanto

$$(8) \qquad \varepsilon^2 k_2 l^2 \frac{du}{dy}\frac{d^2u}{dy^2} = -\frac{\sigma}{\rho}\frac{y^2}{2}$$

ponendo uguale a zero la costante d'integrazione perchè per $y = 0$ è $\frac{du}{dy} = 0$.

Dalla (4) si ha poi

$$(9) \qquad k_1 l^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2 = \frac{\sigma}{\rho} y .$$

4. Fino ad ora nessuna ipotesi è stata fatta oltre a quelle solite in problemi come quello in esame; è necessario però adesso, per ottenere una soluzione, definire in qualche modo plausibile la legge di variazione di ε lungo y. Ora ε dipende manifestamente dalle dimensioni delle particelle che prendono parte al trasporto turbolento; sembra verosimile che queste siano tanto maggiori quanto più la vorticità è intensa, ed in particolare si annullino dove $\omega = \frac{du}{dy} = 0$, ossia per il riferimento adottato, per $y = 0$. D'altra parte le dimensioni delle particelle stesse devono essere pure nulle quando l è nulla, e pertanto sembra ipotesi verosimile il porre $\varepsilon^2 = hly$ in cui h è una costante adimensionale. Con ciò la (8) diventa

$$(8^{bis}) \qquad k_3 l^3 \frac{du}{dy}\frac{d^2u}{dy^2} = -\frac{\sigma}{\rho} y$$

che divisa per la (9) dà

$$(10) \qquad l = c \left| \frac{\frac{du}{dy}}{\frac{d^2u}{dy^2}} \right|$$

ossia la nota formola di Kàrmàn, che definisce la legge di variazione della lunghezza libera di percorso dei gruppi di molecole, e che è stata da Kàrmàn, determinata nell'ipotesi della similitudine delle perturbazioni del moto indotte dalla turbolenza.

Fisica. — *Effetto del vapore di mercurio sopra i termini alti degli alcalini* [1]. Nota [2] di B. PONTECORVO, presentata dal Socio O. M. CORBINO.

L'effetto della pressione di gas estranei (H_2, N_2, He, A) sopra i termini alti delle serie spettrali è stato studiato recentemente da E. Amaldi e E. Segrè [3]. E. Fermi [4] ha dato una teoria quantitativa dell'effetto, il quale consiste in uno spostamento del limite della serie, proporzionale alla concentrazione del gas estraneo; tale spostamento inoltre, almeno nei casi sin qui studiati, dipende soltanto dalla natura del gas perturbatore e non da quella del vapore assorbente. L'effetto può ascriversi a due azioni distinte degli atomi perturbatori: *a*) Poichè nei termini elevati delle serie entro il volume dell'atomo assorbente viene a trovarsi un gran numero di atomi perturbatori, si comprende come questi ultimi si polarizzino nel campo del resto atomico; quest'azione, dipendente dalla costante dielettrica del gas estraneo, genera un abbassamento dei termini elevati rispetto al termine fondamentale ossia uno spostamento delle righe verso il rosso. *b*) Gli atomi del gas perturbatore possono descriversi come buche di potenziale disseminate sul cammino dell'elettrone luminoso. Questa azione tende a spostare le righe elevate verso il rosso o verso il violetto, a seconda dei casi; dalla teoria di Fermi si ricava la grandezza dello spostamento del termine in funzione della concentrazione del gas perturbatore e della sezione d'urto limite per velocità nulla di elettroni contro gli atomi del gas estraneo. I gas fin qui studiati hanno sezioni d'urto relativamente piccole, per elettroni lenti; è quindi interessante studiare l'effetto sopra il limite delle serie di Na e K di un gas, come il mercurio, il quale abbia una sezione d'urto molto grande, per elettroni di 0.5 volt, e di cui nulla è noto per valori più bassi dell'energia.

Nel § 2 si descrivono le esperienze; nel § 3 si discutono i risultati.

§ 2. Lo spettrografo usato è l'E_1 di Hilger, che dà all'incirca una dispersione di $53\ \frac{cm^{-1}}{mm}$ presso il limite della serie del K (2856 Å) e di $40.5\ \frac{cm^{-1}}{mm}$ presso il limite della serie di Na (2412 Å). La sorgente per lo spettro continuo è una lampada a idrogeno di pyrex alimentata con 5000 volt e 0.4 ampère in corrente alternata a 50 periodi. Le pose erano di 25 minuti; si sono usate lastre Cappelli rosse.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Roma.
(2) Pervenuta all'Accademia il 18 luglio 1934.
(3) E. AMALDI ed E. SEGRÈ, «Nuovo Cimento», *11*, 145, 1934.
(4) E. FERMI, «Nuovo Cimento», *11*, 157, 1934.

Il tubo in cui erano riscaldati Na e K era di ferro, lungo circa 1 m., con diametro di 24 mm.; in mezzo al tubo era fissata con saldatura autogena una canna, che veniva a trovarsi durante l'esperienza in posizione verticale, lunga 13 cm. con un diametro di 6 mm.; la canna veniva in parte riempita di mercurio. Il tubo e la canna erano riscaldati elettricamente; durante la fotografia a bassa pressione di Hg era riscaldato soltanto il tubo, mentre la canna veniva raffreddata con un getto di aria fredda; si riscaldava quindi anche la canna e si attendeva circa 20′ prima di eseguire la fotografia in alta pressione, per riportarsi in condizioni stazionarie. Lungo il tubo e lungo la canna la distribuzione di temperatura in corrispondenza alle varie correnti di riscaldamento usate è nota da misure fatte con una pinza termoelettrica Pt — Pt Rh. La temperatura, al centro del tubo, variava nelle diverse esperienze da 500° a 550°.

Il vuoto veniva fatto con una pompa avviatrice; il tubo era poi in comunicazione con un manometro metallico, per le forti pressioni, e uno a aria libera, per le deboli. Per evitare che il mercurio si depositi quasi istantaneamente sulle pareti fredde, occorre introdurre nel tubo un gas: si sono scelti H_2 e N_2, dei quali è noto l'effetto sulle righe; la massima pressione del gas introdotto era di $\frac{5\ \text{Kg.}}{\text{cm}^2}$, mentre le pressioni di Hg ottenute erano molto minori. Sembrerebbe che si potesse annullare l'effetto sulle righe del gas, per esempio H_2, mantenendone costante la pressione nelle fotografie a bassa e alta pressione di Hg; ciò non è vero per la ragione seguente: nella fotografia ad alta pressione di Hg, quest'ultimo scaccia in parte l'idrogeno, per modo che si viene ad avere una concentrazione di H_2 minore di quella corrispondente alla fotografia a bassa pressione di Hg: in definitiva, poichè l'idrogeno sposta le righe verso il violetto, nella fotografia ad alta pressione di Hg, oltre all'effetto di Hg vi sarà uno spostamento verso il rosso dovuto alla diminuita concentrazione di H_2. Per quel che riguarda l'azoto si è supposto che esso non sposti sensibilmente le righe in base ai risultati di Amaldi e Segrè. La concentrazione di Hg, la cui conoscenza è essenziale in una ricerca di questo genere, poteva determinarsi solo con misure estremamente imprecise: si è pensato dapprima di misurare la pressione di Hg in base alla larghezza della riga λ 2537 Å, utilizzando un lavoro di Kuhn e Freudenberg [1], i quali hanno determinato appunto l'allargamento di questa riga a diverse pressioni di Hg; questo metodo è però molto impreciso perchè le condizioni sperimentali sono diverse da quelle di Kuhn e Freudenberg, nel nostro caso irrealizzabili. Si è infine usato il seguente artifizio: *a*) Viene fatta una esperienza con $Hg + N_2$; si misura lo spostamento delle righe, che è dovuto al solo Hg, e la larghezza della 2537 in alta pressione. *b*) Si fa una fotografia con $Hg + H_2$, in cui la 2537 in alta

(1) H. Kuhn und Freudenberg, « ZS. f. Phys. », 76, 38, 1932.

pressione abbia la stessa larghezza che in *a*). Lo spostamento delle righe in *b*) è dovuto alla somma degli effetti di Hg e H_2; l'effetto del solo Hg è noto da *a*); si può ricavare quindi lo spostamento dovuto soltanto alla diminuzione di concentrazione di H_2; a questo spostamento corrisponde una diminuzione di concentrazione nota dal lavoro citato. Tale concentrazione è uguale a quella di Hg cercata, come si vede subito osservando che all'idrogeno scacciato si è sostituito il vapore di mercurio. Evidentemente questo metodo è molto inesatto; tuttavia dà la possibilità di avere un'idea dell'ordine di grandezza dello spostamento delle righe per effetto di Hg.

§ 3. Entro i limiti della precisione delle misure lo spostamento è uguale nel sodio e nel potassio. In ciascuna lastra poi lo spostamento di ogni riga è sensibilmente costante al crescere del numero quantico totale, nelle fotografie con Hg + N_2; è bene tuttavia dire che N_2 rende assai diffuse le righe, per modo che per Na, per esempio, le misure possono farsi soltanto fino alla riga 3 S — 15 P; sembra invece che Hg diffonda le righe in misura minore di N_2, come risulta dalle lastre fatte con l'idrogeno e dal fatto che, nelle fotografie con l'azoto, le righe ad alta pressione di Hg sono più sottili di quelle a bassa. La massima concentrazione di Hg era ottenuta in una fotografia con N_2 per una larghezza della 2537 di 2100 cm.$^{-1}$: in corrispondenza lo spostamento del limite della serie era soltanto di 1.5 cm.$^{-1}$.

Per una coppia di lastre, con H_2 e N_2, in cui la larghezza della 2537 era identica (circa 1130 cm.$^{-1}$ in alta pressione e alcuni cm.$^{-1}$ in bassa pressione), si è trovato uno spostamento medio dei termini di 2,7 cm.$^{-1}$ verso il rosso, nella fotografia con Hg + H_2 (A), e di 0.5 cm.$^{-1}$, pure verso il rosso, nella fotografia con Hg + N_2. Da quanto è stato detto risulterebbe in (A) uno spostamento dovuto al solo H_2 di 2.2 cm.$^{-1}$, spostamento che corrisponde a una concentrazione di $1.2 \cdot 10^{19}$ cm.$^{-3}$. Tale sarà pure la concentrazione di Hg che ha spostato l'H_2, o meglio la differenza delle concentrazioni di Hg ad alta e a bassa pressione. Conoscendo la concentrazione n di Hg si può anzitutto determinare l'abbassamento Δ_ε dei termini per effetto della costante dielettrica ε, dalla teoria [1].

Il valore $\varepsilon = 1.00074$, tratto dalle Int. Crit. Tab., corrisponde a una misura in campi elettrici variabili con frequenze di 10^8 sec.$^{-1}$, frequenze comparabili a quelle di rotazione dell'elettrone lungo l'orbita, date dalla differenza di frequenza di due righe successive.

Si trova $\Delta_\varepsilon = +0.7$ cm.$^{-1}$ (+ significa spostamento verso il rosso). Poichè lo spostamento sperimentale Δ è di +0.5 cm.$^{-1}$, si conclude che l'effetto, cui è legata la sezione d'urto σ limite per velocità nulla di elettroni contro atomi di Hg, consiste in uno spostamento verso il violetto:

$$\Delta_\sigma = -0.2 \text{ cm.}^{-1}.$$

(1) E. Fermi, loc. cit.

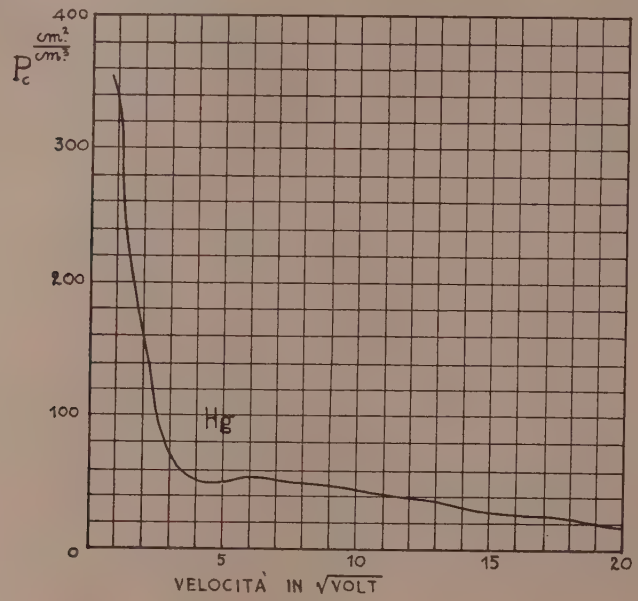
Sostituendo i valori trovati di Δ_σ e n nella formula [1]

$$\Delta_\sigma = \frac{h}{4\,\pi^{3/2}\,mc}\sqrt{\sigma}\,n = 1.09 \cdot 10^{-11}\sqrt{\sigma}\,n \text{ cm.}^{-1}$$

si ricava:

$$\sigma = 0.03 \cdot 10^{-16} \text{ cm.}^2. \tag{1}$$

Conviene spesso introdurre la grandezza [2] $P_c = 3.56 \cdot 10^{16}\,\sigma \frac{\text{cm.}^2}{\text{cm.}^3}$, detta coefficiente di assorbimento.



Nel nostro caso da (1) si ricava:

$$P_c = 0.1 \frac{\text{cm.}^2}{\text{cm.}^3}. \tag{2}$$

Per confrontare la (2) con i dati sperimentali diretti sopra le sezioni d'urto di elettroni lenti, osserviamo che nei vapori metallici l'andamento di P_c in funzione della velocità degli elettroni è molto diverso da quello che si riscontra in quasi tutti gli altri gas.

Nel caso dei gas nobili, per esempio, la sezione d'urto ha un massimo per elettroni di alcuni volt: scende rapidamente quando diminuisce ulteriormente la velocità e raggiunge poi un minimo per elettroni di velocità minore

(1) E. Fermi, loc. cit.

(2) C. Ramsauer e R. Kollath, «Handbuch der Physik», XXII. Berlino, 1933; R. B. Brode, «Rev. Mod. Phys.», 5, 527, 1933.

di 1 volt. Per i vapori di Hg [1] per contro tale andamento è illustrato nella figura (Brode); essa mostra che, al diminuire dell'energia degli elettroni, la sezione d'urto cresce rapidamente senza raggiungere un massimo nel tratto delle velocità elettroniche studiate sperimentalmente, tratto che si estende fino a un valore minimo di 0.5 volt. Ora dalla (2) risulta chiaramente che, in corrispondenza a un valore dell'energia degli elettroni minore di 0.5 volt, la sezione d'urto del mercurio raggiunge un massimo, e per energie molto piccole diventa di alcuni ordini di grandezza minore della sezione d'urto di elettroni di 0.5 volt.

Si osservi che, per quanto grossolana possa essere la valutazione fatta di P_c, e anche se l'effetto osservato sulle righe dovesse attribuirsi in parte all'azoto, resta il fatto che Hg ha un'azione debolissima sui termini alti degli alcalini; è ragionevole quindi concludere, indipendentemente da ogni considerazione quantitativa, che la sezione d'urto di elettroni convenientemente lenti contro atomi di Hg può assumere valori assai bassi in confronto a quelli corrispondenti a velocità di 0.5 volt.

Fisica (Fisica-Matematica). — *Numero dei tensori isotropi ed emisotropi in spazi a più dimensioni.* Nota II [2] di G. Racah, presentata dal Corrisp. U. Cisotti.

In una Nota precedente [3] ho determinato il numero dei tensori isotropi ed emisotropi indipendenti in un S_r euclideo, basandomi sulla sola condizione di isotropia (cioè sull'invarianza delle singole componenti per una qualsiasi rotazione degli assi), ed applicando a questa condizione le proprietà fondamentali del gruppo delle rotazioni. Era questa la via logicamente più diretta, ma i resultati cui essa portava erano piuttosto complicati nell'applicazione.

Mi propongo ora di risolvere il medesimo problema utilizzando una conseguenza della condizione di isotropia, cioè il fatto che tutti i tensori isotropi di un dato ordine si ottengono permutando gli indici di un unico tensore isotropo fondamentale. Il numero di questi tensori sarà perciò legato alle proprietà del gruppo delle permutazioni di n indici, che, essendo un gruppo discreto, è sotto certi aspetti più semplice allo studio che non il gruppo delle rotazioni.

(1) R. B. Brode, «Proc. Roy. Soc.», A, *109*, 397, 1925; «Proc. Roy. Soc.», A, *125*, 134, 1929; T. J. Jones, «Phys. Rev.», *32*, 459, 1928; L. R. Maxwell, «Proc. Nat. Acad. Sci.», *12*, 509, 1926; H. Beuthe, «Ann. d. Phys.», *84*, 949, 1927. (Questo ultimo lavoro non è in accordo con quelli precitati).

(2) Pervenuta all'Accademia il 28 luglio 1934.

(3) G. Racah, questi «Rendiconti», XVIII, 135, 1933.

1. Come ha dimostrato la Pastori [1] l'espressione generale di un tensore di ordine $n = 2k$ è

$$(1) \qquad T_{i_1 i_2 \cdots i_{2k}} = \sum_s a_s P_s \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \cdots \delta_{i_{2k-1} i_{2k}},$$

dove la somma va estesa alle $2n!$ permutazioni P_s degli indici i. Ma il fatto che esistano $n!$ operatori linearmente indipendenti del tipo

$$(2) \qquad \sum_s a_s P_s$$

non vuol dire che esistano $n!$ tensori linearmente indipendenti del tipo (1) perchè, data la simmetria del tensore

$$(3) \qquad \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \cdots \delta_{i_{2k-1} i_{2k}}$$

cui questi operatori vengono applicati, molti dei tensori (1) si annullano, e bisogna perciò vedere quanti ne restano di linearmente indipendenti.

Come resulta dai lavori di Frobenius [2], Weyl [3] ed altri [4], si possono assumere come base per l'insieme lineare degli operatori (2), $n!$ operatori linearmente indipendenti e classificabili in un certo numero di classi di simmetria: ognuna di queste classi, caratterizzata da una certa successione Σ_f di numeri interi non negativi $f_1 \geqq f_2 \geqq \cdots \geqq f_p \geqq 0$ con $f_1 + f_2 + \cdots + f_p = n$ comprende m^2 operatori linearmente indipendenti, essendo m l'ordine della rappresentazione del gruppo delle permutazioni corrispondente alla simmetria della classe; e tale ordine è dato da

$$(4) \qquad m = \frac{n!}{\Pi_i (h_i!)} D(h_1 h_2 \cdots h_p) \quad \text{con} \quad h_i = f_i + p - i$$

dove $D(abc\cdots)$ è il determinante delle differenze di $a, b, c \cdots$

Ora la simmetria del tensore (3) [5] fa sì che siano nulli tutti i tensori (1) derivanti da operatori (2) la cui simmetria sia caratterizzata da una Σ_f in cui alcuni degli f_i sono dispari, e che gli m^2 operatori di una classe la cui Σ_f abbia tutti gli elementi pari diano luogo soltanto ad m tensori isotropi linearmente indipendenti.

Il numero massimo dei tensori isotropi indipendenti di rango $n = 2k$ si riduce perciò da

(1) M. Pastori, questi «Rendiconti», XII, 499, 1930.

(2) G. Frobenius, «Sitzungsber. Berl. Akad.», 1900, p. 516 e 1903, p. 328.

(3) H. Weyl, «Rend. Circ. Mat. Palermo», *48*, 29, 1924; «Math. Zeitschr.», *23*, 271, 1925.

(4) Cfr. B. L. van der Waerden, «Moderne Algebra», Berlin, 1931, § 127.

(5) Cfr. M. Pastori, questi «Rendiconti», XII, 374, 1930.

$$(5)\quad n! = \sum_{\substack{f_1+f_2+\cdots+f_p=n \\ f_1\geq f_2\geq\cdots\geq f_p\geq 0}} \left[\frac{n!}{\Pi_i(h_i!)} D(h_1 h_2 \cdots h_p)\right]^2 \quad \text{con} \quad h_i = f_i + p - i$$

$$(6)\quad (2k-1)!! = \sum_{\substack{g_1+g_2+\cdots+g_p=k \\ g_1\geq g_2\geq\cdots\geq g_p\geq 0}} \frac{(2k)!}{\Pi_i(h_i!)} D(h_1 h_2 \cdots h_p) \quad \text{con} \quad h_i = 2g_i + p - i.$$

2. Questa prima limitazione, che è dovuta alla simmetria del tensore (3), era stata già determinata dalla Pastori [1]; ma per trovare il numero giusto dei tensori isotropi indipendenti dobbiamo tener conto di un'altra limitazione, dovuta questa volta alle dimensioni dello spazio in cui i tensori isotropi si considerano. Infatti il numero degli elementi nonnulli che compaiono nella Σ_f è uguale al numero minimo di indici diversi tra loro che devono avere le componenti nonnulle di (1) quando l'operatore (2) appartenga alla simmetria caratterizzata da Σ_f: e poichè ogni componente di un tensore di un S_r non può avere più di r indici diversi tra loro, dovremo limitarci a quelle classi di operatori (2) per cui

$$(7)\qquad p = r;$$

e perciò abbiamo che

$$(8)\quad N'_r(2k) = \sum_{\substack{g_1+g_2+\cdots+g_r=k \\ g_1\geq g_2\geq\cdots\geq g_r\geq 0}} \frac{(2k)!}{\Pi_i(h_i!)} D(h_1 h_2 \cdots h_r) \quad \text{con} \quad h_i = 2g_i + r - i.$$

Siccome la limitazione (7) entra in giuoco solo per $k > r$, per $k \leq r$ la (8) equivale alla (6), come risulta anche dalla tabella di $N'_r(n)$ data nella mia Nota precedente.

3. Per esempio dei 105 tensori isotropi di rango 8, il tensore simmetrico (classe (8000)), i 20 tensori della simmetria (6200) e i 14 della simmetria (4400) sono diversi da zero anche in un S_2, i 56 tensori della simmetria (4220) sono diversi da zero in spazi a tre o più dimensioni, mentre i 14 tensori della simmetria (2222) sono ancora nulli in un S_3 e sono diversi da zero in un S_4. Le espressioni di questi ultimi 14 tensori uguagliate a zero sono le 14 relazioni lineari che in un S_3 legano tra loro i 105 prodotti di quattro δ_{ik}, ed abbiamo così automaticamente un metodo per costruire tali relazioni.

(1) M. Pastori, loc. cit.

Un metodo più semplice per ottenerle è però di scrivere una delle identità del Caldonazzo [1]

$$\delta_{i_1 i_2}\,\varepsilon_{i_3 i_4 i_5} = \delta_{i_1 i_3}\,\varepsilon_{i_2 i_4 i_5} + \delta_{i_1 i_4}\,\varepsilon_{i_2 i_5 i_3} + \delta_{i_1 i_5}\,\varepsilon_{i_2 i_3 i_4},$$

moltiplicare ogni termine per $\varepsilon_{i_6 i_7 i_8}$ ed applicare ad ogni prodotto di due ε la nota trasformazione in somme di prodotti di tre δ.

4. Un calcolo analogo può farsi anche pei tensori emisotropi di ordine $n = 2k + r$, la cui espressione generale è [2]

$$(9) \qquad \sum_s a_s \, P_s \, \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_r} \delta_{i_{r+1} i_{r+2}} \delta_{i_{r+3} i_{r+4}} \cdots \delta_{i_{r+2k-1} i_{r+2k}};$$

data la simmetria del tensore

$$(10) \qquad \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_r} \delta_{i_{r+1} i_{r+2}} \cdots \delta_{i_{r+2k-1} i_{r+2k}}$$

le uniche classi di operatori (2) che dànno luogo a tensori (9) non identicamente nulli sono quelle le cui Σ_f hanno tutti gli elementi dispari, e con ragionamenti analoghi a quelli del caso precedente si conclude perciò che

$$(11) \qquad N''_r(2k+r) = \sum_{\substack{g_1 + g_2 + \cdots + g_r = k \\ g_1 \geq g_2 \geq \cdots \geq g_r \geq 0}} \frac{(2k+r)!}{\Pi_i (h_i!)} D(h_1 h_2 \cdots h_r) \quad \text{con} \quad h_i = 2g_i + 1 + r - i.$$

(1) B. Caldonazzo, questi «Rendiconti», XV, 840, 1932.
(2) M. Pastori, questi «Rendiconti», XIII, 109, 1931.

Chimica (Chimica biologica). — *Sull'attività deidrogenasica del «B. Coli communis» sugli acidi grassi superiori* [1]. Nota II [2] di F. P. Mazza e A. Cimmino, presentata dal Corrisp. L. Quagliariello.

Nella Nota precedente [3] comunicammo che il *B. Coli communis* è capace di deidrogenare gli acidi grassi superiori (palmitico, stearico, oleico) in aerobiosi, ossia con l'ossigeno atmosferico come accettore. Osservammo, inoltre, che il sistema deidrogenativo resiste all'azione del toluolo, che produce, invece, la morte dei batteri, e studiammo, infine, l'azione di taluni inibitori (HCN, NaF), del pH e della concentrazione dei batteri sul processo deidrogenativo.

In questa Nota comunichiamo ricerche da noi eseguite per stabilire:

1° se l'ossidazione degli acidi grassi superiori possa svolgersi con accettori diversi dall'O_2, confermandosi in tal modo la natura deidrogenasica del processo;

2° se il sistema ossidativo consti di una semplice deidrogenasi, oppure, come avviene in certi batteri [4], sia costituito da un sistema doppio deidrogenasi-ossidasi;

3° l'influenza di certi inibitori che non avevamo adoperati nelle nostre prime richerche.

Le esperienze in assenza di O_2 sono state eseguite su germi vivi e su germi uccisi con toluolo, adoperando come accettore di idrogeno il blu di metilene con la tecnica seguente [5]. Come è noto, il blu di metilene è il cloridrato di una base assai più dissociata che non sia la leucobase: la sua riduzione porta, quindi, alla formazione di H^+. Se essa si fa avvenire in una soluzione di bicarbonati, per ogni Mol di colorante si forma 1 Mol di CO_2. La tecnica impiegata è stata quella manometrica di Barcroft–Warburg: nei vasi di Warburg, muniti di diverticolo laterale e di pozzetto centrale, si introducevano cc. 3 di soluzione 0.025 Mol di $NaHCO_3$, contenente blu di metilene alla concentrazione di 0.001 Mol circa: poi, per i controlli 1 cc. di

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica della R. Università di Napoli.

(2) Pervenuta all'Accademia il 7 agosto 1934.

(3) Mazza e Cimmino, questi «Rendiconti», 1933, *17*, 1086.

(4) Stephenson, «Biochem. J.», 1928, *22*, 695; Barron e Hastings, «J. Biol. Chem.», 1933, *100*, 155.

(5) Reid, «Biochem. Z.», 1931, *242*, 159.

H_2O, per le prove con acidi grassi, 1 cc. di soluzione 0.01 Mol di stearato sodico (a pH 7.5 circa). Nei diverticoli laterali era contenuto 1 cc. di sospensione batterica, nel pozzetto centrale cc. 0.4 di soluzione di $CrCl_2$ per allontanare le ultime tracce di O_2. Gli apparecchi venivano riempiti di N_2 (purificato per passaggio su Cu scaldato a 400°) contenente 5 % di CO_2. Le esperienze venivano eseguite a 37°, con le abituali precauzioni, e dopo i 10 minuti necessari per stabilizzare la pressione, si mescolava la sospensione batterica al resto del sistema. Le prove erano sempre eseguite in doppio: le grafiche seguenti (fig. 1) ne riassumono i risultati.

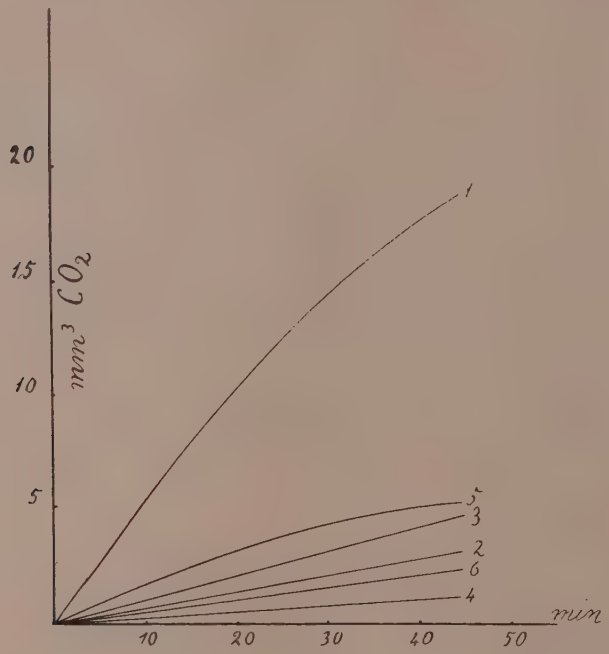


Fig. 1.

1. Batteri 2 %, cc. 1; $NaHCO_3$ 0.025 Mol, cc. 3, contenente blu di metilene (b. d. m.) alla concentrazione 0.001 Mol; stearato sodico 0,01 Mol. cc. 1.

2. Batteri 2 %, cc. 1; $NaHCO_3$ + b. d. m. 0.001 Mol, cc. 3; H_2O cc. 1.

3. Batteri 3 % trattati con toluolo, cc. 1; $NaHCO_3$ + b. d. m. Mol/1200, cc. 3; stearato cc. 1.

4. Batteri 3 % trattati con toluolo, cc. 1; $NaHCO_3$ + b. d. m. Mol/1200, cc. 3; H_2O cc. 1.

5. Batteri 2 % cc. 1; $NaHCO_3$ + b. d. m. Mol/300, cc. 3; stearato cc. 1.

6. Batteri 2 % cc. 1; $NaHCO_3$ + b. d. m. Mol/300, cc. 3; H_2O cc. 1.

Nella esperienza riprodotta nella fig. 1, dai soli batteri in 45′ sono stati prodotti 3.2 mm.³ e dai batteri più stearato 19 mm.³ di CO_2, corrispondenti ad un consumo di O_2 di 1.6 e rispettivamente 9.5 mm.³. Con accettore O_2,

invece, abbiamo trovato, *ceteris paribus*, un consumo di 40 mm.^{3} di O_2 per i germi soli e di 100 mm.^{3} per quelli addizionati di stearato. Il blu di metilene, quindi, può funzionare da accettore di idrogeno nella deidrogenazione dell'acido grasso; ma il processo decorre assai più lentamente che in aerobiosi. Questo fenomeno era prevedibile, giacchè esistono nella letteratura vari dati, i quali dimostrano che la riduzione delle grosse molecole del colorante si svolge meno velocemente di quelle delle molecole di O_2, assai più mobili [1].

Abbiamo osservato, inoltre, che se la concentrazione del blu di metilene supera quella di 0.001 Mol o poco più, si manifesta una inibizione del processo deidrogenativo dell'acido stearico, Questa inibizione può trovare spiegazione nel fatto osservato da Bertho [2] il quale ha dimostrato che il colorante viene adsorbito dalla superficie batterica, seguendo la isoterma di Freundlich: sotto forti concentrazioni, perciò, rende più difficili e meno probabili i contatti tra gruppi attivi degli enzimi superficiali del germe e le molecole del substrato. Sulle ossidazioni proprie dei batteri (senza aggiunta di stearato), invece, quest'azione inibitrice non si manifesta in misura apprezzabile, per concentrazioni studiate, giacchè il colorante adsorbito sulla superficie del germe può funzionare ancora da accettore dell'idrogeno mobilitato dei donatori propri del batterio, mentre si comporta come uno schermo che impedisce i contatti tra enzimi batterici e molecole di donatore disciolto nel mezzo esterno. Le curve 5 e 6 della fig. 1 dimostrano l'azione inibitrice del blu di metilene. Si noti anche il fatto che, mentre in soluzioni 1/1000 Mol di blu di metilene la deidrogenazione continua a svolgersi a lungo, in quella 1/300 Mol si arresta dopo 30 minuti.

Meno evidenti sono le esperienze eseguite con germi uccisi per azione del toluolo: ma in queste condizioni anche con accettore O_2 la deidrogenazione è lenta. Le quantità di CO_2 prodotte sono piccolissime (fig. 1 curve 3 e 4) ma, tuttavia, sufficienti a dimostrare l'attività deidrogenasica sullo stearato dei germi morti.

Studiando la ossidazione dell'acido lattico provocata dal coli (Stephenson) [3], e dal gonococco (Barron) [4], si è osservato che, mentre i germi tenuti per qualche ora a 50°, divengono incapaci di produrre, in aerobiosi, acido piruvico dal lattico, possono farlo in presenza di coloranti a funzione ossido–riduttiva. Se ne è concluso che i due microrganismi contengono due enzimi che concorrono alla ossidazione dell'acido lattico: una deidrogenasi, attivatrice dell'idrogeno del substrato, ed una ossidasi che attiva l'ossigeno che deve fungere da accettore dell'idrogeno. Mentre la prima resiste al ri-

(1) Bertho, *Die Essiggarung*, in «Ergebn. d. Enzymforsch.», 1932, *1*, 241.
(2) Bertho, «Lieb. Ann.», 1929, *474*, 1.
(3) Stephenson, «Biochem. J.», 1928, *22*, 605.
(4) Barron e Hastings, «J. Biol. Chem.», 1933. *100*, 155.

scaldamento, la seconda è labile; ma può essere sostituita da un accettore che non richieda attivazione.

Abbiamo cercato di stabilire se nella ossidazione degli acidi grassi superiori provocata dal *B. coli* le cose si svolgessero in modo analogo. Perciò, abbiamo esposto le sospensioni di *coli* in Ringer da invertebrati, a 45° per 120 minuti, ed a 50° per 80 e 120 minuti, saggiandone, poi, l'attività sullo stearato, in condizioni aerobiche, con la tecnica indicata nella nostra Nota precedente. Si è potuto osservare che, mentre il consumo di O_2 da parte dei germi soli non è praticamente influenzato dal trattamento, viene fortemente diminuito

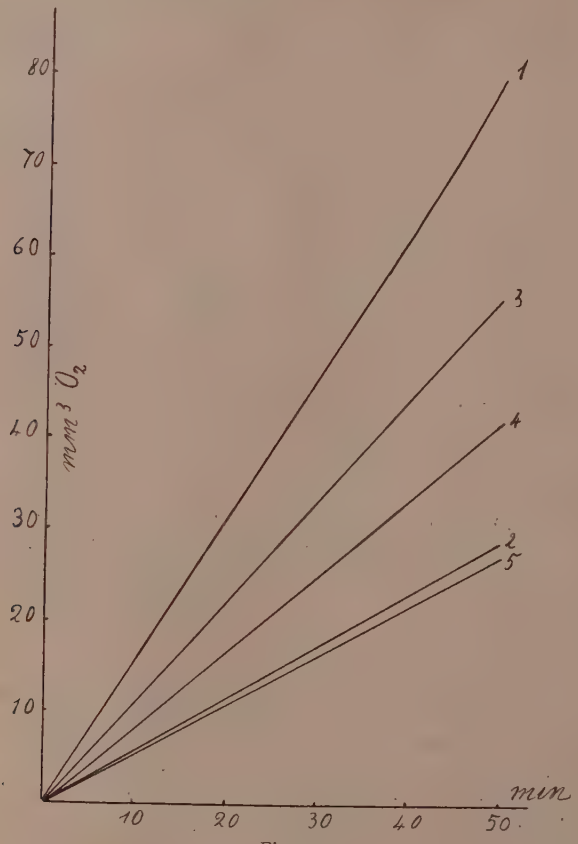


Fig. 2.

1. Batteri 2 % cc. 3; puffer di fosfati Mol/15 a pH = 7.5 cc. 1; stearato sodico 0.01 Mol cc. 1.
2. Batteri 2 % cc. 3; puffer cc. 1; H_2O cc. 1.
3. Batteri 2 %, tenuti a 45° per 120 minuti, cc. 3; puffer cc. 1; stearato cc. 1.
4. Batteri 2 %, tenuti a 50° per 120 minuti, cc. 3; puffer cc. 1; stearato cc. 1.
5. Batteri 2 %, tenuti a 50° per 120 minuti, cc. 3; puffer cc. 1; H_2O cc. 1.

quello in presenza di stearato; la inibizione raggiunge il 40 % nel caso del riscaldamento (per 120 minuti) a 45°, ed il 70 % in quello di riscaldamento per 120 minuti a 50°. L'aggiunta di blu di metilene non è capace di riportare l'ossidazione all'intensità normale (fig. 2).

Il riscaldamento, quindi, agisce sulla deidrogenasi degli acidi grassi, inattivandola, prima che gli enzimi che producono le ossidazioni normali del *B. coli*. Anche l'inibizione del consumo di O_2 prodotta dall'HCN Mol/2000 non può essere eliminata dal blu di metilene. Se ne conclude che è proprio la deidrogenasi degli acidi grassi la quale è sensibile al riscaldamento a 50°, a differenza di quella dell'acido lattico, e che essa è sensibile per se stessa all'HCN. Ci sembra, inoltre, poco probabile, sebbene non si possa escludere totalmente, che la deidrogenasi degli acidi grassi richieda una ossigenasi per catalizzare l'ossidazione degli acidi stessi.

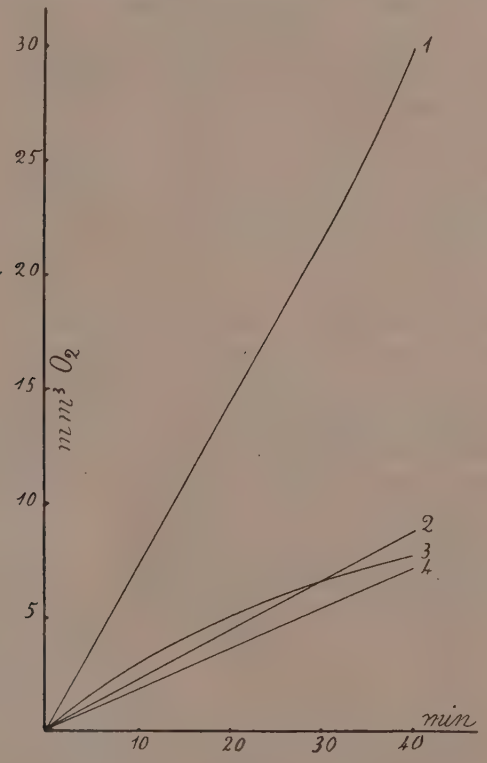


Fig. 3.

1. Batteri 2 % cc. 3; puffer di fosfati Mol/15 a pH = 7.5 cc. 1; stearato sodico 0.01 Mol cc. 1.
2. Batteri 2 % cc. 3; puffer cc. 3; H_2O cc. 1.
3. Batteri 2 % cc. 3; puffer cc. 1; stearato cc. 1; atmosfera di CO 10 % in aria.
4. Batteri 2 % cc. 3; puffer cc. 1; H_2O cc. 1; 10 % CO in aria.

Questo comportamento ci ha indotti a studiare l'azione del CO sulla deidrogenasi. Le esperienze sono state condotte aerobicamente, con la solita tecnica, riempiendo i vasi di Warburg con aria contenente 10 °/₀ di CO puro, ossia con rapporto $CO/O_2 = 10/18$ circa. Per i batteri soli si è notato, conforme a quanto osservarono Cook e Haldane [1], che il CO inibisce assai poco la respirazione; l'azione deidrogenante sull'acido stearico, invece, viene inibita per il 90 °/₀ circa (vedi fig. 3).

La deidrogenasi degli acidi grassi contenuta nel *Coli* somiglia, quindi, a quella dell'acido succinico e dell'acido lattico, ed a quella della fermentazione acetica, solo che sembra più sensibile all'azione del CO: nel caso dell'alcooldeidrogenasi del batterio acetico, infatti, Tamiya, Hida e Tanaka [2] con un rapporto $CO/O_2 = 30/70$ hanno osservato inibizione del 60 °/₀.

La resistenza al toluolo fa somigliare le deidrogenasi degli acidi grassi superiori alla formico–deidrogenasi studiata da Quastel [3]: ora, questo enzima viene inibito specificamente dall'acido 8–ossichinolinsolfonico e dall'acido 1–amino-8-naftol-4 solfonico (Cook, Haldane, Mapson) [4], il che farebbe concludere, poichè questi acidi si combinano col rame, che la formico–deidrogenasi contenga, come gruppo attivo, tale metallo. Abbiamo, perciò, voluto studiare l'azione di questi reagenti sulla deidrogenasi dell'acido stearico, ed abbiamo osservato che, anche in concentrazioni piuttosto elevate (0,2–0,3 °/₀), nè l'acido 8–chinolinsolfonico, nè quello 1–amino–8–naftol–4 solfonico inibiscono il consumo di O_2 da parte dei batteri addizionati di stearato, a pH 7,5.

Senza volere da ciò concludere definitivamente che la deidrogenasi degli acidi grassi superiori non contenga rame (le esperienze di inibizione con reagenti così detti specifici non sono sempre assolutamente sicure), possiamo, tuttavia, affermare che essa differisce dalla formico–deidrogenasi.

Il comportamento dell'enzima rispetto al CO e all'HCN, invece, ci porta a supporre che esso contenga gruppi attivi di natura ematinica.

(1) Cook e Haldane, « Biochem. J. », 1931, *25*, 880.
(2) Tamiya, Hida, e Tanaka, « Acta phytochimica », 1930, *5*, 167.
(3) Quastel e Woolridge, « Biochem. J. », 1925, *10*, 652.
(4) Cook, Haldane e Mapson, « Biochem. J. », 1931, *25*, 534.

Fisiologia. — *Sul metabolismo degli idrati di carbonio in alta montagna.* II. *Azione dell'adrenalina (e contenuto in K e Ca del sangue)* [1]. Nota [2] di V. F. Madon ed E. Sapegno, presentata dal Socio A. Herlitzka.

Nell'indagine sulla particolare maniera di reagire che il ricambio dei carboidrati pare presentare di fronte al soggiorno in alta montagna, è evidente l'importanza che può assumere l'esame del comportamento degli ormoni che hanno maggior peso nella regolazione del metabolismo stesso, insulina e adrenalina. Comportamento sia per quanto riguarda la loro concentrazione e l'entità della loro secrezione, sia per quel che concerne la loro attività nelle particolari condizioni di cui trattasi. Indagini in proposito sono state compiute sull'insulina mediante la pancreasectomia parziale (Sapegno, Montuori, Egidi) [3] e l'iniezione sottocutanea dell'ormone (Madon) [4], sull'adrenalina mediante l'esame del potere vasocostrittore del siero (Herlitzka, Goldberger) [5]; le ricerche di Brehme e György [6] non hanno dato, per quel che riguarda le modificazioni della curva glicemica da iniezione di adrenalina, in due individui a diverse altezze sul livello del mare, risultati netti e di sicura interpretazione.

D'altra parte è nota l'importanza che si è attribuita alla concentrazione del Ca e del K ed ai rapporti di concentrazione di questi due ioni nella regolazione del tono del sistema autonomo. Si doveva tener conto quindi della possibilità che un'eventuale modificazione dell'attività dell'adrenalina potesse riconnettersi a variazioni di questi elementi. Tanto più che mutamenti del contenuto in K del sangue e degli organi sono stati osservati in alta montagna (Azzi) [7] e per effetto del lavoro muscolare (Embden e Lange, Schenk, Calhoun, Cullen e Harrison, Madon e Goldberger) [8] e del Ca e

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto A. Mosso al Col d'Olen, Sezione alpina dell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Torino.

(2) Pervenuta all'Accademia il 26 luglio 1934.

(3) Sapegno E., S. Montuori ed E. Egidi, « Arch. Sc. Biol. » in corso di pubblicazione (1934).

(4) Madon V. F., « Arch. Sc. Biol. », *17*, 41 (1932).

(5) Herlitzka A., « Congr. Intern. Nav. Aér. », *4*, 437 (1921); Goldberger S., « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 7, 507 (1932).

(6) Brehme Th. u. P. György, « Biochem. Ztschr. », *186*, 213 (1927).

(7) Azzi A., « Arch. Sc. Med. », *46*, 186 (1923).

(8) Embden e Lange, « Klin. Wochenschr. », *3*, 129 (1924); Schenk, « Münch. Med. Wschr. », *72*, 2050 (1925); Calhoun, Cullen u. Harrison, « J. Clin. Invest. », *9*, 405 (1930); Madon e Goldberger, questi « Rendiconti », *15*, 301 (1932), vol. I.

K in montagna (Abderhalden e coll.) [1] in seguito a irradiazione (Pinkussen, Hess e Unger, Sonne, Schultzer, Gates e Grant) [2]. Perciò parallelamente all'effetto di un'iniezione di adrenalina sulla glicemia in alta montagna e al piano abbiamo determinato anche la concentrazione in K e in Ca del siero di sangue. Come indice dell'attività dell'ormone a prescindere da quella sul ricambio carboidrato, ci siamo serviti della sua azione sul sistema circolatorio, determinando la curva della pressione arteriosa.

Gli esperimenti furono compiuti nei mesi di agosto 1931 e 1932 all'Istituto Mosso al Col d'Olen (m. 2910 s. l. m.) e negli inverni successivi a Torino (m. 238 s. l. m.) in condizioni di temperatura analoghe, su sei soggetti di 20-30 anni; al mattino a digiuno ed a riposo in decubito dorsale rialzato. La glicemia veniva determinata col metodo di Bang [3] sul sangue capillare raccolto prima dell'iniezione sottocutanea di 1 mg. di adrenalina in soluzione 1 °/₀₀ Parke-Davis, e dopo l'iniezione ogni 15 minuti. Ad intervalli di 10 minuti veniva eseguita la determinazione della pressione arteriosa omerale mediante l'oscillometro di Pachon. Il contenuto in K e Ca del siero era determinato sul sangue venoso rispettivamente con i metodi di Mazza e Rossi e di Kramer e Tisdall [4].

Dall'esame dei protocolli sperimentali, riportati in parte nelle unite tabelle ed in parte in forma di diagrammi in funzione del tempo dal momento dell'iniezione, risulta quanto segue. Anzitutto l'azione sul sistema circolatorio di un'ugual dose di adrenalina non appare sensibilmente differente al piano o in alta montagna, poichè le curve corrispondenti delle modificazioni della pressione arteriosa, dopo l'iniezione sono per lo più praticamente sovrapponibili, e quando presentano differenze queste sono di lieve entità e senza nessuna concordanza da caso a caso; si tratta cioè di variazioni accidentali dello stesso ordine di quelle che possono verificarsi tra due diverse esperienze senza che siano modificate le condizioni sperimentali.

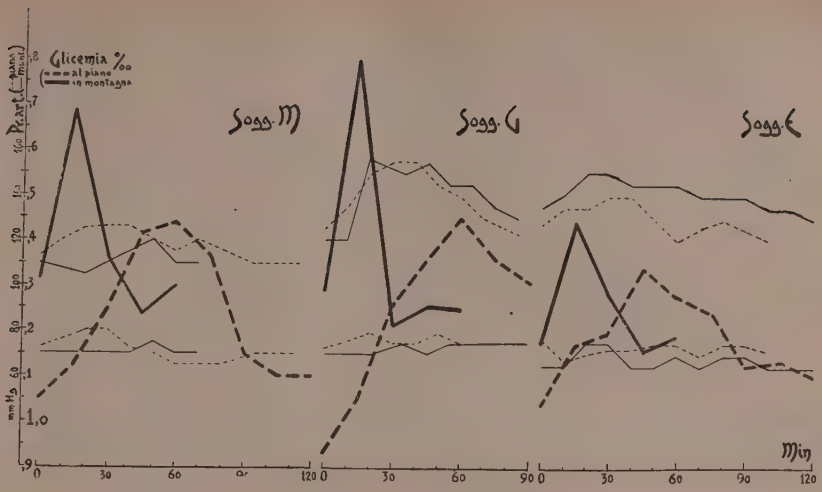
Per quanto riguarda invece l'azione sull'equilibrio carboidrato, l'acme iperglicemico raggiunto dopo l'iniezione appare sempre notevolmente più elevato negli esperimenti compiuti in alta montagna. Se però si considera il punto di partenza della curva, se si tien conto cioè dell'iperglicemia

(1) Abderhalden, London, Loewy u. Mitarb., « Pflüger's Arch. f. d. ges. Physiol. », *216*, 362 (1927).

(2) Pinkussen, « Biochem. Ztschr. », *161* (1925); Hess u. Unger, « J. of exper. Med. », *36* (1927); « J. Biol. Chem. », *50* (1922); Sonne, « Verh. Klimat/ Tag. Davos 1925 », Basel (1926); Schultzer, « C. R. Soc. Biol. » (1925); Gates u. Grant, « Proc. soc. exp. Biol. a. Med. », *22* (1925).

(3) Bang I, « Mikrometh. z. Blutunters. » J. F., Bergmann, München u. Wiesbaden, 1922, p. 35.

(4) Mazza F. P. e A. Rossi, « Arch. Sc. Biol. », *13*, 466 (1929); Kramer e Tisdall, « J. Biol. Chem. », *47*, 475 (1921).



che già si riscontra in tali condizioni in ciascun individuo normale a riposo e a digiuno, il vertice della curva iperglicemica determinata dall'iniezione di eguali dosi di adrenalina si eleva in egual misura o quasi in montagna e al piano. Differente però è l'area iperglicemica ottenuta, poichè diverso è l'andamento della curva, che negli individui acclimatati in alta montagna assume un decórso assai più rapido sia nella sua fase ascendente come in quella di ritorno al livello iniziale, ed anzi al di sotto di questo. Un accenno a tale comportamento, particolarmente per quello che riguarda la prima fase, può riscontrarsi anche nelle curve riportate da Brehme e György.

L'area complessiva rispecchiante la quantità totale di glicosio versata in circolo per effetto dell'adrenalina iniettata, è notevolmente maggiore al piano che in montagna. Le aree relative ai vari casi (concentrazioni per mille, tempi in minuti primi) sono riportate nella tabella seguente (A), insieme al dislivello glicemico massimo (Δ) ed alla velocità (in mg. per litro e per minuto) con cui questo venne superato nella fase ascendente (V_a) e nella discendente (V_d).

Le determinazioni del contenuto in calcio e potassio del siero non permettono di concludere per una netta modificazione della concentrazione di tali ioni nel sangue degli individui acclimatati in alta montagna. In buona parte dei casi pare si accenni ad un certo aumento di concentrazione, soprattutto per quel che riguarda il potassio, senza che le modificazioni del rapporto K/Ca si producano in maniera regolare e concordante nei vari soggetti. Il comportamento di tale rapporto non spiega dunque le modificazioni riscontrate nell'azione dell'ormone, anzi insieme con quello della pressione arteriosa viene a rendere più specifici i mutamenti dell'azione sua sulla glicemia.

	AL PIANO				IN MONTAGNA			
	A	Δ	V_a	V_d	A	Δ	V_a	V_d
G	30.—	0.52	8.7	4.7	6.58	0.47	31.3	36.–
E	18.75	0.30	6.7	4.7 3.2	5.55	0.26	17.3	9.3
L	24.60	0.40	13.3	4.–	6.38	0.41	27.3	29.3
	30.68	0.38	8.4	3.7 2.5				
M	21.98	0.39	8.– 6.5	7.5	5.80	0.36	24.–	21.3 18.–
A	28.88	0.46	10.8 7.7	5.1	17.03	0.58	32.– 19.3	32.– 25.8
S	25.05	0.43	9.6	5.5	22.10	0.58	35.3 19.3	16.6
	34.05	0.51	8.5	4.8	12.53	0.52	34.7	17.7
	28.13	0.40	9.–	4.7				

Secondo quanto si è detto sopra e quanto risulta dall'esame delle curve, l'area iperglicemica dopo iniezione di adrenalina viene ad assere ridotta in alta montagna, pur raggiungendo l'iperglicemia un livello maggiore, od almeno uguale, considerando il diverso punto di partenza. Che tale riduzione non sia da attribuirsi ad una diminuzione primaria e generica dell'attività dell'ormone è dimostrato dalla regolarità della sua azione pressoria. Potrebbe

	AL PIANO			IN MONTAGNA		
	K	Ca	K/Ca	K	Ca	K/Ca
G	23.2	10.2	2.22	24.8	10.5	2.36
E	20.9	11.5	1.82	21.8	10.8	2.02
L	22.1	11.1	1.99	23.2	11.6	2.—
M	21.8	9.8	2.21	22.3	11.–	2.03
A	21.1	11.4	1.85	20.7	10.6	1.95
S	22.8	11.0	2.07	22.1	11.4	1.94

spiegarla una minor efficienza delle riserve carboidrate: mancano sufficienti dati sperimentali o teorici a sostegno di tale ipotesi, benchè una diminuzione del glicogeno epatico sia stata riscontrata negli animali sottoposti a depressione barometrica (Aggazzotti, Wertheimer) [1]. D'altra parte essa non si concilia senza ipotesi supplementari con l'andamento della curva; allorchè l'iperglicemia è ridotta a causa dell'esaurimento delle riserve (fatica) suol raggiungere, com'è logico, un livello meno elevato, senza che sia sensibilmente modificato il tempo impiegato a raggiungere tale massimo, e in molti casi neppur quello di ritorno alla norma, con una curva appiattita, a caratteristiche affatto opposte a quella in esame: a prescindere dal fatto, non probativo, che l'esaurimento delle riserve si accompagna ad un più basso livello del tasso glicemico piuttosto che ad un'iperglicemia.

La diminuzione dell'area iperglicemica non appare nel nostro caso conseguenza di una diminuzione d'intensità dell'azione, ma di una modificazione della sua velocità e durata, che necessariamente viene a ripercuotersi sull'elemento quantitativo. Tale modificazione – analoga a quella dell'aumento

	SOGGETTO L						SOGGETTO A			
	PRESSIONE			GLICEMIA			PRESSIONE		GLICEMIA	
	Al piano		In montagna	Al piano		In montagna	Al piano	In montagna	Al piano	In montagna
0	130-72	135-65	140-70	1.00	0.98	1.28	145-80	140-80	1.02	1.30
10	165-72	155-70	165-65	1.07	1.08	1.69	155-85	150-75	1.02	1.78
20	190-75	180-65	175-70				185-75	170-80		
30	195-75	185-70	190-70	1.40	1.30	1.25	205-85	185-95	1.20	1.88
40	190-72	175-75	180-70	1.35	1.36	1.20	200-90	190-90	1.37	1.40
50	180-72	170-70	170-65				200-90	195-95		
60	175-70	160-70	160-65	1.33	1.33	1.26	195-85	190-85	1.48	1.20
70	155-70	150-70	160-65	1.23	1.30	—	185-85	175-80	1.44	1.32
80	145-72	145-65	155-70				175-80	155-75		
90	145-72	135-70	145-70	1.21	1.22	—	155-75	150-80	1.25	1.28
100	140-70	140-70	—	1.10	1.23	—	160-70	—	1.22	—
110	140-70	140-65	—				155-75	—		
120	—	135-65	—	—	1.17	—	160-75	—	1.17	—

(1) Aggazzotti A., « Giorn. di Biol. e Med. sperim. », I, XVI (1924); Wertheimer, « Ztschr. exp. Med. », 70 (1930).

SOGGETTO S

	PRESSIONE					GLICEMIA				
	Al piano			In montagna		Al piano			In montagna	
0	130-75	135-75	125-70	130-75	130-70	1.01	0.97	0.98	1.25	1.29
10	145-75	165-80	150-70	140-80	135-70	1.07	1.00	1.12	1.08	1.81
20	170-80	180-75	155-80	150-80	150-65					
30	180-85	180-90	160-80	155-85	170-75	1.27	1.20	1.20	1.83	1.60
40	180-85	180-85	160-75	170-90	180-75	1.44	1.28	1.38	1.58	1.28
50	175-90	165-80	150-65	170-80	175-80					
60	165-80	170-70	150-60	170-70	180-80	1.42	1.48	1.33	1.30	1.14
70	145-80	170-75	150-60	165-75	160-70	1.30	1.42	1.24	1.17	1.28
80	145-75	160-70	130-70	170-70	145-75					
90	135-70	150-65	135-70	160-75	125-65	1.15	1.32	1.26	1.31	1.20
100	133-75	150-70	130-70	145-75	130-70	1.11	1.25	1.18	—	—
110	125-75	140-75	120-70	130-70	135-70					
120	130-75	140-70	120-70	135-75	135-70	1.10	1.19	1.03	—	—

alimentare del QR (Durig e collabor.) [1] – non può essere spiegata da mutate condizioni di assorbimento e distruzione dell'ormone o di tono simpatico, poichè l'azione sul sistema cardiovascolare lungi dal presentare un comportamento corrispondente, si dimostra perfettamente simile a quella che si produce al piano, quando non è ritardata o rallentata. Si tratta dunque di un mutamento del meccanismo intrinseco d'azione dell'adrenalina sugli idrati di carbonio e sugli elementi che ne regolano l'equilibrio. Considerando che essa, oltre a determinare una scissione di glicogeno, inibirebbe l'assorbimento di glucosio da parte dei tessuti (Cori e Cori, Colwell e Bright, Colwell) [2], si potrebbe invocare la mancanza di questa seconda azione a spiegare la breve durata della iperglicemia, compensata subito dall'assorbimento: ma anche a tale ipotesi contraddice la maggior velocità della fase ascendente. Ammettendo d'altra parte che a compensare l'iperglicemia adrenalinica intervenga in secondo tempo l'attività del pancreas, analogamente a quanto avviene dopo iniezione endovenosa di glucosio (Wierzukowski, Pieskow e

(1) Durig, Rainer, Reichel u. Kolmer, « Denkschr. Akad. Wiss. Wien, Math.-Naturwiss. Kl. », *86* (1909).

(2) Cori C. F. and G. T. Cori, « J. Biol. Chem. », *79*, 343 (1928); Colwell A. R. and Bright, E. M., « Ann. J. Physiol. », *92*, 543, 555 (1930); Colwell, « Endocrinology », *15*, 25 (1931).

Owsiany)[1], la precoce e rapida discesa della curva può essere spiegata insieme con la discesa al disotto del livello iniziale da una maggior secrezione ed attività dell'insulina in alta montagna. Questa si può ammettere in base all'esame della curva ipoglicemica sperimentale, che raggiunge lo stesso livello che al piano malgrado l'inizio più elevato, e soprattutto in base al comportamento degli animali con insufficienza pancreatica. Ne deriva che l'attività dell'adrenalina sul ricambio carboidrato è aumentata in alta montagna, – come in depressione barometrica (Monasterio)[2] – ma tale aumento è mascherato da una possibile diminuzione delle riserve e dalla maggior attività dei meccanismi antagonisti (insulina). È da notare che adrenalina e insulina possono avere qualche elemento comune nella loro azione pur nettamente antagonista: elemento che potrebbe essere quello stesso ch'è comune alla sintesi del glicogeno ed all'ossidazione del glucosio: entrambe fanno aumentare gli esteri fosforici muscolari (Cori e Cori, Bell, Kerr e Blish)[3]: l'insulina però agirebbe attraverso le surrenali (Cori e Cori).

Concludendo, negli individui acclimatati in alta montagna l'azione dell'adrenalina sulle condizioni di equilibrio degli idrati di carbonio è più rapida, e più rapida è pure la reazione dell'organismo all'iperglicemia che ne consegue.

Fisiologia (Fisiologia vegetale). — *Azione dei sali di Berillio, Zirconio e Palladio sulla sensibilità geotropica delle radici*[4]. Nota[5] di V. Bambacioni–Mezzetti presentata dal Corrisp. E. Carano.

Scarse notizie si hanno circa l'azione esercitata sulle piante dal Berillio, dallo Zirconio e dal Palladio. Czapeck[6], a proposito del primo di questi elementi, dice solo che esso è ancora molto poco noto dal punto di vista tossicologico e per quanto riguarda lo Zirconio nota che le sue combinazioni, come quelle del Torio, sono relativamente poco velenose. Lo Jost[7] cita i sali di Berillio tra quelli che, in modo particolare, penetrano molto rapidamente nelle cellule di chiusura degli stomi e favoriscono la saccarificazione dell'amido.

(1) Wierzukowski M., W. Pieskow u. E. Owsiany, «Bioch. Ztschr.», *230*, 146, 173, 187 (1931).

(2) Monasterio G., «Ztschr. exp. Med.», *70*, 314 (1930).

(3) Cori C. F. and G. T. Cori, «J. Biol. Chem.», *94*, 561 (1931); Bell D. J., «Biochem. J.», *26*, 1601 (1932); Kerr S. E. and M. E. Blish «J. Biol. Chem.», *97*, 1 (1932).

(4) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico della R. Università di Roma.

(5) Pervenuta all'Accademia il 28 luglio 1934.

(6) Czapeck F., *Biochemie der Pflanzen*. II Auf. Bd. 1, Jena, 1913, p. 181 e p. 188.

(7) Benecke W. und Jost L., *Pflanzenphysiologie*. Bd. 1, Jena, 1924, p. 76.

Coupin [1], in una breve Nota pubblicata nel 1901 dichiara che il cloruro di Palladio è fortemente velenoso e ne stabilisce l'equivalente tossico (0.09) intendendosi con tal nome [2] le *poids minimum d'une substance qui, dissoute dans 100 parties d'eau distillée, tue la plantule.* Mitolo nel suo recente lavoro [3] non cita affatto Berillio e Zirconio e, a proposito del Palladio, dice che tutti i metalli del gruppo (Rutenio, Osmio, Iridio, Palladio e Platino) *hanno grande importanza per le loro forti attività catalitiche del resto ben note.*

Avendo a mia disposizione un grammo di ciascuno dei suddetti elementi allo stato di cloruro anidro purissimo della casa Merck, ho voluto studiarne l'azione sul geotropismo radicale. A tale scopo sciolsi ogni sale in un litro d'acqua di fonte e avendo notato dalle prime esperienze che tali soluzioni e in particolar modo quelle di cloruro di zirconio e di palladio, paralizzavano completamente la sensibilità delle radici, ne feci, sempre in acqua di fonte, soluzioni più diluite.

Seguendo la tecnica già adoperata per ricerche simili con altri metalli [4] mettevo in recipienti cilindrici di vetro 250 c. c. delle soluzioni da sperimentare e d'acqua di fonte per i controlli, in questi liquidi immergevo per un'ora le radici di piantine di *Vicia sativa* nate da semi che avevo fatto precedentemente rigonfiare in acqua di fonte e germinare in cristallizzatori di vetro su carta da filtro imbevuta della stessa acqua. Tolte le radici dalle soluzioni ponevo in posizione orizzontale, dopo averli vuotati, i recipienti e quindi le piantine: a intervalli di tempo determinati, da 30′ a 48 ore, calcolavo le percentuali delle radici curvate.

Nelle seguenti tabelle riassumo la media dei risultat avuti nelle diverse esperienze concordanti.

(1) Coupin H., *Sur la toxicité des composés de l'argent, du mercure, de l'or, du platine et du palladium à l'égard des végétaux supérieurs.* « C. R. Soc. Biol. », sér. XI, to. III, 1901, pp. 509-510.

(2) Id., *Sur la toxicité des composés du sodium, du potassium et de l'ammonium à l'égard des végétaux supérieurs,* « Revue gén. de Bot. », to. 12, 1900, p. 177.

(3) Mitolo M., *Metalli e metalloidi non comuni negli organismi,* Roma, 1932, p. 169.

(4) Bambacioni Mezzetti V., *Ricerche fisiologiche intorno all'azione di soluzioni saline pure e di miscele di sali sulla sensibilità geotropica delle radici.* « Annali di Botanica », vol. 20, 1933, pp. 27-37

Percentuali delle radici curvate dopo essere state immerse per un'ora nelle seguenti soluzioni:

Tempo	Acqua di fonte	Cloruro di Berillio 1 °/oo	Cloruro di Berillio 0.5 °/oo	Cloruro di Zirconio 1 °/oo	Cloruro di Zirconio 0.09 °/oo	Cloruro di Zirconio 0.045 °/oo
dopo 60′	30	9	10	0	38	60
» 90′	78	20	20	0	90	90
» ore 2	94	25	28	0	96	96
» » 4	100	60	86	0	100	100
» » 5	100	84	96	0	100	100
» » 6	100	87	100	0	100	100
» » 7	100	93	100	0	100	100
» » 8	100	96	100	0	100	100
» » 24	100	100	100	10	100	100
» » 48	100	100	100	12 g. + 5 ag.*	100	100

* g. = geotropiche; ag. = ageotropiche.

Tempo	Acqua di fonte	Cloruro di Palladio 1 °/oo	Cloruro di Palladio 0.09 °/oo	Cloruro di Palladio 0.045 °/oo
dopo 60′	30	0	30	32
» 90′	78	0	72	78
» ore 2	94	0	96	96
» » 4	100	0	96 g. + 4 ag.	100
» » 5	100	0	96 g. + 4 ag.	100
» » 6	100	0	96 g. + 4 ag.	100
» » 7	100	0	96 g. + 4 ag.	100
» » 8	100	0	96 g. + 4 ag.	100
» » 24	100	4 g. + 24 ag.*	100	100
» » 48	100	4 g. + 24 ag.	100	100

* g. = geotropiche; ag. = ageotropiche.

Dai dati riportati si deduce che la soluzione all' 1 °/oo di cloruro di palladio paralizza completamente la sensibilità geotropica radicale: in essa le radici, che assumono un color marrone, crescono poco o non crescono affatto, per lo più si seccano mentre al colletto si formano radici secondarie, quindi le piantine non muoiono; ciò mostra che l'equivalente tossico del

cloruro di palladio, nelle soluzioni fatte con acqua di fonte, deve essere molto maggiore di quello notato dal Coupin per le soluzioni in acqua distillata.

Talora le radici, dopo un periodo di arresto dell'accrescimento, tornano ad accrescersi e il tratto nuovo formato si riconosce facilmente perchè non ha il colore marrone della parte basale e apicale che hanno subìto l'azione del Palladio: proprio questo tratto, in alcuni casi, dopo 24 ore dall'inizio della posizione orizzontale, si presenta curvato lateralmente o in alto o ad anello pur essendo l'apice rivolto in basso. Curvature ageotropiche si notano però anche in radici che non si sono accresciute. Secondo la recente teoria della polarità di Cholodnyj [1] e di Went [2] bisognerebbe ammettere che la soluzione in questione almeno in un primo tempo impedisca la formazione o la diffusione della sostanza di accrescimento e poi ne determini una distribuzione del tutto irregolare. Esperienze in corso sull'estrazione dell'ormone di crescenza potranno forse dimostrare se tale ipotesi è esatta.

La soluzione all' 1 °/₀₀ di cloruro di zirconio inibisce anch'essa le curvature geotropiche nelle prime otto ore dall'inizio della posizione orizzontale: nella grande maggioranza le radici seccano senza che le piantine muoiano, tuttavia alcune, dopo 24–48 ore, mostrano curve geotropiche o ageotropiche.

La soluzione all' 1 °/₀₀ di cloruro di berillio riesce meno tossica delle precedenti poichè solo per qualche ora deprime la sensibilità geotropica delle radici che, dopo 24 ore dall'inizio della posizione orizzontale, hanno tutte gli apici rivolti in basso quantunque siano molto meno cresciute di quelle del controllo. Ciò fa pensare che le curvature geotropiche non dipendano tanto dalla facoltà d'accrescimento quanto dall' ineguale distribuzione dell'ormone di crescenza. Favorevoli a questo pensiero sono pure le esperienze fatte dal Cholodnyj con soluzioni, a date concentrazioni, di cloruro di potassio: egli notava che esse, pur favorendo l'accrescimento radicale, deprimevano la sensibilità geotropica [3]. Anche alla concentrazione 0.5 °/₀₀ il cloruro di berillio rallenta l'accrescimento delle radici ma inibisce in misura minore le curvature.

Per quanto riguarda infine le soluzioni più diluite (0.09–0.045 °/₀₀) di cloruro di zirconio, dai dati sopra esposti risulta chiaro che esse sono capaci di eccitare la sensibilità geotropica: le soluzioni ugualmente concentrate di cloruro di palladio riescono invece indifferenti e solo in quella al 0.09 °/₀₀ si nota qualche sporadico disturbo geotropico con curvature ad anello.

(1) Cholodnyj N., *Beiträge zur analyse des geotropischen Reaktion.* « Jahrb. f. wiss. Bot. ». Bd. 65, H. 3, 1926, pp. 447–459.

(2) Went F. W., *Eine botanische Polaritätstheorie.* « Jahrb. f. wiss. Bot. », Bd. 76, H. 4, 1932, pp. 528–557.

(3) Cholodnyj N., *Ueber den Einfluss der Metallionen auf den Geotropismus der wurzeln.* « Beihefte z. Bot. Centrbl. », Bd. 39, Abt. I, H. 3, 1923, p. 249.

Fisiologia (Chimica fisiologica). — *Ulteriori osservazioni sul rapporto tra manifestazione dello scorbuto sperimentale e quantità di alimento elaborato*[1]. Nota[2] di V. Famiani, presentata dal Corrisp. S. Baglioni.

In una precedente Nota[3] abbiamo comunicato i risultati di nostre ricerche sulla cavia tendenti a stabilire i rapporti esistenti tra manifestazione dello scorbuto sperimentale e quantità di alimento – deficiente in fattore C – elaborato. All'esecuzione di dette ricerche noi fummo condotti da considerazioni che, sebbene ampiamente esposte nella citata nostra Nota, riteniamo utile ricordare ancora per maggior chiarezza di quanto qui riferiremo.

Da lungo tempo G. Amantea[4], in base a numerose sue ricerche sperimentali sui colombi, circa l'azione e il valore fisiologico del fattore B^1, ha sostenuto essere detto fattore indispensabile al normale svolgersi dei processi metabolici, ed in rapporti assai stretti sicuramente con i fenomeni catabolici – pur restando da precisare quelli con gli anabolici, – nel senso che l'usura di esso, alla quale quotidianamente va incontro l'animale per lo svolgimento della sua attività metabolica, si verifica *in misura ben definita e proporzionale all'entità del consumo complessivo*, in quest'ultimo essendo compresa oltre la quantità di alimento deficiente elaborata, anche la quantità di materiali di deposito degli organi e dei tessuti eventualmente consumata durante l'alimentazione carenzata. Normalmente detto fattore viene dall'animale assunto dall'esterno in quantità sufficiente non solo a riparare l'usura subita, ma altresì a costituirne e mantenerne una certa riserva, atta a proteggerlo temporaneamente contro gli effetti di una eventuale dieta disadatta.

G. Amantea, ha potuto stabilire che colombi normali adulti, alimentati con riso brillato, partendo da condizioni di massima riserva in fattore B^1, non presentano mai segni di beri-beri prima di avere consumato almeno

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisiologica della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 30 luglio 1934.

(3) V. Famiani, *Sul rapporto tra manifestazione dello scorbuto sperimentale e quantità di alimento elaborato*. « Il problema alimentare », 1931, 1, 180.

(4) G. Amantea, *Ricerche sperimentali sul cosidetto beri-beri dei colombi*. « Riv. di Biol. », 1922, 4, 662; Id., *Sul valore fisiologico del fattore B*. « I problemi della nutrizione », anno I, 1924; Id., *Ulteriore contributo alla conoscenza dell'azione del fattore B*. « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 1934, 1, fasc. 3; Id., *Sul fattore antineuritico* (B^1) *e sul concetto di « quoziente beri-berico »* (*Qb*). « Rendic. R. Acc. Naz. dei Lincei », 1933, 18, 317.

una quantità pari al 70 % del loro peso, di riso brillato e dei loro tessuti insieme; ed indicando con P il peso corporeo dell'animale e con C il consumo complessivo, ha chiamato « *quoziente beri-berico o pel fattore* B^1 » (Q_b), appunto il valore del rapporto $\frac{C}{P}$. Valore che egli ha trovato oscillare nei vari animali (sempre naturalmente in condizioni di massima riserva in fattore B^1) entro limiti compresi tra 0,7 e 1, ma che per ogni singolo colombo presenta solo variazioni assai ristrette, avendo cura di calcolarlo esattamente alla comparsa dei primi segni netti di beri-beri. La necessità di sorprendere bene tale momento è giustificata anche dal vantaggio di potere, con un tempestivo intervento terapeutico, salvare l'animale e utilizzarlo per ulteriori esperienze, in cui resta pertanto eliminato il fattore individuale.

E poichè da una doppia serie di ricerche di R. De Marco [1] era stato messo in evidenza un espediente semplice di esplorazione, che permetteva di stabilire con certezza e assai agevolmente nella cavia la comparsa dei primi segni di scorbuto, nonchè di seguirne le ulteriori evoluzioni, noi, raggiunta così la possibilità di sperimentare sulla cavia per lo scorbuto, come sul colombo pel beri-beri, ci proponemmo di vedere se il concetto del quoziente berico potesse essere trasportato anche nel campo dello scorbuto sperimentale: se esistesse cioè anche un *quoziente scorbutico o pel fattore* C (Q_c) come esiste un *quoziente beri-berico o pel fattore* B^1 (Q_b).

Per la necessità, già chiarita, di partire sempre da condizioni di riserva massima in fattore C (presumibilmente eguali), prima di iniziare ciascuna esperienza, a ogni animale si offriva per diversi giorni l'impasto proposto da M.lle Randoin e Lomba per ottenere lo scorbuto nelle cavie, completandolo però con l'aggiunta del 10 % di succo fresco di limone, aggiunta che – in base alle citate ricerche di De Marco – poteva essere considerata esuberante e tale da permettere accumulo; in pari tempo si abituava così l'animale al nuovo cibo che poi, senza limone, avrebbe costituito la dieta scorbutigena. E quando fu possibile ripetere l'esperimento sulla stessa cavia, tra le prove successive si lasciò sempre intercorrere un periodo (15 giorni in media) di alimentazione con l'impasto integrato dal succo di limone.

Sperimentando così su 12 cavie potemmo dimostrare evidente un intimo rapporto tra comparsa dei primi disturbi netti di scorbuto e quantità di alimento deficiente consumato fino a quel momento dall'animale; ciò che ci indusse ad ammettere che anche pel fattore C deve verificarsi, come pel fattore B^1, una quotidiana, necessaria usura durante lo svolgersi degli

(1) R. De Marco, *Sul fattore C studiato nel succo di bergamotto in confronto col succo di limone.* « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 1927, 2, 1023; Id., *Sulla possibilità di rilevare i primi sintomi sicuri di scorbuto sperimentale e di seguirne l'evoluzione nella cavia.* « Ibidem », 1930, 5, fasc. 3.

ordinari processi metabolici, connessi coll'utilizzazione dell'alimento ingerito, e forse anche coll'utilizzazione dei materiali di riserva degli organi e dei tessuti.

Ed esprimendo con C la quantità in peso di alimento consumato (più il peso perduto o meno quello guadagnato dall'animale durante l'esperienza) e con P il peso iniziale della cavia, il valore di $\frac{C}{P}$ (analogamente a quanto G. Amantea aveva stabilito pel fattore B^1) veniva ad assumere significato di vero e proprio *quoziente scorbutico o pel fattore* C, che indicammo col simbolo *Qc*. Il valore di questo rapporto si dimostrò nei vari animali, a parità di riserva – presumibilmente massima – in fattore C, oscillante entro limiti ristretti (0,90-1,2) e prossimi a quelli segnalati da G. Amantea per il *Qb* (0,70-1), rivelandosi inoltre pressochè costante in esperienze successive eseguite sugli stessi animali, e sempre a parità di grado di riserva in fattore C. Qualche valore eccezionalmente basso (0,81–0,86) venne da noi riferito a probabile incompleta ricostituzione della riserva, durante il periodo preparatorio, mentre considerammo dovuto a condizioni interne abnormi da identificare l'unico valore eccezionalmente alto ottenuto (1,5).

Questi i risultati delle nostre precedenti esperienze. Insistendo successivamente sull'argomento, sempre con identica tecnica, e costretti a servirci di nuovi animali (essendoci venuti a mancare tranne uno – N° 1 della tabella che segue – tutti quelli su cui avevamo prima sperimentato) notammo che i valori del *Qc* erano nelle nuove cavie, sebbene ancora oscillanti in limiti assai ristretti, sensibilmente più elevati che nei primi (1,4-1,8).

Il fatto che i nuovi nostri animali provenivano dallo stesso ceppo che i primi, e la considerazione che i nuovi valori trovati eran troppo vicini tra loro e troppo lontani dei precedenti, ci indussero a scartare l'idea del fattore individuale e ad ammettere che la causa della divergenza fosse più verosimilmente da ricercare in un differente grado, nei due casi, dell'entità della riserva di partenza in fattore C.

La quantità di succo di limone (10 %), da noi aggiunta all'impasto poteva nel primo caso non contenere tanto fattore C da permetterne un sufficiente accumulo. Ciò non fa meraviglia se si pensa che differenze nel contenuto in fattore C possono esistere nei limoni, a seconda della varietà, della provenienza, del grado di maturazione ecc. Ed era lecito anche pensare, che pure nel secondo caso potevamo non avere raggiunto le desiderate condizioni di riserva massima.

Abbiamo ritenuto pertanto necessario apportare alla tecnica da noi seguìta una variante – per ciò che si riferiva alla preparazione degli animali – la quale ci garantisse da inconvenienti del genere di quelli segnalati, permettendoci di partire in ogni caso dal necessario limite di riserva massima in fattore C.

Qui brevemente riassumeremo le nostre nuove osservazioni.

Abbiamo sperimentato su 10 cavie adulte, di sesso maschile, acquistate dal commercio in ottime condizioni generali, e tenute in osservazione per un certo tempo durante il quale ripetutamente esplorate (col metodo proposto da R. De Marco, e ampiamente riportato nella nostra precedente Nota) non presentarono mai segni di dolore nè ai movimenti passivi degli arti, nè alla compressione su la nuca, sulle costole e sui muscoli delle docce vertebrali.

Poste in gabbie a scomparti separati, vennero alimentate con l'impasto di Randoin e Lomba, nel quale però al posto della farina furono da noi adoperati i fagiuoli bianchi totali lessati: naturalmente, nel calcolo del Qc si teneva esatto conto della quantità di acqua assunta dai fagiuoli stessi durante la lessatura, e che veniva poi detratta nel computo della quantità totale di alimento ingerito dalla cavia.

Prima di iniziare ogni singolo periodo di esperienza gli animali venivano alimentati per un numero di giorni, che variò, nelle diverse prove, da 4 a 12, esclusivamente ed abbondantemente con foglie fresche di cavolo, offrendone in quantità tale, che potessero assumerne a volontà e sempre ne superasse: ciò allo scopo di precisare quanti giorni di preparazione occorressero in realtà per portare la riserva in fattore C ad un livello massimo e costante.

Appena i primi segni di scorbuto apparivano netti, l'esperimento veniva sospeso, la cavia rimessa a vita ed alimentazione libera, e si calcolava il valore del rapporto $\frac{C}{P}$ (Qc) in base alla formula:

$$\frac{C}{P} = \frac{\text{alimento consumato} \begin{matrix} + \text{ peso perduto} \\ \text{o} \\ - \text{ peso guadagnato} \end{matrix}}{\text{peso iniziale}} = Qc.$$

(Riteniamo inutile tornare qui a chiarire la presente formula, avendolo già ampiamente fatto nella nostra citata precedente Nota, alla quale anzi rimandiamo per maggiori dettagli di tecnica).

Tra le prove successive si lasciò sempre decorrere un congruo periodo di riposo, in cui gli animali si alimentarono liberamente a volontà.

Abbiamo in tal modo eseguito in totale 30 osservazioni, adoperando degli animali alcuni per una sola esperienza, altri per un numero variabile tra 2 e 6; e riassumiamo nella seguente tabella i valori del Qc trovati nelle varie prove, e per ogni singolo animale esplorato.

Numero dell'animale	VALORI DEL Q_c DOPO: preparazione con aggiunta del 10 % di succo di limone	preparazione mediante alimentazione esclusiva con cavolo fresco per giorni: 4 (gennaio)	8 (aprile)	12 (luglio)	12 (dicembre)	6 (aprile)
1	0,80	—				
2	1,4	3,04	—			
3	1,6	2,78	2,91	1,42	—	
4	1,4	2,57	2,68	1,92	2,09	2,35
5	1,6	—				
6	1,8	3,35	3,10	2,16	2,60	—
7		2,22	2,25	1,26	1,97	2,02
8		2,00	2,88	—		
9					2,62	3,1
10					1.60	1,98

Dall'esame di essa appare chiaro, che, dopo la preparazione degli animali con 4 giorni di esclusiva alimentazione a cavolo, i valori del Q_c si sono rivelati assai più alti di quelli ottenuti nelle medesime cavie per preparazione con aggiunta del 10 % di succo di limone all'impasto di Randoin e Lomba; e che spostamenti sensibili non si sono in generale verificati quando il periodo di alimentazione con cavolo, anzichè per 4, si è protratto per 8 giorni.

Quando invece detto periodo di preparazione con cavolo è stato spinto fino a 12 giorni, il valore del Q_c ha subito un abbassamento notevole, che, secondo noi, può essere riferito solo in minima parte ad un minore contenuto di fattore C nel cavolo durante il periodo estivo (luglio); infatti, per un analogo trattamento fatto con cavolo invernale, nel mese di dicembre, i valori ottenuti per il Q_c – sebbene più elevati che nel precedente caso del cavolo estivo – sono rimasti sempre lontani da quelli osservati per una simile preparazione della durata di 4 o 8 giorni. Così che ci sembra più logico pensare che l'alimentazione esclusiva con cavolo, troppo prolungata, non consente all'animale di portare al massimo la sua riserva in fattore C, in quanto lo costringe forse ad intaccare e metabolizzare parte delle sue riserve degli organi e dei tessuti, con conseguente, necessario impegno di una quota di detto fattore. Infatti il valore del Q_c, determinato in alcuni degli stessi animali dopo un periodo di alimentazione con cavolo durato 6 giorni, si è notevolmente elevato, riportandosi pressochè al livello di quelli ottenuti per un periodo preparatorio di 4 o 8 giorni.

Riteniamo pertanto che la preparazione con solo cavolo per circa una settimana (6–8 giorni), sia quella che meglio si presta al nostro scopo, permettendo agli animali così trattati di portare al massimo la loro riserva in fattore C, con il grande vantaggio, per l'osservatore, di partire nelle varie prove da condizioni tra loro sempre assai prossime e presumibilmente costanti.

Risulta da queste nostre nuove osservazioni ancora confermata la esistenza di un intimo rapporto tra comparsa dei primi segni netti di scorbuto sperimentale e quantità di alimento deficiente consumata fino a quel momento dall'animale; nonchè la possibilità di utilizzare un indice rappresentato da un *quoziente scorbutico o pel fattore* C (Qc), analogo al *quoziente beri–berico* (Qb) di G. Amantea. Ma i valori di esso sono apparsi – in queste nostre nuove ricerche – sensibilmente più elevati di quelli da G. Amantea segnalati per il Qb.

Tanto abbiamo ritenuto utile segnalare a ulteriore estensione e a parziale rettifica dei dati pubblicati nella nostra precedente Nota. Ci riserviamo di ritornare sull'argomento quando – sulla base di ulteriori ricerche eseguite con la nuova tecnica di preparazione risultataci adatta – saremo in possesso dei dati che ci permettano nuove aggiunte e considerazioni.

Fisiologia (Chimica fisiologica). — *Sul quoziente beri-berico* (Q_b) *del colombo in condizioni normali* [1]. Nota [2] di G. Amantea, V. Zagami, A. Baglioni, V. Famiani, G. Zanghì e L. Ravasini, presentata dal Corrisp. S. Baglioni.

Recentemente uno di noi (G. Amantea) ha avuto occasione di precisare e fissare [3] quelli che possiamo considerare – allo stato attuale delle ricerche fatte in questo Laboratorio sull'argomento – come i nostri punti fermi, circa il significato e comportamento fisiologico del fattore antineuritico B^1; e, dopo averli esposti in modo da farne derivare chiaro il concetto di ciò che intendiamo per « quoziente beri-berico » (Q_b), ha insistito sui dettagli della tecnica [4], molto semplice, ma che pure è necessario seguire scrupolosamente, per pervenire all'esatta determinazione del Q_b stesso, promettendo di riferire in seguito i risultati ottenuti.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisiologica della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 12 luglio 1934.

(3) G. Amantea, *Sul fattore antineuritico* (B^1) *e sul concetto di « quoziente beri-berico »* (Q_b). « Rendic. della R. Accad. dei Lincei », vol. XVIII, ser. 6ª, 2° sem., fasc. 7-8, 1933-XI.

(4) G. Amantea, *La determinazione del « quoziente beri-berico »* (Q_b): *notizie di tecnica.* « Rendic. della R. Accad. dei Lincei », vol. XVIII, ser. 6ª, 2° sem., fasc. 9, 1933-XII.

Qui vogliamo appunto presentare e brevemente comentare buona parte dei numerosi dati finora raccolti, nei riguardi del valore che può assumere il Q_b del colombo in varie condizioni normali: essi senza dubbio varranno a integrare, documentandolo, il contenuto delle citate pubblicazioni precedenti, e serviranno altresì a costituire una somma di rilievi di utile riferimento, per quanto ancora dovremo aggiungere, in note successive.

Raggrupperemo i dati, che ci proponiamo di riferire, in maniera da fare risultare i fatti principali, che ne restano dimostrati.

E innanzi tutto vediamo entro quali limiti oscillano i valori del quoziente beri-berico, che possiamo definire come *normale*.

Precisamente chiamiamo *quoziente beri-berico normale* quello, che si ottiene, adottando, per determinarlo, le precise condizioni di tecnica precedentemente descritte [1], e cioè: preparando il colombo prescelto colla somministrazione quotidiana di gr. 30-35 di grano più 2-3 gr. di lievito di birra, durante i 4-6 giorni, che precedono l'esperienza; procedendo solo dopo, con le debite norme, alla alimentazione orizanica, fino alla comparsa dei primi disturbi beri-berici sicuri; e intervenendo a questo punto con adatti mezzi curativi, per chiudere la prova salvando l'animale, e per calcolare il valore del Q_b, in base ai dati molto semplici, che è necessario all'uopo utilizzare (peso corporeo iniziale, peso perduto, e alimento effettivamente elaborato),

In tal guisa, partendo da un livello di carica o riserva protettiva di fattore B^1, che rappresenta il massimo raggiungibile per ogni animale così trattato, l'esperienza decorre fino al grado di squilibrio interno vitaminico (B^1) che giustifica i primi sintomi beri-berici netti; sicchè poi, anche nel computo finale del noto rapporto $\frac{C}{P} = \frac{\text{alimento elaborato} + \text{peso perduto}}{\text{peso iniziale}}$, che corrisponde appunto al Q_b, si tiene conto della quantità complessiva massima di materiali nutritivi, che l'animale poteva metabolizzare, impegnando la più alta quota di fattore antineuritico immagazzinabile, e quindi disponibile; o ancora meglio – secondo il nostro punto di vista – si tiene conto della quantità totale massima dei materiali nutritivi, il cui metabolismo condiziona la necessaria e inevitabile usura della più alta quota di fattore antineuritico, accumulabile come riserva.

Il valore del Q_b dipende infatti dall'entità della quota di fattore B^1 di riserva; ma ciò risulterà meglio chiarito da quanto sarà detto più avanti.

Qui ci interessa intanto dare uno sguardo complessivo alla tabella I, in cui abbiamo riunito i valori ottenuti, determinando – come è stato precisato – il Q_b *normale* in n. 67 colombi, di razza diversa e di ambo i sessi, tutti adulti, e tutti rivelatisi in ottimo stato di salute, durante un congruo periodo di osservazione, che trascorsero nella grande uccelliera dell'Istituto, assumendo cibo misto e molto variato a volontà.

(1) G. Amantea, loc. cit.

Considerando tutti insieme, senza esclusioni, i casi riportati, si rileva anzitutto, che il Q_b normale ha oscillato fra 0,62 e 1,35; ma in realtà questi limiti estremi rappresentano quello minimo e quello massimo meno frequenti. Risulta infatti, che di regola o più frequentemente i valori tendono a oscillare piuttosto fra 0,70 e 1 circa, con una maggiore ricorrenza di cifre, comprese fra 0,75 e 0,95: eccezionali dunque sono da ritenere quelle sensibilmente inferiori a 0,70, ovvero decisamente superiori all'unità.

Non siamo ancora in grado di affermare, se e quali variazioni possano avvenire in rapporto coll'*età*. Non pare, che influisca il *sesso*. Ma pare invece, che meriti considerazione la *razza*, nel senso che i colombi di una razza determinata sembrano presentare un comportamento abbastanza uniforme, fornendo dati fra loro relativamente vicini, o per lo meno non molto lontani. Così, ad es., un gruppo di colombi pavoncelli bianchi, di razza pura, tutti provenienti da un medesimo ceppo e allevati nella colombaia dell'Istituto, ci ha fornito quozienti fra 0,70 e 0,87; un altro gruppo di colombi romani grigi (tipo torraioli) ci ha fornito quasi sempre quozienti più elevati (fra 0,85 e 1); abbiamo infine già motivi per ritenere, che le stesse cifre elevatissime, da noi considerate eccezionali, siano caratteristiche o proprie di altra razza. Ma è ovvio, che conclusioni sicure in questo senso si potranno solo trarre, quando si disporrà di un numero maggiore di osservazioni.

Per ciò che concerne il rapporto tra valore del Q_b normale e durata dell'esperienza, se in generale è vero che valori più elevati del Q_b possono corrispondere a esperienze di maggior durata, e viceversa, è d'altra parte pur vero, che tale corrispondenza non può dirsi nè assoluta nè costante, e che comunque non si può formulare una vera regola al riguardo.

TABELLA I.

Numero progressivo animali	Durata esperimento in giorni	Peso iniziale gr.	Peso finale gr.	Peso perduto gr.	Alimento elaborato gr.	Q_b
1	20	425	335	90	320	0,90
2	18	490	450	40	442	0,98
3	17	515	450	65	361	0,91
4	18	495	459	36	403	0,96
5	14	430	410	20	359	0,88
6	13	458	371	82	298	0,83
7	26	420	340	50	448	1,10
8	14	458	435	23	365	0,84
9	21	528	455	73	336	0,77
10	14	428	405	23	291	0,73
11	17	475	375	100	308	0,85
12	24	465	370	95	409	1,08
13	19	470	390	80	262	0,72
14	14	430	400	30	300	0,70
15	35	435	300	135	423	1,35
16	16	345	330	15	257	0,78
17	18	360	340	20	259	0,77
18	14	330	305	25	200	0,68
19	15	435	292	53	200	0,73
20	15	340	300	40	257	0,87
21	14	320	290	30	206	0,73
22	13	334	282	52	230	0,84
23	10	298	277	21	195	0,72
24	12	300	287	13	200	0,71
25	15	453	369	84	334	0,70
26	18	510	480	30	385	0,81
27	19	410	315	95	422	1,26
28	13	440	370	70	271	0,77
29	16	380	280	100	379	1,20
30	15	398	345	53	258	0,78
31	13	335	295	40	294	0,99
32	11	285	250	35	179	0,74
33	15	365	320	45	308	0,96

Segue: Tabella I.

Numero progressivo animali	Durata esperimento in giorni	Peso iniziale gr.	Peso finale gr.	Peso perduto gr.	Alimento elaborato gr.	Q
34	17	330	295	35	343	1,14
35	12	330	325	5	293	0,90
36	16	460	378	82	251	0,72
37	18	420	350	70	234	0,72
38	21	508	415	93	391	0,95
39	14	422	340	82	284	0,86
40	19	520	413	107	383	0,94
41	23	488	400	88	342	0,88
42	16	445	410	35	309	0,77
43	17	487	433	54	341	0,81
44	14	432	376	56	271	0,75
45	15	430	372	58	296	0,82
46	18	578	493	85	340	0,73
47	14	510	476	34	311	0,67
48	16	441	420	21	368	0,88
49	21	411	294	117	274	0,74
50	16	450	440	10	270	0,62
51	11	417	377	40	223	0,63
52	16	489	418	71	294	0,74
53	17	478	437	41	286	0,68
54	19	553	490	63	361	0,76
55	15	487	435	52	283	0,68
56	15	347	295	52	194	0,70
57	25	465	374	91	355	0,95
58	15	534	479	55	307	0,67
59	17	483	420	63	342	0,83
60	15	362	343	19	301	0,88
61	15	480	412	68	296	0,95
62	17	459	370	89	335	0,92
63	24	565	406	159	382	0,96
64	20	455	400	55	414	1,03
65	15	447	410	37	271	0,69
66	23	493	420	73	364	0,88
67	15	424	387	37	263	0,71

Avremo occasione di valutare in seguito, quando tratteremo dell'applicazione del criterio del quoziente beri–berico alle ricerche quantitative sul fattore B^1, tutta la particolare importanza di questo rilievo.

Ma se quanto abbiamo detto vale pel quoziente beri–berico *normale* del colombo, cioè per quello determinato dopo avere fatto precedere l'opportuna preparazione col lievito di birra, per assicurarsi la condizione di riserva interna massima di B^1, le cose invece non decorrono allo stesso modo, quando si tratta di colombi così *non preparati*.

Escludendo infatti la preventiva preparazione, e sperimentando di conseguenza nelle svariate condizioni, in cui gli animali si possono sorprendere nella vita libera, è ovvio, che la loro carica protettiva di B^1 si potrà o non trovare a un livello più o meno basso, rispetto al limite massimo raggiungibile, a seconda che essi prima abbiano dovuto o non fronteggiare maggiori o minori deficienze (pel B^1) dell'alimento avuto a disposizione. Perciò all'inizio, dunque, dell'alimentazione orizanica non sempre il colombo si troverà garantito al massimo dalla propria riserva, nè sempre nella stessa misura; il punto di partenza dell'esperienza non sarà sempre il più alto possibile, come nel caso precedente; in corrispondenza alla più o meno limitata riserva iniziale, risulterà alla fine più o meno ridotta la quantità globale di materiali nutritivi, che l'animale sarà capace di elaborare prima che insorgano i sintomi beri–berici; sicchè, in definitiva, più o meno basso potrà risultare il Q_b, di fronte a quello, che avrebbe rappresentato il valore normale, qualora il colombo fosse stato preparato.

Da questo punto di vista l'argomento che ci interessa, è stato a suo tempo studiato già da uno di noi (G. Zanghì) [1]; cosicchè nella tabella II riportiamo tutti i risultati da lui allora riferiti, coll'aggiunta di alcuni altri nuovi.

Anche un rapido esame di tale tabella basta a rilevare, che in questo caso da valori presumibilmente normali o assai prossimi ai normali, ma piuttosto scarsi, si discende ad altri, che ricorrono con maggiore frequenza, ma che senza dubbio sono da considerare tutti più o meno abnormemente bassi.

Questi risultati evidentemente confermano il rapporto di dipendenza del valore del Q_b dall'entità della quota di fattore B^1 di riserva, com'è stato più sopra accennato, e come G. Zanghì aveva già messo in evidenza [2].

Se volessimo istituire il raffronto tra comportamento del Q_b e comportamento della durata dell'esperienza (che, per brevità, non abbiamo considerato nella tabella II), giungeremmo pure qui a conclusioni eguali a quelle del caso precedente.

(1) G. Zanghì, *Sul quoziente beri-berico e sulla riserva in fattore* B *nei colombi normali.* «Boll. d. Soc. ital. di Biol. sper.», vol. II, fasc. 2, 1927.

(2) G. Zanghì, loc. cit.

Tabella II.

Numero degli animali	Q_b	Numero degli animali	Q_b
1	0,78	22	0,62
2	0,51	23	0,67
3	0,79	24	0,51
4	0,61	25	0,56
5	0,56	26	0.43
6	0,80	27	0,70
7	0,70	28	0,70
8	0,75	29	0,58
9	0,68	30	0,85
10	0,68	31	0,64
11	0,72	32	0,53
12	0,81	33	0,62
13	0,70	34	0,81
14	0,55	35	0,68
15	0,86	36	0,79
16	0,72	37	0,62
17	0,57	38	0,73
18	0,74	39	0,80
19	0,80	40	0,90
20	0,59	41	0,71
21	0,58	42	0,92

Ci rimane da riferire un terzo gruppo di osservazioni, che precisamente riflettono un fatto, che ha per noi particolare importanza, e che G. Amantea ha messo in risalto fin dalle prime pubblicazioni sull'argomento, e poi riaffermato in quasi tutte le altre successive (1).

Egli ha trovato, che, quando si determina più volte di seguito, in condizioni uniformi – e intercalando opportuni periodi di riposo, a vita e alimentazione libera, – *su uno stesso colombo*, quello che qui abbiamo designato come *quoziente beri-berico normale*, questo si rivela *praticamente costante*.

(1) Per le notizie bibliografiche complete sull'argomento consultare: G. Amantea, *Sul fattore antineuritico* (B^1) *e sul concetto di « quoziente beri-berico »* (Q_b). « Rendic. della R. Accad. Naz. dei Lincei », vol. XVIII, serie 6ª, 2° sem., fasc. 7-8, 1933-XI.

Appunto a documentazione di tale fatto, vogliamo riportare nella seguente tabella III alcuni esempi assai dimostrativi:

Tabella III.

Animale	Valore del Q_b in esperienze successive							
	Esp. I	Esp. II	Esp. III	Esp. IV	Esp. V	Esp. VI	Esp. VII	Esp. VIII
Colombo 1 (♂)	0,96	0,97						
Colombo 2 (♂)	0,77	0,71	0,76					
Colombo 3 (♀)	0,70	0,70	0,69	0,69	0,70			
Colombo 4 (♂)	0,73	0,76	0,73	0,80	0,77	0,72	0,77	0,78

Come si vede, qui si hanno di regola soltanto oscillazioni della seconda cifra decimale, e comunque differenze non superiori a 0,10; ma talora la coincidenza di più valori successivi può dirsi davvero sorprendente.

La durata dell'esperienza non è stata neppure in questo caso tale, da permettere di stabilire una regola di corrispondenza col valore del Q_b.

L'aver potuto accertare la relativa invariabilità o relativa costanza del Q_b per uno stesso colombo, esplorato in condizioni affatto eguali di tecnica, rappresenta il risultato fondamentale, che ha permesso a G. Amantea di applicare la sua nozione del quoziente beri-berico al dosaggio del fattore antineuritico B^1, ovvero di utilizzarla in generale per tutte le indagini sul medesimo, le quali rivestano carattere di ricerche quantitative, o debbano eseguirsi con criterio comparativo ed esigano l'esclusione di possibili differenze individuali.

Quando sarà possibile trattare esaurientemente di tali applicazioni, meglio si potrà valutare il reale interesse, che ci sembra spettare al complesso dei risultati riferiti.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1934 (Anno XII).

(Ogni Memoria e Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo)

Matematica (Algebra). — *Sulla struttura delle algebre pseudonulle.* Nota [1] del Corrisp. G. Scorza.

Se A è un'algebra pseudonulla di indice r e l'ordine di A^i si indica con n_i, essendo

$$A > A^2 > A^3 > \cdots > A^{r-1} > A^r = 0,$$

si ha

$$n_1 > n_2 > n_3 > \cdots > n_{r-1} > n_r = 0.$$

A maggior precisazione di quest'ultime diseguaglianze qui si vuol dimostrare che è, per $j = 1, 2, \cdots, r-1$,

$$\alpha) \qquad (n_1 - n_2)^j \geqq n_j - n_{j+1}$$

e, per $j + h \leqq r - 1$,

$$\beta) \qquad (n_j - n_{j+1})(n_h - n_{h+1}) \geqq n_{j+h} - n_{j+h+1}.$$

Che se poi l'algebra A è commutativa, la $\alpha)$ può esser sostituita dalla relazione più espressiva

$$\alpha') \qquad \binom{n_1 - n_2 + j - 1}{j} \geqq n_j - n_{j+1}.$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 17 settembre 1934.

Per comodità di discorso diciamo *scarto* di A la differenza $n_1 - n_2$ fra gli ordini di A ed A^2 e indichiamola con δ; allora, essendo n_1 la somma delle differenze

$$n_1 - n_2 , n_2 - n_3 , \cdots , n_{r-1} - n_r = n_{r-1} ,$$

in virtù delle α) e α') si avrà

$$\gamma) \qquad n_1 \leq \delta + \delta^2 + \cdots + \delta^{r-1} = \frac{\delta^r - 1}{\delta - 1} - 1 ,$$

o, più precisamente, se A è commutativa,

$$\gamma') \qquad n_1 \leq \binom{\delta}{1} + \binom{\delta + 1}{2} + \cdots + \binom{\delta + r - 2}{r - 1} =$$

$$\sum_{t}^{0 \cdots r-2} \binom{\delta + t}{\delta - 1} = \binom{\delta + r - 1}{\delta} - 1 .$$

Ebbene, dimostreremo che *tanto nella* γ), *quanto, se* A *è commutativa, nella* γ') *può valere il segno di uguaglianza; ma quando ciò accade l'algebra* A *è pienamente caratterizzata, di fronte alla relazione di equivalenza, dal valore di* δ *e dal corpo nel quale è definita.*

1. Sia $S_i (i = 1 , \cdots , r - 1)$ un sistema complementare di A^{i+1} in A^i, cioè si abbia

$$A^i = S_i + A^{i+1} \qquad \text{ed} \qquad S_i \cap A^{i+1} = 0 ;$$

sarà

$$A = S_1 + A^2 = S_1 + S_2 + A^3 = \cdots = S_1 + S_2 + \cdots + S_{r-1} = \sum_{i_1}^{1 \cdots r-1} S_{i_1} ,$$

e quindi

$$(1) \qquad A^j = \sum_{i_1, \cdots, i_j}^{1 \cdots r-1} S_{i_1} S_{i_2} \cdots S_{i_j} .$$

Ora da

$$S_{i_1} \leq A^{i_1} \quad , \quad S_{i_2} \leq A^{i_2} , \cdots , S_{i_j} \leq A^{i_j}$$

si trae

$$S_{i_1} S_{i_2} \cdots S_{i_j} \leq A^{i_1 + i_2 + \cdots + i_j} ,$$

ed è

$$i_1 + i_2 + \cdots i_j \geq j ;$$

per conseguenza dei termini che compariscono nella somma a secondo membro della (1) soltanto quello che si ottiene per $i_1 = i_2 = \cdots = i_j = 1$, cioè S_1^j, non è contenuto in una potenza di A con esponente $> j$, indi in A^{j+1}. Si trae da ciò che

$$A^j = S_1^j + A^{j+1} ,$$

è che quindi, se si indicano con μ_j e ν_j gli ordini di S_1^j e della sua intersezione con A^{j+1}, è [1]

$$n_j = \mu_j + n_{j+1} - \nu_j ,$$

ossia

$$\mu_j - \nu_j = n_j - n_{j+1} . \tag{2}$$

Ora l'ordine di S_1 è $n_1 - n_2$, e se $u_1, u_2, \cdots, u_{n_1-n_2}$ sono altrettanti elementi indipendenti di S_1, il sistema S_1^j è quello individuato dagli $(n_1 - n_2)^j$ prodotti del tipo

$$u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_j} \quad (i_1, i_2, \cdots, i_j = 1, 2, \cdots, n_1 - n_2); \tag{3}$$

dunque è

$$(n_1 - n_2)^j \geqq \mu_j ,$$

ossia, confrontando con la (2) e badando che $\nu_j \geqq 0$,

$$(n_1 - n_2)^j \geqq n_j - n_{j+1} . \tag{\alpha}$$

Se l'algebra A *è commutativa* fra i prodotti del tipo (3) quelli distinti sono, al più, tanti quante sono le combinazioni, con eventuali ripetizioni, della classe j di $n_1 - n_2$ oggetti; quindi nell'ipotesi attuale è

$$\binom{n_1 - n_2 + j - 1}{j} \geqq \mu_j ,$$

e per conseguenza

$$\binom{n_1 - n_2 + j - 1}{j} \geqq n_j - n_{j+1} . \tag{\alpha'}$$

Infine si osservi che da

$$A^j = S_j + A^{j+1} \quad , \quad A^b = S_b + A^{b+1}$$

si trae, moltiplicando membro a membro,

$$A^{j+b} = S_j S_b + A^{j+1} S_b + S_j A^{b+1} + A^{j+b+2} ;$$

ma

$$A^{j+1} S_b \leqq A^{j+1} A^b = A^{j+b+1} \quad \text{e così} \quad S_j A^{b+1} \leqq A^{j+b+1} ,$$

inoltre A^{j+b+2} è contenuta in A^{j+j+1} dunque

$$A^{j+b} \leqq S_j S_b + A^{j+b+1} .$$

(1) G. Scorza, *Corpi numerici e algebre* (Messina, Principato, 1921), p. 196.

Di qua, poichè l'ordine di $S_j S_h$ è certo non superiore al prodotto degli ordini $n_j - n_{j+1}$ ed $n_h - n_{h+1}$ di S_j ed S_h, si trae

$$n_{j+h} \leq (n_j - n_{j+1})(n_h - n_{h+1}) + n_{j+h+1},$$

ossia

$$\beta) \qquad (n_j - n_{j+1})(n_h - n_{h+1}) \geq n_{j+h} - n_{j+h+1} \quad (j + h \leq r - 1).$$

Dalle $\alpha)$ e $\alpha')$, come già è stato osservato nelle righe introduttive, si deduce che, *detto* δ lo scarto di A, *per l'ordine* n_1 *di* A *si ha la limitazione*

$$\gamma) \qquad n_1 \leq \frac{\delta^r - 1}{\delta - 1} - 1$$

o, se A *è commutativa, la limitazione*

$$\gamma') \qquad n_1 \leq \binom{\delta + r - 1}{\delta} - 1 .$$

Avvertasi che nella $\gamma)$ – o nella $\gamma')$, se A è commutativa – vale il segno di eguaglianza quando, e solo quando, ciò accade, a seconda del caso, per tutte le $\alpha)$ o per tutte le $\alpha')$, ossia quando, e solo quando, l'ordine di S_1^j, per $j = 1, 2, \cdots, r - 1$, è, a seconda del caso,

$$\delta^j \quad \text{o} \quad \binom{\delta + j - 1}{\delta},$$

e inoltre i sistemi S_1^j e A^{j+1} sono complementari in A^j.

2. Le $\alpha)$ mostrano che, se è $n_1 - n_2 = 1$, sono eguali ad 1 tutte le altre differenze $n_j - n_{j+1}$, per $j = 2, 3, \cdots, r - 1$; ma allora l'ordine dell'algebra A è $r - 1$, ed A, per un teorema del Frobenius [1], è un'algebra potenziale.

La considerazione fatta è invertibile; e dunque:

Perchè un'algebra pseudonulla sia potenziale occorre e basta che il suo scarto sia eguale ad 1.

(1) G. Scorza, loc. cit., p. 322. Ma mette conto di osservare che al teorema di Frobenius si può anche arrivare mediante le considerazioni qui svolte. Infatti da

$$A = S_1 + A^2 = S_1 + S_1^2 + A^3 = \cdots = S_1 + S_1^2 + \cdots + S^{r-1}$$

segue che quando $n_1 - n_2 = 1$, ossia S_1 è del 1° ordine, A è l'algebra potenziale generata da un qualsiasi elemento non nullo di S_1.

3. Dalla β), facendo $h = r - j - 1$ e badando che $n_r = 0$, si trae

$$(n_j - n_{j+1})(n_{r-j-1} - n_{r-j}) \geqq n_{r-1} \quad (j = 1, 2, \cdots, r-2);$$

quindi, essendo

$$[(n_j - n_{j+1}) + (n_{r-j-1} - n_{r-j})]^2 \geqq 4(n_j - n_{j+1})(n_{r-j-1} - n_{r-j}),$$

si ha

$$(n_j - n_{j+1}) + (n_{r-j-1} - n_{r-j}) \geqq 2\sqrt{n_{r-1}}.$$

Ciò porta, se $r = 2q$,

$$n_1 = \sum_j^{1 \cdots r-1} (n_j - n_{j+1}) = \sum_j^{1 \cdots j-1} [(n_j - n_{j+1}) + (n_{2q-j-1} - n_{2q-j}] + n_{2q-1}$$

$$\geqq 2(q-1)\sqrt{n_{2q-1}} + n_{2q-1} = (r-2)\sqrt{n_{r-1}} + n_{r-1};$$

se $r = 2q + 1$,

$$n_1 = \sum_j^{1 \cdots q-1} [(n_j - n_{j+1}) + (n_{2q-j} - n_{2q-j+1})] + (n_q - n_{q+1}) + n_{2q}$$

$$\geqq 2(q-1)\sqrt{n_{2q}} + \sqrt{n_{2q}} + n_{2q} = (r-2)\sqrt{n_{r-1}} + n_{r-1};$$

e dunque, in ogni caso, è

β′) $$n_1 \geqq (r-2)\sqrt{n_{r-1}} + n_{r-1}.$$

Si ha così *un limite inferiore per l'ordine di un'algebra pseudonulla di indice r quando sia dato l'ordine della sua potenza con l'esponente* $r - 1$.

4. Dimostriamo ora che:

Se Γ *è un qualsiasi corpo numerico ed* r, δ *sono interi positivi con* $r \geqq 2$, *esistono in* Γ

I) *algebre pseudonulle di indice r, scarto* δ *ed ordine*

$$\frac{\delta^r - 1}{\delta - 1} - 1, \quad e$$

II) *algebre pseudonulle commutative di indice r, scarto* δ *ed ordine*

$$\binom{\delta + r - 1}{\delta} - 1;$$

ma tanto le prime, quanto le seconde, sono tutte equivalenti fra di loro.

Si supponga che A sia un'algebra pseudonulla in Γ di indice r, scarto δ ed ordine

$$n_1 = \frac{\delta^r - 1}{\delta - 1} - 1.$$

Allora se n_j è l'ordine di A^j, ed S_1 è un sistema complementare di A^2 in A, indi di ordine $n_1 - n_2 = \delta$, per $j = 1, \cdots, r-1$, l'ordine di S_1^j sarà δ^j, il sistema S_1^j sarà complementare ad A^{j+1} in A^j, e i sistemi $S_1, S_1^2, \cdots, S_1^{r-1}$ saranno complementari in A.

Ora dire, che, per $j = 1, \cdots, r-1$, l'ordine di S_1^j è δ^j, è quanto dire che se

$$u_1, u_2, \cdots, u_\delta$$

sono δ elementi indipendenti di S_1, i δ^j prodotti del tipo

$$u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_j},$$

dove $(i_1, i_2, \cdots, i_j)$ è una qualsiasi disposizione con eventuali ripetizioni della classe j^{ma} degli indici $1, 2, \cdots, \delta$, sono altrettanti elementi indipendenti di S_1^j; dunque, poichè $S_1, S_1^2, \cdots, S_1^{r-1}$ sono complementari in A, possiamo affermare che se l'algebra A esiste si ottiene per essa un aggregato di unità considerando gli elementi $u_1, \cdots u_\delta$ e poi tutti i loro prodotti a due a due, a tre a tre, $\cdots$, ad $r-1$ ad $r-1$. Aggiungasi che, siccome A ha da essere pseudonulla e di indice r, i prodotti di quegli elementi ad s ad s, con $s \geqq r$, dovranno essere tutti nulli.

Ebbene, si considerino le disposizioni con eventuali ripetizioni, delle classi 1^a, 2^a, $\cdots$ di δ oggetti qualsiansi $a_1, a_2, \cdots, a_\delta$; e posto che

$$(a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_l}) \quad (a_{j_1}, a_{j_2}, \cdots, a_{j_m})$$

siano state comunque scelte fra di esse, si convenga di dire che il loro *prodotto* è nullo, se $l + m \geqq r - 1$, è la disposizione

$$(a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_l}, a_{j_1}, a_{j_2}, \cdots, a_{j_m}),$$

se $l + m \leqq r - 1$.

La nozione di *prodotto* così definita gode evidentemente della proprietà associativa; inoltre può dirsi che, in base ad essa, le disposizioni delle classi $2^a, 3^a, \cdots, (r-1)^{ma}$ sono i prodotti a due a due, a tre a tre, $\cdots$, ad $r-1$ ad $r-1$ delle disposizioni della 1^a classe

$$(a_1), (a_2), \cdots, (a_\delta);$$

mentre i prodotti di quest'ultime ad s ad s, con $s \geqq r$, sono tutti nulli. Ma allora, per un teorema noto [1], qualunque sia il corpo Γ, esiste certo in esso un'algebra A' di ordine

$$\frac{\delta^r - 1}{\delta - 1} - 1$$

(1) G. Scorza, loc. cit., p. 304.

una cui tavola di moltiplicazione presenti la medesima struttura di quella delle disposizioni delle classi $1^a, 2^a, \cdots, (r-1)^{ma}$ or ora considerate; di guisa che fra le unità di A′, cui tale tavola si riferisce, ve ne saranno δ, e siano $u'_1, u'_2, \cdots, u'_\delta$, tali che tutte le altre siano date dai loro prodotti a due a due, a tre a tre, $\cdots$, ad $r-1$ ad $r-1$.

Ponendo a raffronto quanto ora è stato detto con quel che più sopra si è osservato a proposito dell'algebra A, di cui era stata supposta l'esistenza, si conclude e che tale supposizione era legittima e che esiste una (ed una sola) corrispondenza di isomorfismo fra le algebre A ed A′, nella quale agli elementi $u_1, u_2, \cdots, u_\delta$ di A corrispondano, in un ordine prefissato a piacere, gli elementi $u'_1, u'_2, \cdots, u'_\delta$ di A′.

Con ciò la parte I) del teorema è pienamente dimostrata; e dopo ciò è pur chiaro come si debba procedere per dimostrar la parte II). Basterà considerare, anzi che le disposizioni, le combinazioni di δ oggetti, con eventuali ripetizioni.

Meccanica. — *Stabilità statica e stabilità cinetica nei motovelivoli*[1]. Nota del Corrisp. G. A. Crocco.

Abbiamo già messo in luce[2] che la variazione di momento baricentrico che l'azione dell'elica introduce nell'equilibrio alla rotazione dei velivoli può esprimersi mediante un *trinomio di correzione* di esso momento il cui coefficiente adimensionale può porsi sotto la forma

$$\Delta C_m = C_\tau (\mathfrak{k}_1 + \mathfrak{k}_2 C_{mc} - \mathfrak{k}_3 C_p). \tag{1}$$

In questa espressione il simbolo ΔC_m indica la variazione per effetto dell'elica del coefficiente C_m del momento baricentrico

$$M = C_m \cdot \rho S V^2 l \tag{2}$$

con ρ densità dell'aria, S superficie delle ali, V velocità di avanzamento, l corda media delle ali. Inoltre C_{mc} indica il coefficiente della parte di momento dovuta all'azione della *portanza p* della coda, applicata a una distanza a dal baricentro, per cui si pone

$$a \cdot p = C_{mc} \rho S V^2 l; \tag{3}$$

mentre C_p è il coefficiente di *portanza totale* del velivolo, dato da

$$P = C_p \cdot \rho S V^2; \tag{4}$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 15 luglio 1934.
(2) Crocco, *Elementi di Aviazione*. Ed. 1931, § 204.

e C_τ è il coefficiente esprimente la trazione dell'elica sotto la forma, analoga,

$$T = C_\tau \cdot \rho S V^2. \tag{5}$$

Infine il coefficiente f_1 della (1) contiene l'*eccentricità*, e, della trazione rispetto al baricentro ed i coefficienti f_2, f_3 sono da intendersi desunti, caso per caso, sperimentalmente, misurando l'*influsso* dell'elica sulla portanza della coda.

In altri termini la (1) proviene dalla

$$\Delta M = e T + a \Delta p \tag{6}$$

dove la variazione, Δp, della portanza di coda si è posta sotto la forma

$$\Delta p = C_\tau \left(f_2 p - \frac{l}{a} f_3 P \right). \tag{7}$$

La (7) è stata dedotta da una particolare esperienza del B. A. R. C. [1] che fornisce per f_2 e f_3 coefficienti *costanti*, o quasi; mentre qualche ulteriore esperienza darebbe coefficienti variabili con C_p, cioè colla incidenza. Inoltre poco si è sperimentato in proposito per eliche *sopra* l'ala o *sotto* l'ala; e per eliche *dietro* l'ala.

Infine il piano di coda è stato supposto tutto immerso nella scia dell'elica.

La espressione (7) è quindi da intendersi nella complessità del problema in questione, come *posizione discriminatrice* degli elementi *principali*, aerodinamici, (C_τ, p, P) dagli elementi *secondari*, geometrici ed aerodinamici, dei quali viene tenuto conto implicitamente nei coefficienti f_2 e f_3.

Così intesa la (7) appare altresì come posizione direttrice delle esperienze, nel senso che per ogni impostazione geometrica dell'elica rispetto all'ala ed alla coda (e basterà scegliere le più caratteristiche nella tecnica aviatoria) la (7) consente di tracciare il quadro dei coefficienti f_2 e f_3 in funzione di C_τ, p, P, determinabili contemporaneamente: e di fornire così alla tecnica elementi di agevole utilizzazione.

Nè l'aerodinamica sperimentale potrebbe spingersi più oltre nel classificare i risultati, giacchè la interdipendenza delle tre variabili C_τ, p, P è di natura essenzialmente costruttiva e di impiego.

Nel fatto p (o il suo equivalente C_{mc}) è connesso con P (o col suo equivalente C_p) dalle condizioni di *centramento* del velivolo: e la C_τ in moto rettilineo uniforme è esprimibile mediante la

$$C_\tau = C_r + C_p \operatorname{tang} \beta_0; \tag{8}$$

ore β_0 è l'angolo di salita della traiettoria e C_r il coefficiente di resistenza deducibile dalla polare del velivolo.

(1) British Aeron. Res. Committee. (Report n. 882 e 883).

Cosicchè soltanto la tecnica, ed in sede di utilizzazione costruttiva, può stabilire i rapporti tra le tre variabili, ed esprimerle in funzione di una soltanto di esse, cioè la C_p, che designa i varî *regimi* di volo.

In questa ultima elaborazione dei risultati aerodinamici si otterrà pertanto, in definitiva

$$\Delta C_m = - C_\tau \cdot \Lambda; \tag{9}$$

con Λ funzione di C_p, deducibile dalla (1).

Se l'aerodinamica avrà riscontrato che f_2, f_3, sono costanti o possono in alcuni casi mediamente ritenersi costanti, la funzione Λ potrà ritenersi *lineare* in C_p, a meno di quantità trascurabili. Se viceversa f_2 e f_3 non potranno assumersi costanti, essi potranno esprimersi in funzione di C_p e la funzione Λ risulterà di grado superiore al primo.

Segue da quanto sopra che Λ può sempre rendersi *nulla* [1], disponendo della impostazione geometrica dell'elica rispetto al velivolo, per un particolare valore di C_p, scelto in modo più conveniente.

Ma per gli altri valori di C_p la Λ, anche se ridotta, conserverà valori diversi da zero; e così anche la sua derivata in C_p. Essa conserverà pertanto una influenza, che passiamo ad esaminare, sulla *stabilità del motovelivolo,* ossia del velivolo con elica in moto.

Questa influenza sarà di doppio ordine. Verrà cioè modificato il fattore di *stabilità statica* per effetto delle variazioni di ΔM coll'incidenza, cioè con C_p: e sorgerà un fattore di *stabilità cinetica,* generalmente nullo nel *velivolo,* per effetto delle variazioni di ΔM con la velocità.

La modificazione nel fattore di stabilità statica è dunque data da

$$\frac{\partial \Delta M}{\partial \alpha} = k_p \cdot l \cdot \rho S V^2 \frac{\partial \Delta C_m}{\partial C_p} \tag{10}$$

ed il fattore di stabilità cinetica risulta:

$$\frac{\partial \Delta M}{\partial V} = l \rho S V^2 \left(\frac{\partial \Delta C_m}{\partial V} + \frac{2 \Delta C_m}{V} \right). \tag{11}$$

In queste espressioni occorrerà tener presente che la eguaglianza (8) si riferisce ai valori di regime. In altri termini C_τ si può ritenere funzione di C_p in quanto il pilota del velivolo adatta per ogni regime la spinta dell'elica alle condizioni richieste. Ma finchè l'ammissione dei gas al motore rimane invariata la C_τ diviene indipendente da α cioè da C_p, rimanendo

(1) Crocco, *Elementi di Aviazione,* 1933, n. 210.

dipendente soltanto dalle variazioni di velocità. La sua derivata in C_p è quindi nulla e si avrà semplicemente

$$\frac{\partial \Delta C_m}{\partial C_p} = - C_\tau \cdot \frac{\partial \Lambda}{\partial C_p} \tag{13}$$

che si potrà sostituire nella (10), noto Λ in funzione di C_p.

Ricordando ora che la stabilità statica del velivolo è stata espressa [1] mediante la

$$\frac{\partial M}{\partial \alpha} = k_p \cdot \rho S V^2 \cdot \bar{x}_g ; \tag{13}$$

ne risulterà il nuovo *fattore di stabilità statica*:

$$\mathfrak{s} = k_p \rho S V^2 \left(\bar{x}_g - l C_\tau \frac{\partial \Lambda}{\partial C_p} \right). \tag{14}$$

Come si vede la distanza fittizia $\bar{x}_g$ risulta modificata dall'azione dell'elica (eccentricità ed influsso sulla coda) come è indicato in parentisi.

Circa il valore di tale modifica non è possibile una indicazione generale, giacchè Λ è a disposizione del costruttore. Si può solo accennare che, se f_1, f_2, f_3 sono costanti, Λ risulta funzione lineare di C_p e la modifica diviene semplicemente proporzionale a C_τ, cioè alla (8), in senso positivo o negativo. È quindi possibile determinarne un minimo ed un massimo in corrispondenza di due condizioni estreme di volo e servirsene per definire una escursione del fuoco del motovelivolo e quindi una limitazione della posizione del baricentro, analogamente a quanto è stato fatto per la stabilità statica del velivolo [2]. Ci riserviamo di svolgere questo concetto in una successiva Nota.

Passando adesso alla formulazione del *fattore di stabilità cinetica* osserviamo anzitutto che la funzione Λ può ritenersi indipendente da V se i coefficienti f_2, f_3 sono sensibilmente invariabili in C_τ, mentre se così non è essa conterrà C_τ e quindi subirà una lieve variazione in V.

Limitandoci al primo caso, per semplicità espositiva, e adottando un metodo già altrove esposto [3] nell'ipotesi di coppia motrice, C, costante e di numero di giri, n, invariabile per inerzia dell'elica, nel moto perturbato del velivolo, osserveremo che dalla

$$C_\tau \rho S V^3 = \eta \cdot 2 \pi n C$$

(1) Crocco, *Sul concetto di fuoco nella stabilità dei velivoli.* Questi «Rendiconti», vol. XX.

(2) Questi «Rendiconti», Nota citata.

(3) Crocco, *Criteri di analisi del volo strumentale.* Vol. VI, p. 693, «Memorie R. Acc. d'Italia».

si ricava:

$$\frac{\partial C_\tau}{\partial V} = (e - 3)\frac{C_\tau}{V} \tag{15}$$

dove

$$e = \frac{\partial \eta}{\partial V}\frac{V}{\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial \gamma}\frac{\gamma}{\eta} \tag{16}$$

è una funzione adimensionale di $\gamma = V/nD$, cioè dello stato di funzionamento dell'elica.

Questa utile funzione ha un andamento generale poco dissimile da un'elica all'altra; e risulta eguale all'*unità* per funzionamento a punto fisso mentre si *annulla* in corrispondenza del suo massimo rendimento.

Introducendo la (15) nella (11) si ottiene agevolmente, per Λ indipendente da V e tenendo presente la (9):

$$\frac{\partial \Delta M}{\partial V} = l\rho SV(1 - e) \cdot C_\tau \cdot \Lambda = t \tag{17}$$

che rappresenta il fattore di stabilità cinetica da introdurre nello studio della *stabilità dinamica*.

Entrambi i fattori $\mathfrak{s}$ e t risultano così calcolabili, noto Λ.

Ci riserviamo in una prossima Nota di associarli in un unico fattore di stabilità *statico-cinetica*.

Geologia. — *Epirogenesi postpliocenica delle Alpi marittime e della Riviera ligure.* Nota[1] del Corrisp. G. Rovereto.

Si sono osservati lungo le coste liguri due fatti, che, se ben precisati nelle loro particolarità, e rispetto all'epoca in cui sono avvenuti, potrebbero contribuire a risolvere il problema del cosidetto *ringiovanimento* della Catena alpina[2].

Il più notevole è questo: i lembi dei terreni pliocenici della Riviera di Ponente raggiungono una maggiore altezza man mano che si succedono da Genova verso occidente, per modo che la loro altitudine massima si ha a M. Bellenda, in quel di Grimaldi, quasi sull'asse delle Alpi marittime, a m. 542, mentre che in Genova si trovano sino a m. 95; da ciò la conseguenza, che un rigonfiamento epirogenetico alpino avrebbe, in tempi postpliocenici, lentamente digradato fino a Genova, e poco oltre.

(1) Pervenuta all'Accademia l'11 settembre 1934.

(2) Un buon riassunto della questione si ha nello scritto di D. Gribaudi, *Movimenti epirogenetici quaternari e ringiovanimento alpino secondo recenti studi*, «Riv. Geogr. Ital.», vol. XXXVI, p. 46 e 125, del 1929, nel quale però non vi è accenno ai dati qui discussi.

L'altro fatto è il seguente: gli strati degli stessi lembi pliocenici sono inclinati da 10° a 20° verso la depressione tirrenica, ciò che indicherebbe un altro movimento epirogenetico, interessante Alpi liguri e Appennino ligure.

Se queste osservazioni, che nelle loro linee generali, non nelle deduzioni, rimontano a Pareto e a Issel, si cerca di precisarle nei loro particolari – oggi che il rilievo geologico della Riviera è compiuto – si viene a conclusioni alquanto differenti, benchè sempre si raggiungano gli scopi ai quali ho accennato.

L'epirogenesi riconosciuta dalle condizioni altimetriche del pliocene. – Verso levante, il primo lembo di pliocene si osserva nel solco Sturla–San Martino d'Albaro, e raggiunge la quota massima di m. 77; in Genova, all'Osservatorio di Marina, si vedeva sino a m. 95; a Borzoli si trova a m. 106; a Sestri Ponente a m. 87; a Voltri a m. 110; ad Arenzano a m. 90; ma, ad un tratto, sopra Cogoleto, nella borgata di Sciarborasca, ho scoperto che raggiunge m. 210; la località è addentro nell'Appennino, in posizione riparata, e quindi rappresenta la conservazione di un livello, che, nelle località precedenti e situate sulla costa aperta, è stato abbassato dall'erosione.

Una quota superiore ai m. 200 non si ripete che a Castellaro di Taggia: in framezzo, ad Albissola siamo a m. 50; a Legino a m. 50; a Quiliano a m. 180 (quota in addentro), a Santa Maria del Monte di Zinola a (quota più esterna) a m. 162; a Monte Loano a m. 115; a Rio Torsero (Albenga) a m. 100; a Diano Castello a m. 140; a Costarossa di Oneglia a m. 125; a Massabò di Portomaurizio a m. 120; a Costa di Terra Bianca (San Lorenzo al Mare), a m. 153.

Quindi il supposto graduale sollevamento sin qui manca affatto.

A Castellaro di Taggia si raggiungono i m. 275; al di là della valle, a M. dei Beusi sopra Taggia, si salta ad un tratto a m. 487; e quote così alte (a Santa Croce di Vallecrosia a m. 365, M. delle Fontane di Ventimiglia, m. 475; M. Maglioca (ibid.) m. 515, e infine il già ricordato M. Bellenda, m. 542)[1] si continuano sino al confine francese.

Sicchè, un accentuato e maggiore innalzamento nell'altitudine raggiunta dal pliocene comincia sulla destra della Valle di Taggia, a soli km. 27 in linea d'aria dall'asse dell'ellissoide delle Alpi marittime, e non a km. 135 se fosse giusta l'osservazione antica.

Conformemente a quello che ora si è detto, distinguendo in una prima sezione la Riviera, dal confine con la Francia a Taggia, il pliocene raggiunge in media l'altezza di m. 475, con la quota massima di 542; in una seconda sezione, da San Lorenzo a Mare a Genova, si hanno in media (tralasciando

(1) Il giacimento di M. Bellenda può essere un residuo deltizio della Roja; anche il delta pliocenico del Varo raggiunge la stessa altezza.

le quote minori di m. 100, perchè troppo alterate dall'erosione) un'altezza di m. 135, con la quota massima di m. 210: quindi, la costa della prima sezione si è innalzata di *m. 340* in più di quella della seconda.

Ciò può essere attribuito, come io ho fatto, ad un maggiore rigonfiamento epirogenetico, in corrispondenza dell'ellissoide delle Alpi marittime, esteso ad una zona periferica, che sembrerebbe già dipendente dalle Alpi liguri: se si credesse dovuto a movimenti verticali, si entrerebbe nel campo della isostasia.

Se si consulta la Carta geologica (foglio « San Remo », diligente lavoro del compianto S. Franchi) si riconosce, che dopo la zona a pieghe in direzione N–S, da alcuni considerata essenzialmente *alpina*, e che venendo verso levante cessa con la valle della Roja, succede altra zona, con pieghe dirette all'incirca da O a E, da qualche geologo francese dette *pirenaiche*, ma che per me sono, per direzione ed età, essenzialmente *alpino-liguri*.

Ora, in una circonferenza da un raggio della lunghezza dei km. 27 sopra distinti si contiene tutta la parte più alta, sino a Ponte di Nava, delle Alpi liguri; per modo che si direbbe, che nelle altezze delle cime di queste Alpi, e quindi anche di quelle delle Marittime, si ha l'aggiunta di quei m. 340 dovuti all'epirogenesi postpliocenica; mentre, al contrario, nella periferia del rilievo comincia l'abbassamento, continuato per tutto il quaternario, dei livelli di sbocco per i movimenti eustatici: da ciò il ringiovanimento delle forme delle Alpi, soprattutto delle occidentali sino allo Spluga.

Rimane da stabilirsi in maniera più precisa, quando il movimento epirogenetico è avvenuto.

Ho fatto questo partendo da uno studio del terrazzamento costiero, dovuto appunto all'eustatisia.

Avendo cercato di dare al terrazzamento ligure delle assegnazioni cronologiche, che non fossero convenzionalmente e unicamente basate sullo schema altimetrico ordinario, ho trovato questo caposaldo: partendo dall'altitudine del livello del lago villafranchiano di Val di Magra, e supponendo una pendenza dell'antico scaricatore del lago eguale a quella dell'attuale letto della Magra (cifra massima), il livello di base villafranchiano, e quindi del terrazzamento costiero che le corrisponde, si trovava all'altitudine di m. 450. Da ciò la conclusione, che il principio del terrazzamento della costa ligure corrisponde in altezza a quello consueto delle coste mediterranee.

Trasportandoci nell'area della sezione costiera, dove si è riconosciuta l'accentuazione del movimento epirogenetico, troviamo che la continuazione del terrazzamento, qui accompagnata da ricchi giacimenti fossiliferi, è pure consueta.

Il terrazzo fossillifero più alto e più antico, quello di Cabrè–Roccabruna, che ritengo del calabrense superiore (non dell'astiano come è stato detto), si trova all'altitudine di m. 350, che è la solita; e così si trovano alla consueta altezza, fra i 200, e i 60 metri, parecchi terrazzi del siciliense,

attorno alla penisola di Sant'Ospizio e dei Bausi Rossi, e più in basso quelli del tirrenense. Questi ultimi, che come è noto sono caratterizzati dallo *Strombus Deluci* Risso (*Str. bubonius* Lamk.), offrono però una particolarità, se non un'eccezione, ossia si ripetono, all'estremo della Riviera, da m. 25 sino ad un livello inferiore del solito, ossia sino a m. 6, ciò che potrebbe indicare un affondamento locale, ma questo consistendo, caso mai, in pochi metri, qui non interessa.

Invece interessa la conclusione alla quale ovviamente si perviene: *essendo il terrazzamento quaternario della costa ligure nelle condizioni ordinarie, il movimento epirogenetico è avvenuto nei tempi immediatamente posteriori all'astiano, ossia nel villafranchiano.*

E non stupisce che questa epirogenesi sia stata contemporanea a quella orogenesi attenuata che con ripieghe ha originato i laghi villafranchiani dell'Appennino settentrionale.

L'epirogenesi dedotta dalla inclinazione degli strati. – È stato detto più volte, che gli strati delle marne e degli altri sedimenti costituenti il pliocene ligure, sono inclinati di 10°, verso la depressione tirrenica. Se si attraversa l'Appennino, la stessa inclinazione di 10° si osserva alla periferia dell'altra parte del rilievo montuoso, ma immersa verso la depressione padana.

Ciò indica un'amplissima curva di sollevamento epirogenetico, post-pliocenico, che fra Genova e Tortona, ad es., ha circa km. 57 di corda in linea d'aria, ed è la perfetta ripetizione dell'ampia incurvatura verificatasi alla fine dell'oligocene, mentre non è ben riconoscibile una generale incurvatura miocenica. È a queste incurvature, tramutate in tratti in piegamenti da orogenesi attenuata che è dovuta, come già ho più volte asserito, la conformazione attuale dell'Appennino ligure, sin dove, passato il Passo della Cisa, tutto ciò è sostituito da un coordinamento fra il rilievo e le pieghe eoceniche.

Ma ritengo nuova l'osservazione seguente: nei giacimenti pliocenici che stanno nella zona influenzata dall'epirogenesi alpina, come è detto più sopra, ossia in quelli a ponente della Valle di Taggia, le inclinazioni degli strati sono maggiori, sino a 20°, e ciò, mentre ha contribuito, com'è evidente, al maggior innalzamento di tali lembi, ed esclude un innalzamento isostatico, ritorna pure ad indicare un rigonfiamento epirogenetico alpino, maggiore di quello dei monti liguri propriamente detti (Alpi liguri e Appennino ligure).

Se indipendentemente da quello che ho affermato sopra, vogliamo stabilire quando queste inclinazioni si sono determinate, ritorniamo di nuovo all'ipotesi, che ciò deve essere coordinato con i movimenti di epirogenesi e di orogenesi attenuata del villafranchiano; poichè, dove le alluvioni quaternarie coprono il pliocene, intercede fra i due una netta trasgressione, e il quaternario è sempre orizzontale: ciò non è sempre vero per le Alpi.

Alcune influenze morfologiche. – Si è avuto, per l'associazione dell'epirogenesi all'eustatisia, un periodo di parossismo erosivo, dal villafranchiano alla fine del quaternario superiore: i m. 450 di emersione eustatica, uniti ai m. 340 di epirogenesi villafranchiana, dànno una cifra che si avvicina a quella data per il sollevamento epirogenetico delle Alpi (sino a 1200 e a 1500 metri); ma dagli effetti della epirogenesi alpina non si sono distinti quelli eustatici, e se si vuole anche gli isostatici. Io ho accennato ai due primi, e ho cercato di distinguerli sin dal 1921, studiando le coste della Patagonia (*Boll. Soc. Geol. Ital.*, vol. XI). Il principale contributo alla questione della isostasia, in relazione alla eustatisia, fu portato nello stesso anno da Nansen (*The Strandflat and Isostasy*, Christiania Vidensk–Selsk. Sks., 1921, n. 2).

Ultimamente questa questione, riferendosi in particolar modo alla Penisola Scandinava, è stata riassunta, accettando le vedute di Nansen, dal Tanner (*Bull. Comiss. Géol. Finlande*, n. 88, 1930).

Tanto nell'Appennino, quanto in alcune parti delle Alpi, con i resti più antichi del terrazzamento, pertinenti per l'altitudine al villafranchiano, lungo i corsi d'acqua, e i cui residui esistono, in particolar modo, alle origini delle valli, si ricostruiscono profili più inclinati di quelli tratti dai terrazzi del quaternario e dell'attuale: questo è stato per la prima volta visto da me in Valle Spluga [1]; nei Monti liguri se ne hanno esempi, più o meno chiari, nelle alte valli della Roja, dell'Argentina ed altre.

Gli spianamenti della superficie fondamentale sono ridotti a *piani inclinati*, che terminano uniformemente le costole montuose trasversali: questi piani, dovuti all'epirogenesi, vengono sostituiti, lungo la costa, da terrazzi dovuti all'eustatisia: dalla sommità del Monte Bellenda, sopraricordato, guardando verso l'Italia, si vede in modo evidente questa inclinazione uniformata dei dorsi delle costole montuose, fra le quali alcune si protendono coordinate con il tratto di emersione quaternaria, a formare i più notevoli capi e sporgimenti costieri, ad es.: il Capo di Sant'Ampeglio, Capo Nero, Capo Verde, Capo Berta, Capo Cervo (non è così di Capo Mele e di Capo Noli, già ben fuori dell'area della massima epirogenesi).

La natura della roccia ha permesso, solo in corrispondenza della Roja, la conservazione della forra conseguente da tanto squilibrio, fra l'innalzamento della montagna e l'abbassamento del livello di base.

(1) Rovereto G., *Studi di Geomorfologia*, tav. III, 1908. Il fatto ha poi avuto tutta una bibliografia, che è riportata in parte dal Gribaudi (loc. cit.): l'ultimo scritto su questo argomento è di L. Lafrenz, *Das Ahrtal und seine Terrassen*, « Veröffentl. d. Geogr. Instit. der Univers. », Bonn, 2° vol., 2° fasc., 1933. Parecchio di quello che è qui detto, riforma alcune osservazioni riportate nel mio *Trattato* (p. 343 e seg.). Bisogna aggiungere che altri sostengono il contrario: che le Alpi nel quaternario si sono abbassate, o si sono *anche* abbassate: tra questi il più autorevole è l'Heim (*Geologie der Schweiz*, vol. I, p. 192).

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra l'ultraconvergenza delle serie di Dirichlet.* Nota [1] di S. Rios, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. È saputo che certe serie di Taylor possiedono la proprietà di avere somme parziali che convergono in dominî che si estendono più oltre del circolo di convergenza. Questo fenomeno è stato studiato da Ostrowski che ha risolto completamente il problema della caratterizzazione delle serie che possegono detta proprietà di ultraconvergenza.

V. Bernstein ha studiato lo stesso fenomeno nelle serie di Dirichlet, avendo ottenuto risultati di straordinario interesse; ma senza conseguire la soluzione totale del problema della caratterizzazione di dette serie che offerisca molte difficoltà, giacchè per le serie $= \varphi$ di Dirichlet, la cui successione di esponenti ha densità massima finita, apparisce un nuovo tipo di ultraconvergenza (stretta) che non si presenta nelle serie di Taylor. Ha, dunque, speciale interesse il problema della determinazione di quelle categorie o classi di serie di Dirichlet, nelle quali, si riscontri soltanto una ultraconvergenza lacunare [2], cioè, per cui valga il teorema seguente:

I. *Ogni serie di Dirichlet che appartenga alla categoria* (α) *e sia ultraconvergente nell'intorno di un punto regolare della sua retta di convergenza può essere rappresentata come la somma di due serie di Dirichlet della stessa classe* (α), *di cui l'una possiede lacune di longitudine relativa inferiormente limitata e l'altra possiede una ascissa di convergenza inferiore alla data.*

Utilizzando un risultato di V. Bernstein [3] si dimostra che *una classe* (α) *è quella in cui gli esponenti* λ_i *verificano la condizione di costituire una successione parziale di una successione* μ_n, *tale che a partire da un valore di* n, *sono verificate le disuguaglianze*:

$$|\gamma + n - \theta \mu_n| < e^{-n\beta_n}$$

cosicchè $\beta_n \to +\infty$, *e* γ *e* θ *sono numeri reali positivi qualunque.*

(1) Pervenuta all'Accademia il 10 settembre 1934.

(2) Ostrowski, *Ueber Potenzreihen die Ueberkonvergente.* (« Sitz. der Preuss. Akad. der Wiss. », 1923, p. 185). In una nota a piede di pagina egli dice di avere ottenuto alcune serie di Dirichlet, per cui è valido il teorema dimostrato per le serie di potenze; ma in nessuna delle sue memorie posteriori, indica la classe di serie di Dirichlet, cui egli allude e neppure la dimostrazione utilizzata. D'altronde V. Bernestein dice a p. 45 del suo recente libro: *Progrès récents de la théorie des sèries de Dirichlet* (Paris, 1933): « mais il se peut que cette réciproque soit vraie pour certaines classes des séries de Dirichlet. C'est un probleme qui mériterait un étude approfondie ».

(3) *Sopra alcuni teoremi relativi ai punti singolari...* «Rend. R. Acc. Lincei», to. 15, 1932

Lo stesso metodo utilizzato nella dimostrazione del teorema I conduce in modo semplice a provare per questa classe (α) molte altre proprietà analoghe a quelle concernenti le singolarità delle serie di Taylor.

2. Il seguente teorema relativo agli integrali di Laplace-Stialtjes generalizza un noto risultato di Ostrowski [1].

II. *Abbiasi una integrale di Laplace-Stieljes:*

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-\lambda s}\, d\alpha(\lambda)$$

tale che

$$d\alpha(\lambda) = 0$$

in

$$\lambda_{2i-1} \leq \lambda < \lambda_{2i} \quad ; \quad \frac{\lambda_{2i}}{\lambda_{2i-1}} \to \infty .$$

La successione:

$$f_i(s) = \int_0^{\lambda_{2i+1}} e^{-\lambda s}\, d\alpha(\lambda)$$

converge uniformemente in ogni dominio limitato, tutto interno al dominio di esistenza della funzione, il quale sia semplicemente connesso.

Questo teorema dà luogo al problema di vedere fino a che punto è possibile dare un dominio semplicemente connesso nel piano s, per modo che si possa determinare una funzione $\alpha(\lambda)$ a variazione limitata in tutto l'intervallo $(0, \lambda), (\lambda < +\infty)$ in maniera che l'integrale $f(s) = \int_0^\infty e^{-\lambda s}\, d\alpha(\lambda)$ possieda una successione parziale che converga uniformemente in ogni campo finito completamente interno a detto dominio, il quale deve essere il campo totale di esistenza di $f(s)$.

È interessante osservare che, rispetto alla soluzione di questo problema, non è necessario di limitarsi a integrali propri, nè a serie generali di Dirichlet.

Orbene, si dimostra che, *ad ogni funzione rappresentata da un integrale proprio*

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-\lambda s}\, d\alpha(\lambda)$$

si può fare corrispondere una serie di Dirichlet:

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

(1) « Hamb. Math. Abhand. », 1922, p. 327.

tale che la differenza $f(s) - \varphi(s) = g(s)$ *sia una funzione intera di* s.

È sufficiente, dunque, vedere se il problema è solubile mediante serie di Dirichlet, quello che si confermi col seguente teorema che risolva il problema proposto.

III. *Dato nel piano* s [1] *un dominio semplicemente connesso, con due punti frontiera almeno, e che contenga il punto* $+\infty$ *ma non il* $-\infty$ *di tutte le striscie* $2k\pi < \mathrm{I}(s) \leq 2(k+1)\pi$ *esiste una serie di Dirichlet ad esponenti razionali:*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{\alpha_n}{\beta_n} s} \quad , \quad (\beta_n \to +\infty)$$

tale che una successione parziale

$$\sum_{1}^{n_i} a_n e^{-\frac{\alpha_n}{\beta_n} s}$$

converge uniformemente in tutto il dominio limitato, tutto interno al dato, essendo detto dominio il campo totale di esistenza della funzione rappresentata dalla serie.

Tenendo conto di un risultato di V. Bernestein [2] e del teorema precedente, si dimostra il seguente:

IV. *Dato nel piano* s *un dominio semplicemente connesso con due punti frontiera almeno e che contenga il punto* $+\infty$, *ma non il* $-\infty$ *di tutte le striscie* $2k\pi < \mathrm{J}(s) \leq 2(k+1)\pi$, *e dato un insieme di numeri reali:* $\{\lambda\}$ *denso nell'intervallo* $(k+\infty)$, *esiste una serie di Dirichlet:*

$$\sum a_n e^{-\lambda_n s}$$

i cui λ_n *appartengono all'insieme* $\{\lambda\}$, *tale che una sua successione parziale converge uniformemente in tutto il dominio finito completamente interno al dato.*

I teoremi precenti suggeriscono un metodo per costruire esempi di serie di Dirichlet con successioni ultraconvergenti:

V. *Sia*

$$\mathrm{P}(s) = a_1 e^{-\lambda_1 s} + a_2 e^{-\lambda_2 s} + \cdots + a_k e^{-\lambda_k s},$$

dove

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$$

sono numeri reali tali che

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k ; \quad (k \geq 2),$$

(1) Va osservato che il piano s è il trasformato mediante $e^{-s} = z$ della superficie di Riemann di $\log z$.

(2) «Rend. R. Acc. dei Lincei», to. 15, 1932.

e sia

$$f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i z^{n_i}$$

una serie di potenze di raggio

$$\rho\,,\ (0 < \rho < +\infty)$$

e tale che

$$\frac{n_i}{n_{i-1}} > \frac{\lambda_k}{\lambda_1}\,;$$

la serie di Dirichlet che si ottiene sviluppando le potenze indicate nella serie:

$$f(\mathrm{P}(s)) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i (\mathrm{P}(s))^{n_i}$$

possiede una successioue ultraconvergente che è precisamente:

$$\mathrm{F}_i(s) = \sum_{1}^{n_i} b_i [\mathrm{P}(s)]^{n_i}\,.$$

Matematica. — *Sur un cas spécial des fonctions métasphériques.* Nota [1] di Gh. Th. Gheorghiu, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

I. Dans une récente Note [2], nous avons donné une extension pour plusieurs variables des fonctions métasphériques. Proposons-nous de donner maintenant une forme de ces fonctions dans le cas où les indices sont des demi-nombres impaires. Ces fonctions peuvent être considérées comme une généralisation des fonctions annulaires [3] pour plusieurs variables.

Dans ce qui suit nous supposons le paramètre λ différant d'un demi-nombre entier [4]. Il y a trois cas à considérer, d'après les signes des indices.

Si tous les indices sont positifs, on trouve, à l'aide de l'expression sous forme d'intégrale:

$$(1)\quad \mathrm{A}_{n_1+\frac{1}{2},n_2+\frac{1}{2},\cdots,n_p+\frac{1}{2}}(x_1, x_2, \cdots, x_p; \lambda) = \frac{2^{p(\lambda-\frac{1}{2})}\,\Gamma\left(-\lambda-\frac{p}{2}\right)}{n_1!\,n_2!\cdots n_p!\,\Gamma(-\lambda)\,\pi^{p/2}}\cdot$$

$$\cdot\,\frac{\mathrm{X}^{(p-1)\mathrm{N}}}{(\mathrm{X}_1\,.\,\mathrm{X}_2\,.\cdots.\,\mathrm{X}_p)^{\mathrm{N}+\frac{1}{2}}}\cdot\sum_{\pm}\mathrm{F}_{n_1,n_2,\cdots,n_p}(\mathrm{X}, \pm\mathrm{X}_1, \pm\mathrm{X}_2, \cdots, \pm\mathrm{X}_p; \lambda)$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 18 settembre 1934.

(2) « Comptes Rendus de l'Académie des Sciences », to. 199, p. 476.

(3) « Encyclopédie des Sciences mathématiques », édition française, to. 2, vol. 5, p. 191.

(4) Dans ce qui concerne les notations voir la note citée.

$\sum_{\pm}$ désignant la somme qu'on reçoit en prenant les signes + et — de tous les manières possibles, et:

$$(2)\qquad F_{n_1,\dots,n_p}(X, X_1, \cdots X_p; \lambda) =$$

$$= \sum_{m_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{m_p=0}^{n_p} (-1)^P \frac{(n_1+m_1)! \cdots (n_p+m_p)!\, n_1(n_1-1)\cdots(n_1-m_1+1)\cdots}{\cdots n_p(n_p-1)\cdots(n_p-m_p+1)} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{m_1! \cdots m_p! \left(\lambda+\frac{p}{2}+1\right)\left(\lambda+\frac{p}{2}+2\right)\cdots\left(\lambda+\frac{p}{2}+M\right)}$$

$$\cdot \frac{(X+X_1+\cdots+X_p)^{\lambda+M+\frac{p}{2}}}{(2X_1)^{m_1}\cdots(2X_p)^{m_p}}$$

où: $P = \sum_{k=1}^{p} m_k + \sum_1 n + k$, la deuxième somme se rapporte à tous les nombres n qui ont les indices correspondants aux indices des nombres X_j pris avec le signe + dans (1), et k le nombre de ces nombres.

Si tous les indices sont négatifs, on procède par induction. Pour une seule variable on utilise la relation de récurrence qui existe entre trois fonctions consécutives [1]. D'une variable, on passe à plusieurs variables à l'aide de la formule:

$$(3)\qquad A_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_p}(x_1, x_2, \cdots, x_p; \lambda) =$$

$$= \frac{(2^{p-i} x_{i+1} \cdots x_p)^\lambda}{\Gamma(-\lambda)} \sum_{m_{i+1}=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_p=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-\lambda+\nu_{i+1}+\cdots+\nu_p+2m_{i+1}+\cdots+2m_p)}{m_{i+1}! \cdots m_p! \,\Gamma(\nu_{i+1}+m_{i+1}+1)\cdots\Gamma(\nu_p+m_p+1)} \cdot$$

$$\cdot \frac{(2^i x_1 . x_2 . \cdots . x_i)^{\nu_{i+1}+\cdots+\nu_p+2m_{i+1}+\cdots+2m_p}}{(2x_{i+1})^{\nu_{i+1}+2m_{i+1}}\cdots(2x_p)^{\nu_p+2m_p}} \cdot$$

$$\cdot A_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_i}(x_1 . x_2 . \cdots . x_i; \lambda - \nu_{i+1} - \cdots - \nu_p - 2m_{i+1} - \cdots - 2m_p)$$

et on trouve que les fonctions: $A_{-n_1-\frac{1}{2},-n_2-\frac{1}{2},\dots,-n_p-\frac{1}{2}}(x_1, x_2, \cdots, x_p; \lambda)$ sont données aussi par les formules (1) et (2) avec la seule différence que: $P = \sum_{k=1}^{p} m_k + \sum_1 n$.

Si on a des indices positifs et des indices négatifs [2], on trouve avec (3) que les formules (1) et (2) subsistent encore, où: $P = \sum_{k=1}^{p} m_k + \sum_1 n + k'$ k' étant le nombre des nombres X_j pris avec le signe + et dont les indices correspondent aux indices positifs de la fonction métasphérique.

(1) N. Nielsen, *Théorie des fonctions métasphériques*, p. 55.

(2) Les indices positifs ayant la forme: $\nu_r = n_r + \frac{1}{2}$ et les indices négatifs: $\nu_s = -n_s - \frac{1}{2}$.

II. Supposons maintenant, d'une manière plus générale, que seulement i des indices d'une fonction métasphérique à p variables sont des demi-nombres impairs. Dans ce cas on peut donner, en utilisant les résultats trouvés dans la première partie de cette Note, une formule qui nous exprime ces fonctions, en somme finie de fonctions métasphériques avec $p-i$ variables. Cette formule est:

$$(4)\qquad A_{\pm(n_1+\frac{1}{2}),\cdots,\pm(n_i+\frac{1}{2}),\nu_{i+1}\cdots,\nu_p}(x_1,x_2,\cdots,x_p;\lambda)=$$

$$=2^{\frac{i}{2}(2\lambda-p+i-1)}\frac{\Gamma\left(-\lambda-\frac{i}{2}\right)}{\pi^{\frac{i}{2}}\Gamma(-\lambda)}\cdot\frac{X^{(p-1)\left(\lambda+\frac{i}{2}\right)}}{(X_1.X_2.\cdots.X_i)^{\lambda+\frac{i+1}{2}}}\cdot$$

$$\cdot\sum_{\pm}\frac{F_{n_1,n_2,\cdots,n_i}(X,\pm X_1,\cdots,\pm X_i,X_{i+1},\cdots,X_p;\lambda)}{(X\pm X_1\pm\cdots.\pm X_i)^{(p-i-1)\left(\lambda+\frac{i}{2}\right)}}$$

où:

$$(5)\qquad F_{n_1,n_2,\cdots,n_i}(X,X_1,\cdots,X_p;\lambda)=$$

$$=\sum_{m_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{m_i=0}^{n_i}(-1)^P\frac{(n_1+m_1)!\cdots(n_i+m_i)!\,n_1(n_1-1)\cdots(n_1-m_1+1)\cdots}{\cdots n_i(n_i-1)\cdots(n_i-m_i+1)}\cdot$$

$$\cdot\frac{}{m_1!\cdots m_i!\left(\lambda+\frac{i}{2}+1\right)\left(\lambda+\frac{i}{2}+2\right)\cdots\left(\lambda+\frac{i}{2}+M\right)}\cdot$$

$$\cdot\frac{(X_{i+1}\cdots X_p)^M}{2^{(p-i+1)M}X_1^{m_1}\cdots X_i^{m_i}(X+X_1+\cdots+X_i)^{(p-i-1)M}}\cdot$$

$$\cdot A_{\nu_{i+1},\cdots,\nu_p}\left(\frac{X+X_1+\cdots+X_i}{X_{i+1}},\cdots,\frac{X+X_1+\cdots+X_i}{X_p};\lambda+M+\frac{i}{2}\right)$$

et P depend des signes des indices, et a comme valeurs les valeurs données plus haut, avec la seule différence qu'on change p en i.

Matematica. — *Couples des surfaces dont les asymptotiques correspondent et les tangentes asymptotiques homologues se coupent.* Nota [1] di S. FINIKOFF, presentata dal Socio G. FUBINI.

1. Soit (x) et (x_3) deux surfaces rapportées aux asymptotiques u, v; (x_1) et (x_2) – les points de rencontre de leurs tangentes u et v.

Les déplacements projectifs du tétraèdre $(x\,x_1\,x_2\,x_3)$ sont déterminés par les composants a_i^k, b_i^k

$$(1) \qquad x_{iu} = \sum_{k=0}^{3} a_i^k x_k \quad , \quad x_{iv} = \sum_{k=0}^{3} b_i^k x_k \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Comme les arêtes $x\,x_1, x\,x_2, x_3\,x_1, x_3\,x_2$ sont tangentes des asymptotiques u, v des surfaces $(x), (x_3)$, nous avons

$$a_0^2 = 0 \quad , \quad a_0^3 = 0 \quad , \quad a_3^0 = 0 \quad , \quad a_3^2 = 0 \quad , \quad a_1^3 = 0 \quad , \quad a_1^0 = 0$$

avec les équations analogues pour b_i^k. La normalisation des coordonnées x_i faite, les conditions d'intégrabilité du système (1) nous conduisent au tableau suivant des composants a_i^k, b_i^k

(2)

$-a_1$	1	0	0	$-b_2$	0	1	0
0	a_1	β	0	bq	b_1	a_1+a_2	1
aq	b_1+b_2	a_2	1	0	γ	b_2	0
0	a	0	$-a_2$	0	0	b	$-b_1$

où β et γ sont les coefficients de l'élément linéaire projectif de M. Fubini de la surface (x), $\frac{a\beta}{b}$ et $\frac{b\gamma}{a}$ – ceux de la surface (x_3).

Les conditions d'intégrabilité de (1) deviennent

$$(3) \qquad \frac{\partial lq}{\partial u} = 2\left(1 - \frac{a}{b}\right)(a_1 + a_2) \quad , \quad \frac{\partial lq}{\partial v} = 2\left(1 - \frac{b}{a}\right)(b_1 + b_2),$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 20 agosto 1934.

$$(3_2)\qquad \frac{\partial la}{\partial v} = \frac{b}{a}(b_1 + b_2) - 2\,b_1 \quad , \quad \frac{\partial lb}{\partial u} = \frac{a}{b}(a_1 + a_2) - 2\,a_2 ,$$

$$(3_3)\qquad \begin{cases} \beta_v - (a_1 + a_2)_u = (b_1 - b_2)\,\beta + a_2^2 - a_1^2 \\ \gamma_u - (b_1 + b_2)_v = (a_2 - a_1)\,\gamma + b_1^2 - b_2^2 , \end{cases}$$

$$(3_4)\qquad a_{1v} - b_{2u} = q\,(b - a) \quad , \quad a_{2v} - b_{1u} = a - b ,$$

$$(3_5)\qquad a_{1v} - b_{1u} = a + bq + (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) - \beta\gamma .$$

Il suit des équations (3_1)

$$(3_6)\qquad \left(\frac{a}{b}\right)_v (a_1 + a_2) + \frac{a - b}{b}(a_1 + a_2)_v = \left(\frac{b}{a}\right)_u (b_1 + b_2) - \frac{a - b}{a}(b_1 + b_2)_u ,$$

Or le déterminant des équations $(3_{4,5,6})$ par rapport aux inconnues a_{iv}, b_{iu} est

$$a^2 - b^2 .$$

Le système (3_{1-6}) est donc en involution et détermine un couple des surfaces (x), (x_3) et un seulement si l'on donne des valeurs initiales de a, b, a_1, a_2, b_1, b_2, β, γ, par exemple, pour $u = v$ en fonctions de $u + v$ et la valeur de q pour $u = u_0$, $v = v_0$ à moins que ne soit 1) $a = b$ ni 2) $a + b = 0$.

2. *Premier cas spécial.* Si

$$a = b ,$$

on introduit une fonction auxiliaire φ

$$2\,a_1 = \frac{\partial}{\partial u} la\varphi \quad , \quad 2\,a_2 = \frac{\partial}{\partial u} l\frac{\varphi}{a} \quad , \quad 2\,b_1 = \frac{\partial}{\partial v} l\frac{\varphi}{a} \quad , \quad 2\,b_2 = \frac{\partial}{\partial v} la\varphi$$

et le système (3) devient

$$(4_1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 la}{\partial u\,\partial v} = a\,(1 + q) - \beta\gamma + \dfrac{\partial l\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial l\varphi}{\partial v} \quad , \quad q = \text{const} , \\ \dfrac{\partial^2 l\varphi}{\partial u^2} = \beta_v + \beta\dfrac{\partial la}{\partial v} + \dfrac{\partial l\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial la}{\partial u} \quad , \quad \dfrac{\partial^2 l\varphi}{\partial v^2} = \gamma_u + \gamma\dfrac{\partial la}{\partial u} + \dfrac{\partial l\varphi}{\partial v}\dfrac{\partial la}{\partial v} . \end{cases}$$

La fonction φ reste arbitraire et le système (4_1) détermine a, β, γ avec 4 fonctions arbitraires d'un argument.

Si la surface (x) est donnée par les coefficients β, γ, p_{11}, p_{22} de ses formes fondamentales, il faut y ajouter

$$(4_2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 la\varphi}{\partial u^2} = \beta\dfrac{\partial la\varphi}{\partial v} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial la\varphi}{\partial u}\right)^2 - 2\,p_{11} , \\ \dfrac{\partial^2 la\varphi}{\partial v^2} = \gamma\dfrac{\partial la\varphi}{\partial u} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial la\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2\,p_{22} . \end{cases}$$

Le système $(4_{1,2})$ devient complet et détermine a, φ avec 7 constantes essentielles, la constante $q\,y$ comprise.

Toutes les surfaces sont projectivement équivalentes à la surface (x); on le démontre sans peine en calculant les coefficients des formes fondamentales de (x) et (x_3).

Or il est évident que deux surfaces (y) et (y_3), symmetriques par rapport à un centre correspondent par leurs asymptotiques, les tangentes homologues concourantes, et une transformation projective T ne dérange pas cette configuration.

Cela posé, soit (x) une surface arbitraire donnée, (y) sa transformée T. Si l'on construit une surface (y_3) symmetrique à (y) par rapport à un centre arbitraire C et applique au couple $(y), (y_3)$ la transformation inverse T^{-1}, la surface (y) revient à sa forme initiale (x) et la surface (y_3) se transforme en une surface (x_3) qui présente une solution du problème.

Les trois coordonnées du centre C et 5 paramètres de la transformation T constituent 8 constantes arbitraires dont 7 seulement sont essentielles: le couple $(x), (x_3)$ nèst pas changé si l'on soumet $(y), (y_3)$ à une homothètie au centre C.

3. *Second cas spécial.* Le cas

$$a + b = 0$$

ne donne pas de solution. Le système (3), les a_i, b_i éliminés, ramène à l'équation

$$a = 0$$

qui est impossible.

4. *Couples de M. Godaux.* Examinons un cas particulier: si

$$q = \text{const},$$

les équations (3_1) donnent $a = b$ ou bien

$$a_1 + a_2 = 0 \quad , \quad b_1 + b_2 = 0.$$

Le premier cas examiné, considerons le second.

Les équations (3_4) montrent que q est égale à l'unité et, les paramètres u, v bien choisis, on déduit des $(3_{2,3})$

$$a = \frac{1}{\beta} \quad , \quad b = \frac{1}{\gamma}.$$

Le système (3) devient

$$(5)\qquad \begin{cases} a_2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial l\gamma}{\partial u} \quad , \quad b_1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial l\beta}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^2 l\beta}{\partial u\,\partial v} = \dfrac{1}{\beta} - \dfrac{\beta\gamma}{2} \quad , \quad \dfrac{\partial^2 l\gamma}{\partial u\,\partial v} = \dfrac{1}{\gamma} - \dfrac{\beta\gamma}{2}. \end{cases}$$

On détermine β, γ avec 5 fonctions arbitraires d'un argument.

Il est facile à voir que les quadriques de Lie attachées à la surface (x) se confondent avec celles qui sont liées aux points homologues de (x_3). Selon le beau théorème de M. Godaux il suffit pour cela que les points de rencontre des tangentes homologues engendrent deux réseaux focales d'une congruences avec les mêmes invariants ponctuels de Darboux et les points $(x_1), (x_2)$ satisfont à cette condition, les invariants en jeu étant

$$-\beta\gamma \quad , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 l\beta\gamma}{\partial u\,\partial v} - \beta\gamma .$$

5. En revenant au cas général remarquons: une surface (x) donnée, il n'existe pas, évidemment de surfaces (x_3) qui composent avec celle-là un couple à tangentes asymptotiques concourantes. S'il existe une telle surface, il n'y a pas d'autres à moins que la surface (x) ne soit reglée.

En effet, si (y_3) est une autre surface rapportée aux asymptotiques et dont les tangentes asymptotiques concourent avec celles de la surface (x) aux points y_1 et y_2, les expressions

$$y_3 = \zeta x + \xi x_1 + \eta x_2 + x_3$$

$$y_1 = \xi_1 x + x_1 \quad , \quad y_2 = \eta_1 x + x_2$$

portées dans les équations (1), permettent de calculer les composants du tétraèdre (x, y_1, y_2, y_3). Comme ils vérifient le système (3), l'équation (3_5) donne

$$\beta\gamma = 0 .$$

Le système qu'on obtient par ce procédé est compliqué, mais il admet une solution bien simple. Si l'on pose

$$\zeta = 0 \quad , \quad \eta = 0 \quad , \quad \xi_1 = 0 \quad , \quad \xi = \eta_1 \quad , \quad \bar{q} = 1 \quad , \quad \bar{b} = b$$

où les lettres barrées désignent le mêmes composants du nouveau tétraèdre, le système en question devient

$$(6)\qquad \xi_u = \bar{a} - a \quad , \quad \xi_v = \xi^2 - 2 b_1 \xi \quad , \quad \bar{a}_v = -2\bar{a}(b_1 - \xi)$$

et le système (3)

$$(7)\qquad \begin{cases} \beta = 0 \quad , \quad a_1 + a_2 = 0 \quad , \quad b_1 + b_2 = 0 \quad , \quad q = 1 \\ b_1 u = -a \quad , \quad a_2 v = -b \quad , \quad a_v = -2ab_1 , \\ b_u = -2ba_2 \quad , \quad \gamma_u = 2a_2\gamma ; \end{cases}$$

tous les deux sont en involution.

Les surfaces (x_3) et (y_3) sont évidemment identiques, donc la correspondance entre les surfaces (x) et (x_3) peut être établie d'une infinité de manières. Les reglées asymptotiques de (x) et (x_3) qui correspondent à la même valeur de v sont portées par une même quadrique comme deux systèmes de génératrices rectilignes.

6. *Congruences associées au couple.* Il est bien évident que les points de rencontre des tangentes homologues (x_1) et (x_2) engendrent deux nappes focales d'une congruence $(x_1 x_2)$ cont les développables correspondent aux asymptotiques u , v. Les développables de la congruence (xx_3) leur correspondent également, les foyers sont

$$z_1 = x_3 - ax \quad , \quad z_2 = x_3 - bx$$

et les plans focaux passent par les tangentes asymptotiques de l'autre système de (x) et (x_3).

Les foyers z_1 , z_2 se confondent et les développables deviennent indéterminées si $a = b$ c-a-d si les surfaces $(x) , (x_3)$ sont projectivement identiques.

Meccanica (Idrodinamica). — *Sul moto piano discontinuo indotto da una sorgente addossata ad una lamina rettilinea indefinita.* Nota [1] di A. Masotti, presentata dal Corrisp. U. Cisotti.

1. Nella Nota sui moti piani indotti da una sorgente addossata ad un ostacolo, inserita nel volume in corso degli « Atti della Pontificia Accademia delle Scienze », esaminai in particolare il moto indotto da una sorgente addossata ad una lamina rettilinea indefinita [2]. Nella soluzione allora considerata il movimento si estende all'intero piano, la velocità è ovunque continua, e diviene infinita, oltre che nella sorgente, anche all'estremità della lamina [ciò che avviene in generale in ogni saliente, come è ben noto [3]].

Ad una soluzione nella quale la velocità si mantiene finita anche all'estremità della lamina si accenna nella Nota citata [4]: è la soluzione a cui si perviene supponendo che la presenza della sorgente richiami una corrente di carattere circolatorio intorno alla lamina, di intensità opportuna; a questa ipotesi ricorsero già, in circostanze analoghe e col medesimo scopo, il professor Hamel [5] e l'autore [6].

Ad una seconda soluzione nella quale la velocità si mantiene finita all'estremità della lamina si perviene ammettendo la presenza di un vortice puntiforme libero, del quale è possibile determinare intensità e posizione; questa ricerca è esposta in una Nota che apparirà nel volume in corso degli « Atti della Pontificia Accademia delle Scienze ».

Ad una terza soluzione è dedicata la presente Nota. Essa è illustrata dalla figura 1: in questo schema la linea di flusso che lambisce il tratto SO della faccia superiore della lamina – alla quale è addossata in S la sorgente – si stacca in O dalla lamina, e forma una linea libera λ che si estende indefinitamente, e separa la regione Σ ch'è sede di movimento dalla regione Σ' dove regna la quiete. Dentro a Σ il moto ha asintoticamente il carattere di una traslazione uniforme, con velocità parallela alla lamina, il

(1) Pervenuta all'Accademia il 17 settembre 1934.

(2) Masotti, *Moti piani indotti da una sorgente addossata ad un ostacolo*, § 2 (« Acta Pontificiae Academiae Scientiarum Novi Lyncaei », anno LXXXVII, 1933-34, pp. 248-255).

(3) V. ad es. Cisotti, *Idromeccanica piana*, I, § 74 (Milano, 1921).

(4) In nota a p. 253.

(5) Hamel, *Bewegung eines gradlinigen Wirbels um eine Buhne* (« Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik », vol. 13, 1933, pp. 98-101).

(6) Masotti, *Sul moto di una sorgente puntiforme in presenza di una lamina rettilinea indefinita* (« Acta Pontificiae Academiae Scientiarum Novi Lyncaei », anno LXXXVII, 1933-34, pp. 151-163).

cui modulo ha quel valore costante V_0 che esso assume sopra λ. In funzione della portata della sorgente, q, che supporremo positiva (ovvie essendo le modificazioni richieste nel caso opposto), e della distanza della sorgente

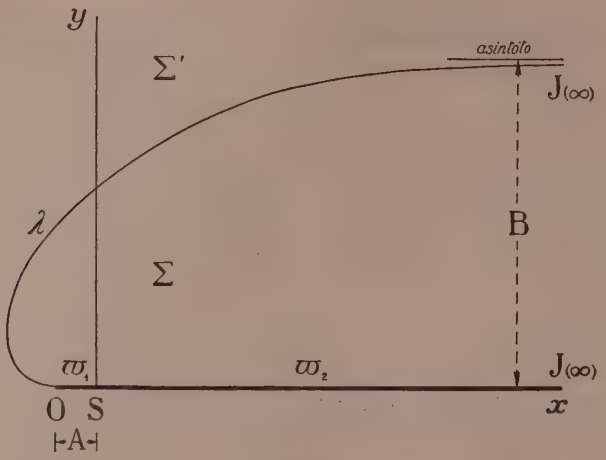


Fig. 1.

dall'estremità della lamina, A, si possono esprimere come segue V_0 e la distanza asintotica della linea libera dalla lamina, B:

$$(1) \qquad B = \frac{\pi}{2 \log 2 - 1} A,$$

$$(2) \qquad V_0 = \frac{q}{B} = \frac{2 \log 2 - 1}{\pi} \frac{q}{A}.$$

È degna di nota la circostanza che la linea libera è una di quelle che si presentano a limitare la vena fluente nel caso di Helmholtz (caso di Borda nel piano), quando la larghezza dell'orificio eguaglia 4 B [1].

2. Pur essendo *a priori* ignota la configurazione del campo, perchè *a priori* ignota è la linea libera λ che forma parte del suo contorno, ammet-

(1) Come si vede, il problema del moto indotto da una sorgente addossata ad una lamina rettilinea indefinita si presta alla applicazione di diversi criteri atti a rendere regolare la velocità in corrispondenza di un saliente; è dunque una bella illustrazione dei concetti svolti dal prof. Cisotti nella comunicazione: *Sulla regolarizzazione di salienti idrodinamici*, tenuta al Seminario Matematico e Fisico di Milano, che sarà pubblicata nel vol. VIII dei « Rendiconti ». In quanto alla trattazione di questa Nota, essa è del tutto simile a quelle della Nota: *Moti piani discontinui provocati da una sorgente o da una doppietta addossata ad un ostacolo* (« Pubblicazioni della Università Cattolica del Sacro Cuore », ser. 10ª: Scienze Fisiche e Matematiche, vol. 1).

teremo la possibilità di rappresentarlo in modo conforme sopra un semicerchio di raggio unitario, facendo corrispondere ai tre punti O S J della figura 1 quelli della figura 2 designati con le medesime lettere; così ai

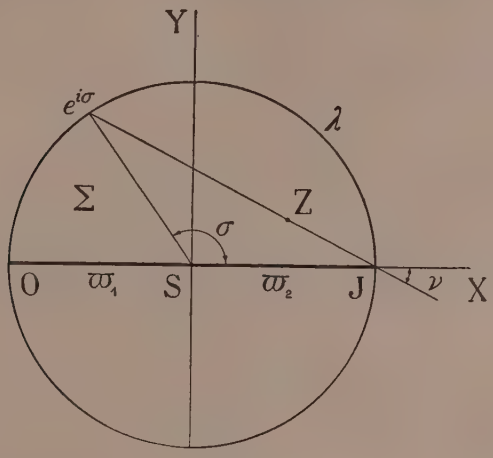


Fig. 2.

tratti $\bar{\omega}_1$ e $\bar{\omega}_2$ della lamina corrisponderanno i due raggi, e alla linea libera λ la semicirconferenza. È evidente che questa rappresentazione conforme ammette O e J come punti singolari, e noi supporremo che non ve ne siano altri.

Assunti i sistemi di riferimento indicati nelle figure 1 e 2, sia

$$\zeta = \zeta(Z) \tag{3}$$

la relazione, *a priori* incognita, fra le due variabili complesse, che effettua la accennata rappresentazione conforme.

Sia f il potenziale cinetico complesso del moto in esame, w la velocità complessa, ambedue funzioni incognite di ζ, legate dalla relazione

$$w = \frac{df}{d\zeta}. \tag{4}$$

È facile procurarsi la espressione di queste due funzioni in termini di Z, come segue:

a) La f, espressa in termini di Z, rappresenta quel moto che nel semicerchio sarebbe indotto dalla presenza di una sorgente di portata q situata in S e di un pozzo di portata $-q$ situato in J; quindi [1]:

$$f = \frac{q}{\pi}\log Z - \frac{2q}{\pi}\log(Z-1). \tag{5}$$

(1) Cfr. Masotti, loco primo citato, § 3.

b) La w è funzione regolare di ζ in tutto il campo del moto, salvo che in S, dove diviene infinita in modo che

$$\lim_{\zeta \to 0} w\zeta = \frac{q}{\pi}; \tag{6}$$

se ne deduce che la w, espressa in termini di Z, è funzione regolare in tutto il semicerchio, salvo che nel centro, dove diviene infinita in modo che

$$\lim_{Z \to 0} wZ = \frac{q}{\pi}\left(\frac{dZ}{d\zeta}\right)_0. \tag{7}$$

Si può quindi affermare che la funzione wZ è regolare e non mai nulla nel semicerchio, contorno incluso; essa è reale sull'asse reale, perchè lo sono w e Z; quindi regolare e reale sull'asse reale è il log wZ, al quale, posto con manifesto significato dei simboli $w = Ve^{-i\theta}$ e $Z = Re^{i\sigma}$, compete la espressione:

$$\log wZ = \log RV + i(\sigma - \theta). \tag{8}$$

Questa funzione è prolungabile analiticamente nel semicerchio che proviene dal precedente per riflessione rispetto all'asse reale, ed assume in punti simmetrici rispetto a quest'asse valori coniugati. La sua parte reale, log RV, assume sul contorno il valore costante $\log V_0$, che manterrà in tutto il cerchio; dunque, in tutto il cerchio:

$$V = \frac{V_0}{R}; \tag{9}$$

il coefficiente dell'unità immaginaria, $\sigma - \theta$, manterrà quindi valore costante in tutto il cerchio, e poichè sull'asse reale quella differenza è nulla (se $q > 0$), tale sarà in tutto il cerchio; dunque, in tutto il cerchio:

$$\theta = \sigma. \tag{10}$$

Ne segue che

$$w = \frac{V_0}{Z}\ (1). \tag{11}$$

Ciò premesso, dalla (4), scritta sotto la forma:

$$w = \frac{df}{dZ} : \frac{d\zeta}{dZ}, \tag{12}$$

si deduce, tenendo conto delle (5) e (11):

$$\frac{d\zeta}{dZ} = \frac{q}{\pi V_0}\,\frac{1+Z}{1-Z}; \tag{13}$$

(1) Si osserva che alle semicirconferenze R = cost., contenute nel semicerchio superiore, corrispondono sul piano del moto le linee isotachie (dove V = cost.), ai raggi σ = cost. le linee isocline (dove θ = cost.).

da questa, integrando:

$$\zeta = -\frac{q}{\pi V_0}[Z + 2\log(1 - Z)], \tag{14}$$

con la determinazione del logaritmo definita dalla eguaglianza:

$$\arg(1 - Z) = -\nu, \tag{15}$$

illustrata dalla figura 2.

Nelle (5) e (14) è contenuta la soluzione del problema proposto. Sopra λ:

$$Z = e^{i\sigma} = e^{i\theta},$$

$$\mathrm{mod}(1 - Z) = 2\sin\frac{\sigma}{2} = 2\sin\frac{\theta}{2},$$

$$\arg(1 - Z) = -\frac{1}{2}(\pi - \sigma) = -\frac{1}{2}(\pi - \theta)$$

(v. figura 2); pertanto, discendono dalla (14) le seguenti equazioni parametriche della linea libera:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{q}{\pi V_0}\left[2\log\left(2\sin\dfrac{\theta}{2}\right) + \cos\theta\right], \\ y = \dfrac{q}{\pi V_0}\left[\pi - \theta - \sin\theta\right], \end{cases} \tag{16}$$

nelle quali – è opportuno ricordarlo – il parametro θ è l'angolo che la tangente alla linea, orientata nel senso del flusso (se $q > 0$), forma coll'asse delle x; tutta la linea viene descritta, a partire da A fino all'infinito, mentre θ decresce da π allo zero.

Non ci indugiamo sulla deduzione, pressochè immediata, dalle (16), delle annunciate (1) e (2). In quanto alla affermata identità della linea libera con una di quelle che limitano la vena fluente nel caso di Helmholtz, quando la larghezza dell'orificio eguaglia 4 B, essa risulta dal confronto delle (16) con le note formule relative a questo classico problema [1].

(1) Cfr. Lamb, *Hydrodynamics*, § 74 (Cambridge, 1932).

Meccanica. — *Correzione einsteiniana del tempo nel movimento planetario.* Nota II di G. Garcia, presentata[1] dal Socio T. Levi-Civita.

1. *Osservazione su alcune formule stabilite nella Nota precedente*[2]. – Ho ivi trattato col metodo di Jacobi il problema del moto planetario einsteiniano in seconda approssimazione. Mostrerò tra un momento (n. 2) come dalla legge del tempo einsteiniano, indicata alla fine della Nota suddetta, possano dedursi nel modo più spedito le correzioni che subiscono le relazioni temporali, rispetto a quelle classiche del moto kepleriano, e in particolare le espressioni delle durate di rivoluzione anomalistica e siderale, già rese esplicite per altra via dal dott. Cimino[3]. Prima però desidero avvertire che, per un malinteso nella correzione delle bozze[4], nelle formule (21), (22), (33), (35) della mia Nota precedente è stampato $\frac{1}{\beta}$, al posto di β. Per rendersi conto dell'equivoco giova risalire alla posizione (17)

$$G^{*2} = \left(1 - \frac{k_1}{G^2}\right) G^2 = \beta^2 G^2,$$

che definisce ad un tempo G^* e β. In base a tale posizione, è

$$\beta^2 = 1 - \frac{k_1}{G^2},$$

ossia β *dipende da* G (o, se si vuole, da G^*). Comunque, da $G^{*2} = \beta^2 G^2$ *non segue* $\frac{\partial G}{\partial G^*} = \frac{1}{\beta}$ come accadrebbe se β fosse costante e come fu (probabilmente) ritenuto da chi rivide le bozze. La posizione testè richiamata implica invece

$$G^{*2} = G^2 - k_1,$$

con k_1 costante (rispetto alle G). Si ha quindi, derivando parzialmente rispetto a G^*,

$$G^* = G \frac{\partial G}{\partial G^*},$$

(1) Nella seduta del 6 maggio 1934.

(2) *Leggi del movimento planetario einsteiniano*, in questi «Rendiconti», vol. XIX, 1934, pp. 874-879.

(3) Ibidem, vol. XVI, 1932, pp. 120-126, 223-227.

(4) [*Dichiarazione del Socio T. Levi-Civita*]. Tali bozze furono licenziate da me, anzichè dall'Autore, per risparmio di tempo.

donde, in causa della posizione $G^*/G = \beta$,

$$\frac{\partial G}{\partial G^*} = \beta .$$

Ecco perchè dalla formula (21) della Nota I,

$$S = G\lambda + S_r - E^* t_1 ,$$

(dove $E^* t_1$ è indipendente da G), si trae

$$\frac{\partial S}{\partial G^*} = \frac{\partial G}{\partial G^*}\lambda + \frac{\partial S_r}{\partial G^*} = \beta\lambda + \frac{\partial S_r}{\partial G^*} = \text{cost}$$

(la costante potendosi designare con βg), anzichè la formula (22) della Nota in questione, in cui appunto figura $\frac{1}{\beta}$ al posto di β.

Con l'intesa che anche nelle formule successive [(33) e (35)] va sostituito β al posto di $\frac{1}{\beta}$ rimane perfettamente giustificata l'espressione ottenuta a p. 878 (ultime dieci righe) per lo spostamento del perielio. Esso risulta infatti dalla equazione (34) della traiettoria

$$\frac{p^*}{r} = 1 + \varepsilon \cos A^*$$

in cui $A^* = \beta A$ $\left(\text{e non } \frac{1}{\beta} A\right)$, essendo A l'anomalia vera. Infatti, per far crescere A^* di 2π, cioè per passare da un perielio al successivo, bisogna che l'anomalia vera A cresca di $\frac{2\pi}{\beta}$. Siccome $\beta < 1$, si ha effettivamente per il perielio l'avanzamento

$$\tilde{\omega} = 2\pi\left(\frac{1}{\beta} - 1\right),$$

dato dalla formula (35) della Nota più volte ricordata.

2. *La legge einsteiniana del tempo.* – Indicando con R il parametro che, nella metrica einsteiniana, corrisponde al raggio vettore, con $\frac{\mu}{c^2}$ una costante (da trattarsi come infinitesima) abbiamo trovato nella Nota I l'espressione seguente del tempo cosmico t:

$$t = \frac{1}{G}\int\left(1 + \frac{2\mu}{c^2 R}\right) R^2 dA .$$

Giova far apparire come variabile corrente di integrazione, anzichè l'anomalìa vera A, il parametro proporzionale A* che figura nella equazione della traiettoria

$$r = \frac{p^*}{1 + \varepsilon \cos A^*}. \tag{1}$$

Come fu richiamato al n. 1, si ha $A^* = \beta A$. Siccome è altresì $G^* = \beta G$, potremo partirci dalla equazione

$$t = \frac{1}{G^*} \int \left(1 + \frac{2\mu}{c^2 R}\right) R^2 \, dA^*. \tag{2}$$

Fra R e il raggio vettore euclideo r si ha la relazione del Levi-Civita

$$r = R\left(1 - \frac{\mu}{c^2 R}\right),$$

donde, in seconda approssimazione,

$$R = r\left(1 + \frac{\mu}{c^2 r}\right) \quad , \quad R^2 = r^2\left(1 + \frac{2\mu}{c^2 r}\right) \quad , \quad 1 + \frac{2\mu}{c^2 R} = 1 + \frac{2\mu}{c^2 r}.$$

La (1) può quindi essere scritta

$$t = \frac{1}{G^*} \int r^2 \left(1 + \frac{4\mu}{c^2 r}\right) dA^* + \text{cost.} \tag{3}$$

che, in base alla

$$r = \frac{p^*}{1 + \varepsilon \cos A^*},$$

dà

$$t = 2 \frac{p^{*2}}{G^* \sqrt{1 - \varepsilon^2}} \left\{ \left[\frac{1}{1 - \varepsilon^2} + \frac{4\mu}{c^2 p^*} \right] \operatorname{arctag}\left(\sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \operatorname{tag} \frac{A^*}{2} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{1 - \varepsilon^2}} \frac{\varepsilon \operatorname{sen} A^*}{1 + \cos A^*} \right\} + \text{cost.}$$

Siccome

$$G^* = \sqrt{k p^*} \quad , \quad p^* = a(1 - \varepsilon^2),$$

$$k = \frac{\mu}{1 + \frac{2\mu}{c^2 a}},$$

la espressione di t può anche essere posta sotto la forma.

$$t = 2 \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \left(1 + \frac{\mu}{c^2 a}\right) \left\{ \left(1 + \frac{4\mu}{c^2 a}\right) \operatorname{arctag}\left(\sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \operatorname{tag} \frac{A^*}{2} \right) - \right. \tag{4}$$

$$\left. - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \varepsilon^2} \frac{\varepsilon \operatorname{sen} A^*}{1 + \varepsilon \cos A^*} \right\} + \text{cost.}$$

Individuando la costante colla condizione che A* si annulli per $t = t^0$ e ponendo per brevità

$$t - t_0 = \bar{t},$$

si avrà, per

$$\bar{t} = T \quad , \quad A^* = 2\pi;$$

con che la (4) dà per la *durata della rivoluzioue anomalistica*

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \left(1 + \frac{5\mu}{c^2 a}\right). \tag{5}$$

Per determinare la *rivoluzione siderale* T_s ci procureremo l'eccesso

$$\tau = T - T_s.$$

Questo τ non è altro che il tempo impiegato dal pianeta per percorrere un archetto di traiettoria *corrispondente allo spostamento del perielio*. Essendo $\tilde{\omega}$ il corrispondente incremento dell'anomalia vera A, abbiamo la formula classica di Einstein $\left[\text{già ricordata sotto la forma } \tilde{\omega} = 2\pi\left(\frac{1}{\beta} - 1\right)\right]$,

$$\tilde{\omega} = \frac{6\pi\mu}{c^2 p^*}. \tag{6}$$

D'altra parte, per piccoli incrementi di A*, si può sostituire alla (2) la relazione differenziale

$$dt = \frac{1}{G^*}\left(1 + \frac{2\mu}{c^2 R}\right) R^2 \, dA^*,$$

e identificare, colla solita approssimazione, l'incremento che subisce A*, con quello dell'anomalìa vera, cioè con $\tilde{\omega}$. Si ottiene così per τ l'espressione

$$\tau = \frac{1}{G^*}\left(1 + \frac{2\mu}{c^2 R}\right) R^2 \, \tilde{\omega}.$$

Dove $\tilde{\omega}$ compare a fattore, per calcolare a meno del secondo ordine, si può sostituire l'unità a $1 + \frac{2\mu}{c^2 R}$, attribuendo poi a $\frac{1}{G^*}$ e $\frac{R^2}{p^*}$ i valori seguenti:

$$\frac{1}{G^*} = \frac{1}{\sqrt{k p^*}} = \frac{1}{\sqrt{\mu a (1 - \varepsilon^2)}},$$

$$\frac{R^2}{p^*} = \frac{p^*}{(1 + \varepsilon \cos A^*)^2} = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{(1 + \varepsilon \cos A^*)^2}.$$

Ne viene, attesa l'espressione (6) di $\tilde{\omega}$,

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \frac{3\mu}{c^2 a} \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{(1 + \varepsilon \cos A^*)^2}, \tag{7}$$

La rivoluzione siderale T_s ha perciò l'espressione

$$(8) \qquad T_s = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \left[1 + \frac{5\mu}{c^2 a} - \frac{3\mu}{c^2 a} \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{(1+\varepsilon\cos A^*)^2} \right].$$

Con ciò abbiamo ritrovato, come ci eravamo proposto, tutti i risultati ottenuti dal dott. M. Cimino.

Meccanica. — *Sulle curve definite da un sistema di equazioni differenziali di secondo ordine.* - I. *Intorno ad un metodo di analisi qualitativa applicato ai problemi dinamici con due gradi di libertà.* Nota [1] di N. Moisseiev, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Consideriamo il problema del moto di un punto materiale sotto l'azione di forze indipendenti dal tempo ed aventi un potenziale. Supponiamo che questo moto si svolga in un piano invariabile e che il sistema di coordinate cartesiane, a cui si riferisce il moto, si trovi animato da rotazione uniforme con velocità angolare n. (Nel caso di un sistema immobile di coordinate basterà nelle formule che seguono assumere $n = 0$).

Le equazioni del moto del punto prenderanno allora l'aspetto seguente:

$$(1.1) \qquad \begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} = w'_x \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} = w'_y \end{cases}$$

dove w è funzione potenziale dipendente unicamente dalle coordinate x, y. Le equazioni (1.1) hanno l'integrale di Jacobi

$$(1.2) \qquad v^2 \equiv \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2w + 2h$$

dove v è la velocità lineare del moto del punto relativamente al sistema di coordinate x, y.

Possiamo esprimere nel modo seguente il principale problema dell'analisi generale qualitativa concernente le proprietà delle traiettorie del sistema (1.1): date le equazioni (1.1) ed il loro integrale (1.2) dobbiamo ricavare da questi dati tutte le indicazioni che essi possono dare relativamente alle proprietà delle traiettorie nel suddetto problema dinamico.

Il primo passo verso la soluzione del proposto problema fu eseguito dal Hill, il quale dimostrò, che per ogni valore della costante di Jacobi h esiste (generalmente parlando) una certa curva, che divide il piano x, y in

(1) Pervenuta all'Accademia il 29 agosto 1934.

regioni con possibile o non possibile moto del punto. L'equazione di questa curva del Hill di velocità zero è

$$w + h = 0. \tag{1.3}$$

Da un lato di questa curva il quadrato della velocità relativa v è positivo e il moto del punto possibile; dall'altro lato della curva il quadrato di velocità è negativo ed il moto è impossibile.

Continuando l'indagine nella stessa direzione il Darwin trovò che le regioni di moto possibile, stabilite dal Hill, si dividono a loro volta in due parti, che differiscono spiccatamente per il carattere del fascio di traiettorie, uscenti da ogni punto della regione. Le dette parti sono divise dalla seguente curva:

$$D \equiv F^2 - 4 n^2 v^2 = 0. \tag{1.4}$$

dove

$$F = \sqrt{w_x'^2 + w_y'^2}.$$

Da quel lato della curva di Darwin (1.4) dove D è maggiore di zero, il carattere del fascio di traiettorie presenta in ogni punto le seguenti particolarità: per ognuno dei punti di questa regione passano traiettorie che ruotano tanto in direzione positiva, quanto in direzione negativa rispetto al corrispondente centro momentaneo di curvatura. In ogni punto vi è possibilità di due traiettorie diverse, aventi colla linea retta un contatto d'ordine non inferiore al secondo; cioè, vi è possibilità, in ogni punto, di sviamento (inflessione) delle traiettorie, date due diverse posizioni della tangente.

Da quel lato della curva di Darwin (1.4) invece, dove D è minore di zero, il carattere del fascio delle traiettorie sarà affatto diverso, in quanto che vi è solo possibilità di contatti delle traiettorie colla retta non superiori al primo ordine, e quindi gli sviamenti delle traiettorie sono impossibili. Tutte le traiettorie di questa regione avranno rotazioni dello stesso senso intorno ai corrispondenti centri momentanei di curvatura.

Dall'epoca di Hill e di Darwin in qua i metodi di analisi qualitativa dei problemi dinamici furono considerevolmente approfonditi e perfezionati da una serie di eminenti studiosi, quali Poincaré, Sundmann, Levi-Civita, Birkhoff ecc. Ci pare tuttavia che l'indirizzo dato dagli studi di Hill e di Darwin non sia stato messo abbastanza a profitto.

Lo scopo del presente lavoro consiste per l'appunto nel determinare una delle proprietà generali del sistema (1.1), proprietà che, essendo abbastanza elementare, pure nello stesso tempo non è priva d'interesse e insieme alle proprietà, stabilite da Hill e Darwin, può in certi casi presentare materiale importante per formarsi un giudizio sul carattere delle traiettorie di questo problema [1].

(1) Come sarà chiaro dalla seguente esposizione, ciò ci conduce alla confluenza dei metodi di Hill e di Darwin con quelli di Poincaré e di Birkhoff.

Consideriamo ora sul piano x, y un sistema di linee continue e non aventi punti singolari

$$f(x, y) = \text{cost.}; \tag{1.5}$$

per ognuno dei punti del piano deve passare una, e solamente una, linea di questa famiglia (1.5).

In virtù dell'integrale di Jacobi (1.2), il punto materiale possiede in ognuno dei punti del piano x, y velocità v assolutamente definita, ma le direzioni delle velocità possono, in ogni punto, essere assai diverse. In ogni punto quindi avranno luogo due contatti fra la linea della famiglia (1.5) che passa per questo punto e le traiettorie (1.1): uno per la direzione di velocità positiva sulla tangente rispetto alla linea (1.5) (« contatto diretto »); l'altro, per la direzione di velocità in senso negativo della stessa tangente (« contatto retrogrado »). Questi contatti, tanto il diretto, quanto il retrogrado, possono essere di due tipi diversi e cioè:

Contatti *interni*, quando l'elemento differenziale della traiettoria nel momento del contatto è situato interamente all'interno della linea corrispondente (1.5); e contatti *esterni*, quando l'elemento della traiettoria nel momento di contatto è situato interamente al di fuori della linea corrispondente (1.5).

Il concetto « interno » intendiamo corrispondere a quel lato del piano, verso cui la parte sinistra dell'equazione (1.5) decresce; mentre il concetto « esterno » corrisponde a quel lato del piano, verso cui la suddetta parte sinistra aumenta.

Scriviamo ora le equazioni differenziali del moto di un punto lungo la linea (1.5) e troviamo:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} = w'_x + \mathrm{R} \cdot \dfrac{f'_x}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}} \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} = w'_y + \mathrm{R} \cdot \dfrac{f'_y}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}} \end{cases} \tag{1.6}$$

dove viene designata con R la forza di reazione del legame (1.5), vale a dire, la forza con cui il legame agisce sul punto durante il movimento di questo punto sulla linea. Questa forza è diretta lungo la normale della linea (1.5) ed è facile vedere che, se R è positiva, il punto, quando è libero, tenderà a deviare verso l'interno della curva; e ciò significa che il contatto del punto, quando il suo moto è libero, in questo caso potrà essere solamente interno. D'altra parte se R è negativo, il punto libero tenderà a deviare all'infuori della curva, e ciò significa che, quando il moto è libero, il contatto in questo punto potrà essere solamente esterno.

Conformemente alle regole usuali, da (1.6) e (1.5) ricaviamo:

$$(1.7)\qquad R = -\frac{1}{\sqrt{f_x'^2 + f_y'^2}}\left[\pm 2nv\sqrt{f_x'^2 + f_y'^2} + (f_x' w_x' + f_y' w_y') + \right.$$
$$\left. + \frac{v^2}{f_x'^2 + f_y'^2}(f_{xx}'' f_y'^2 - 2 f_{xy}'' f_x' f_y' + f_{yy}'' f_x'^2)\right].$$

Ponendo

$$R = 0$$

ricaviamo la seguente equazione del luogo geometrico dei contatti con reazione zero al sistema di linee (1.5):

per contatti « diretti »:

$$(1.8)\qquad R_+^* \equiv -2nvP^3 - (f_x' w_x' + f_y' w_y')P^2$$
$$- v^2(f_{xx}'' f_y'^2 - 2 f_{xy}'' f_x' f_y' + f_{yy}'' f_x'^2) = 0$$

e per contatti « retrogradi »:

$$(1.9)\qquad R_-^* \equiv +2nvP^3 - (f_x' w_x' + f_y' w_y')P^2$$
$$- v^2(f_{xx}'' f_y'^2 - 2 f_{xy}'' f_x' f_y' + f_{yy}'' f_x'^2) = 0$$

dove

$$P = |\text{grad. } f(x, y)|.$$

Il valore della velocità v che entra in questa equazione, deve essere sostituito dalla sua espressione mediante le coordinate x, y e la costante h coll'aiuto dell'integrale di Jacobi (1.2).

Dal sopradetto risulta, che la curva (1.8) divide la regione di moto possibile in parti affatto diverse l'una dall'altra per il carattere dei contatti delle traiettorie con la famiglia delle curve (1.5). Nella regione in cui abbiamo $R_+^* > 0$ e quindi anche $R > 0$, i contatti diretti possono essere solo interni; nella regione, dove R_+^* e quindi anche R sono negativi, i contatti diretti possono essere solo esterni. Arriviamo a conclusioni assolutamente analoghe rispetto alla curva (1.9) salvo la differenza, che questa curva corrisponde a contatti retrogradi.

Così, dato un qualunque sistema di linee definito da (1.5), possiamo costruire le curve caratteristiche dei contatti, che corrispondono ad esso (1.8)–(1.9). E ciò a sua volta ci permette di dividere tutta quella parte del piano che, dato il valore della costante h, è accessibile al punto in movimento, in regioni di tipo uniforme (dove R_+^* e R_-^* hanno segno uguale) e regioni miste (dove R_+^* e R_-^* hanno segni diversi) ecc.

Possedendo tale divisione, possiamo arrivare a certe conclusioni non prive d'interesse rispetto alle traiettorie del nostro problema dinamico.

Lasciando per il momento da parte un'esame più particolareggiato della questione, ci limiteremo qui ad un solo esempio:

Supponiano che il sistema (1.5) sia un sistema di linee chiuse. Allora non sarà difficile vedere, che ognuna delle regioni di tipo uniforme possiederà una proprietà notevole, e cioè: in essa non potrà essere compresa completamente nessuna orbita (traiettoria) nè periodica nè altra qualsiasi, qualora essa non possegga punti di ripiegamento, punti angolari, punti di cessazione o, finalmente, nodi nel centro del sistema (1.5).

A questo modo veniamo, fra le altre cose, a concludere che, dato una scelta corrispondente della famiglia di curve (1.5), queste curve (1.8) e (1.9) oppure qualche loro parte, rappresenteranno le frontiere delle cosidette regioni « acicliche ». Con questo non esauriamo però tutte le possibili applicazioni delle curve sudette per scopi di analisi qualitativa delle proprietà inerenti alle traiettorie del nostro problema dinamico (1).

Il caso del problema ristretto di tre corpi in piano, sarà dettagliamente studiato in un articolo che prepariamo per la stampa. Crediamo però opportuno di esaminare prima certi esempi più semplici. A uno di questi dedicheremo una Nota successiva.

(1) Bisogna notare che in certe condizioni le suddette « linee della reazione zero » possono darci direttamente le traiettorie del sistema nostro, o servire fino ad un certo punto di approssimazione alla traiettoria vera.

Aggiunta bibliografica. – Le bozze della presente Nota erano già state restituite alla Segreteria dell'Accademia quando finalmente mi riuscì di consultare la bellissima Memoria di HADAMARD, *Sur certaines propriétes des trajectoires en Dynamique* (« Journ. de Math. pures et appl. » 5me série, to. 3, p. 331, 1897), nella quale questo eminente matematico, partendo dalla stessa idea principale, aveva sviluppato un metodo completamente analogo a quello esposto nelle presenti ricerche. Perciò, lasciando da parte i dettagli che non hanno importanza essenziale, bisogna riconoscere che la mia contribuzione vale solo in rapporto alla generalizzazione del metodo di Hadamard per il caso dei sistemi irreversibili. Hadamard nella sua Memoria si limita allo studio dei sistemi dinamici naturali.

La presente annotazione sarebbe incompleta, se non si avvertisse che il medesimo concetto principale, il quale riunisce i lavori di Kneser (cfr. la suddetta Memoria di Hadamard), di Hadamard e miei, può, in seguito di un'attenta analisi, farsi risalire alle celebri investigazioni di Liapunoff sul problema generale della stabilità del moto. Come origine metodica generale di tutti questi lavori deve essere riconosciuta la classica Memoria di POINCARÉ, *Sur les courbes définies...*

Uno studio comparativo dei metodi di vari autori, i quali hanno lavorato in questa direzione, sarà da noi fatto in un prossimo articolo.

Qui vorrei ancora osservare, a proposito della mia Nota III (che apparirà quanto prima in questi « Rendiconti ») che il concetto principale è quello dell'Hadamard; però l'analisi dei mutui rapporti tra le traiettorie e le superficie di comparazione è un po' più dettagliata. Così, per esempio, l'Hadamard si limita a discriminare due sole regioni: « di ripulsione » (la quale è equivalente alla nostra regione RP) e di « non-ripulsione » (la quale è equivalente all'insieme delle nostre regioni RN, $\overline{RZ}$, RM). Inoltre – già lo rilevai – l'applicazione del metodo di Hadamard è limitata ai sistemi dinamici naturali.

Geofisica. — *Influenza dell'atmosfera terrestre sopra l'effetto di latitudine nella intensità della radiazione cosmica.* Nota [1] di G. B. Rizzo presentata dal Socio A. Lo Surdo.

Le recenti misure della radiazione cosmica, effettuate con grande ricchezza di mezzi e con strumenti esattamente comparabili, nelle condizioni più varie di latitudine e di altezza sul livello del mare, hanno dimostrato che vi è una sensibile diminuzione nella intensità di questa radiazione nelle regioni equatoriali. Tale diminuzione è dell'ordine di grandezza del 14 % presso il livello del mare e intorno al 29 % all'altezza di circa 4300 m. Secondo i risultati ottenuti finora nella campagna mondiale organizzata da Arthur H. Compton [2] l'intensità della radiazione cosmica si mantiene presso a poco costante dalle latitudini più elevate fino al 45° parallelo, a nord e a sud dell'equatore, poi decresce rapidamente e raggiunge il suo valore minimo in una zona di circa 20°, da una parte e dall'altra dell'equatore magnetico. La curva che rappresenta queste variazioni sembra coincidere con quella che, secondo la teoria svolta da G. Lemaître ed M. P. Vallarta [3] rappresenta la distribuzione dei raggi cosmici, nell'ipotesi che i medesimi siano costituiti da corpuscoli elettrizzati aventi l'energia di 7×10^9 *e-volta*. La maggiore deviazione osservata a grandi altezze sul livello del mare si accorda bene col concetto che, essendo più abbondanti, a grandi altezze, i raggi teneri, questi sono maggiormente deviati nel campo magnetico terrestre.

La campagna organizzata dal Compton è ancora nel suo pieno sviluppo; e già altri notevoli contributi allo studio dell'importante argomento vengono portati da H. Hoerlin [4], da J. A. Prins [5], da P. Auger L. Le prince Ringuet [6] e da J. Clay [7], il quale, fin dal 1927, nei suoi viaggi fra l'Olanda e l'isola di Giava, aveva ottenuto i primi risultati intorno all'effetto di latitudine [8]. Una progressiva diminuzione nella intensità della radiazione cosmica, coll'avvici-

(1) Pervenuta all'Accademia il 29 agosto 1934.

(2) Compton A. H., « Phys. Rev. », *43*, 387, 1933.

(3) Lemaitre G., and Vallarta M. P., « Ibid. », *43*, 87, 1933.

(4) Hoerlin H., « Nature », *132*, 61, 1933.

(5) Prins J. A., « Ibid. », *132*, 781, 1933.

(6) Auger P. et Leprince Ringuet L., « Ibid. », *133*, 138, 1934.

(7) Clay J., « Physica », *1*, 363, 1934.

(8) Clay J., « Proc. Amsterdam », *30*, 115, 1927; *31*, 1091, 1928; Clay J. und Berlage H. P., « Naturwiss. », *20*, 687, 1932; Clay J., « Ibid. », *21*, 43, 1933.

narsi all'equatore magnetico, venne anche posta in evidenza da B. Rossi [1], con misure effettuate mediante un contatore a filo, nel viaggio che egli fece da Spalato a Massaua, per partecipare alla campagna promossa dal prof. Cómpton. A parte qualche differerenza nelle intensità misurate a nord e a sud dell'equatore magnetico, e senza insistere, per ora, sul fatto che nelle misure dell'Hoerlin l'aumento della intensità, col crescere della latitudine geomagnetica, continua anche al disopra di 45°, essendo ancora sensibile alla latitudine di Amburgo, il fatto fondamentale accertato è questo, che l'intensità della radiazione cosmica presenta un minimo nelle regioni equatoriali, con una differenza che, al livello del mare, raggiunge il 14 % dei valori ottenuti al disopra di 45°, secondo il Compton, o al disopra di 55° secondo le osservazioni dell'Hoerlin. A questi risultati si attribuisce giustamente una grande importanza, perchè il confronto delle curve che rappresentano la distribuzione dei raggi cosmici alla superficie terrestre con quelle calcolate dal Lemaître e dal Vallarta sembra giustificare la conclusione che i raggi cosmici siano costituiti da corpuscoli elettrizzati, dei quali si può anche calcolare l'energia.

Le curve calcolate dal Lemaître e dal Vallarta dovranno forse essere alquanto modificate, tenendo conto di una recente critica di C. Stoermer [2]; ma io desidero richiamare l'attenzione degli studiosi sopra una circostanza alla quale, finora, non si è posto mente.

Il difetto di simmetria, rispetto al meridiano magnetico, nella intensità della radiazione cosmica misurata col metodo delle coincidenze nei contatori a filo, costituisce un valido argomento a favore della ipotesi corpuscolare; ma non mi sembra che si possa trascurare l'influenza del rigonfiamento atmosferico nelle regioni equatoriali, per rendere conto della osservata diminuzione nella intensità della radiazione cosmica.

Per effetto della forza centrifuga l'atmosfera terrestre deve presentare un notevole rigonfiamento intorno all'equatore, ed era già stato dimostrato dal Laplace [3] che la superficie, la quale costituisce il limite superiore dell'atmosfera, ha un raggio equatoriale che sta al raggio polare come 3 : 2. Allo stesso risultato è pervenuto l'Helmert [4], al quale è anche dovuta la formola

$$\frac{r}{a} = 2 \sec \varphi \cos\left(\frac{\varphi}{3} + 60^\circ\right),$$

per calcolare il raggio vettore r corrispondente alla latitudine geocentrica φ, nella sezione meridiana della superficie limite dell'atmosfera, essendo a il

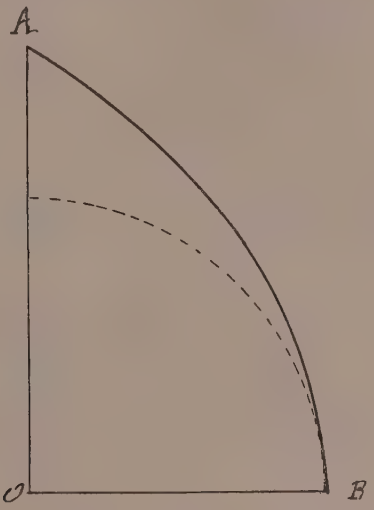
(1) Rossi B., « La Ricerca scientifica », IV, vol. 2°, 365, 1933; V, vol. 1, suppl. nn. 9-10, 1934.

(2) Stoermer C., « Phys. Rev. », *45*, 835, 1934.

(3) Laplace P. S., *Traité de Mécanique céleste. Oeuvres complètes*, t. 11, 178. Paris, 1878.

(4) Helmert F. R., *Die mathematischen u. physikalischen Theorieen d. höheren Geodäsie*, 11 Th., 100. Leipzig, 1884.

raggio equatoriale della curva. Secondo questa relazione un quadrante della sezione meridiana ora detta deve avere approssimativamente la forma indicata con A B nella figura seguente.



Allo schiacciamento dell'atmosfera nel piano dell'equatore, per effetto del moto diurno, si deve poi aggiungere la deformazione prodotta nel piano dell'eclittica dalla forza centrifuga, nel moto annuo della terra, ed anche la deformazione dovuta alle azioni lunisolari, generatrici delle maree. Nè si può trascurare l'effetto del riscaldamento intertropicale dell'atmosfera, per cui si formano le correnti ascendenti, alimentate dall'afflusso dei venti alisei. Non sembra dunque possibile mettere in dubbio che l'atmosfera terrestre ha una forma lenticolare, con la massima altezza fra l'equatore e il piano dell'eclittica.

Queste deduzioni sono anche confermate dalle osservazioni fatte coi palloni sonda, intorno all'altezza della superficie di separazione fra la troposfera e la stratosfera. Infatti, nelle regioni temperate la media altezza della base della stratosfera trovasi a circa 11 km. sul livello del mare e la temperatura è poco differente da 50° in tutta l'altezza esplorata; ma nelle regioni tropicali la base della stratosfera trovasi a 17 km. sul livello del mare e la temperatura scende, in media, a 85°.

Nelle regioni equatoriali la radiazione cosmica che giunge negli strati più bassi dell'atmosfera è dunque soggetta ad un maggiore assorbimento, dovuto alla maggiore lunghezza del percorso nella atmosfera stessa e alla maggiore densità dell'aria: di tale assorbimento è necessario tenere conto, per stabilire quale sia la deviazione dei raggi cosmici sotto l'azione del campo magnetico terrestre.

Io penso che, mediante serie di osservazioni simultanee della radiazione cosmica, eseguite a nord e a sud dell'equatore, a quelle latitudini nelle quali suole essere più rapida la variazione dell'intensità, ed integrando queste determinazioni con la registrazione degli elementi del magnetismo terrestre e con opportune osservazioni aerologiche, sarà possibile distinguere nell'effetto di latitudine l'azione del rigonfiamento equatoriale dell'atmosfera e l'azione del campo magnetico.

Fisica. — *Forze interatomiche e frequenze di oscillazione degli atomi nei reticolati.* Nota [1] di S. Franchetti, presentata dal Corrisp. L. Rolla.

La teoria dei calori specifici dei solidi monoatomici come è stata svolta da Debye, e da Born e Kàrmàn, ha mostrato che almeno in prima approssimazione e sotto certi aspetti si può trattare il moto termico degli atomi come un insieme di vibrazioni armoniche le cui frequenze formano, secondo una nota legge, uno spettro continuo fra $\nu = 0$ e una certa $\nu_{mass.}$ caratteristica del solido.

È evidente che questa $\nu_{mass.}$ deve essere in rapporto con le funzioni che definiscono le azioni esercitate dagli atomi gli uni sugli altri e, effettivamente, dei tentativi di esprimere questo rapporto sono stati già fatti. Però invece di dedurre l'intero spettro delle frequenze si è preferito, per semplicità, calcolare a partire dalle forze interatomiche una sorta di ν « principale » che viene praticamente a coincidere con $\nu_{mass.}$ Le formule ottenute possono essere utili per trattare di altre relazioni riguardanti le frequenze proprie, come per es. quella di Madelung-Einstein fra frequenze proprie e comprimibilità e quella di Lindemann fra frequenze proprie e punto di fusione.

Lo scopo della presente Nota è quello di mostrare come si possa ottenere in modo semplice e con poche ipotesi una relazione fra la funzione $f(r)$ che dà la forza esercitata fra due atomi alla distanza r (nella solita supposizione di forze centrali) e una frequenza « principale » a significato ben definito [2].

Una analoga relazione fu ottenuta parecchio tempo fa da Grüneisen [3], ma in forma più complicata e in modo forse meno soddisfacente.

Il metodo di Grüneisen consiste nel considerare un reticolato (di atomi eguali) nel quale tutti gli atomi fuori che uno si trovano esattamente nelle

(1) Pervenuta all'Accademia il 10 agosto 1934.

(2) Come in altre Note mi limito qui ai reticolati composti di atomi di una sola specie così che una sola funzione $f(r)$ è sufficiente.

(3) Grüneisen, « Ann. d. Phys. », *39*, 263, 1912.

posizioni di riposo. L'atomo spostato, sotto l'azione delle forze esercitate su di esso dagli altri, compie delle oscillazioni lungo la direzione dello spostamento e la forza di richiamo è, in prima approssimazione, proporzionale a questo spostamento. Introducendo la $f(r)$ sopra ricordata e la massa dell'atomo, si calcola la forza di richiamo e la frequenza.

Gli inconvenienti di questo procedimento sono: 1) la schematizzazione secondo la quale tutti gli atomi dovrebbero essere immobili fuori che uno; 2) l'introduzione nella formula trovata per ν di certe funzioni che indicano una dipendenza di ν dalla direzione di oscillazione, le quali funzioni sono complicate e rendono scomodo l'uso della formula stessa; 3) il non chiaro significato della frequenza così definita; 4) l'implicita ipotesi che la $f(r)$ sia una forza ben determinata, cioè non abbia, per es., carattere statistico, possibilità che è bene non trascurare *a priori*.

Il procedimento che seguirò qui consiste invece nel calcolare l'energia potenziale che un atomo generico ha in media tutte le volte che si trova, in una direzione qualsiasi, a una distanza δ dal punto di riposo. Si trova in prima approssimazione (com'è naturale) una espressione della forma $c\delta^2$ che può venire eguagliata a $2\pi^2 \nu^2 m \delta^2$ (m massa dell'atomo). La frequenza ν che così si viene a definire è quella di un oscillatore armonico che abbia, rispetto all'atomo nel reticolato, la medesima massa e, in media, la medesima forma dell'energia potenziale e quindi si trovi dal punto di vista dinamico in condizioni simili a quelle dell'atomo stesso.

Questa definizione della frequenza ν risponde alla dificoltà 3). Il procedimento di media adottato elimina la 2) e la 4). Riguardo alla 1), sarà fatta l'ipotesi che gli atomi abbiano una ripartizione statistica a simmetria sferica intorno ai rispettivi punti di riposo, ciò che rappresenta sempre un miglioramento. Per migliorare ancora bisognerebbe anche tener conto che gli spostamenti dalle posizioni di equilibrio non si potrebbero ritenere *a priori* del tutto indipendenti, ma questo effetto sarà trascurato per semplicità e il caso trattato viene ad essere perciò una specie di caso limite (per sufficiente incoerenza dei moti degli atomi).

Introducendo la funzione

$$\varphi(r) = \int_r^\infty f(r)\, dr$$

che dà l'energia potenziale di due atomi distanti di r, l'uno rispetto all'altro e supponendo di numerare con l'indice l gli atomi stessi in una maniera qualsiasi, viene per l'energia potenziale di un atomo generico l' in un istante qualunque:

$$\psi = \sum_l \varphi(r_{ll'})$$

con la somma estesa a tutti i valori di l (fuorchè l') e dove $r_{ll'}$ rappresenta la distanza (all'istante) fra l'atomo l e l'atomo l'.

La distanza fra i centri di riposo degli atomi l e l' possiamo indicarla con $r_{ll'}^{(o)}$. Sarà allora:

$$r_{ll'} = r_{ll'}^{(o)} + \Delta r_{ll'}$$

indicando con $\Delta r_{ll'}$ la variazione della distanza fra le particelle l e l', e la precedente espressione diventa

$$\psi = \sum_l \varphi\,(r_{ll'}^{(o)} + \Delta r_{ll'}).$$

Siccome nei solidi le variazioni Δr sono piccole (al massimo qualche unità per cento del valore di r) si può sviluppare $\varphi\,(r_{ll'}^{(o)} + \Delta r_{ll'})$ in serie di potenze di $\Delta r_{ll'}$ prendendo i termini fino al 2° ordine. Verrà così:

$$(1) \qquad \psi = \sum_l \left[\varphi\,(r_{ll'}^{(o)}) + \varphi'\,(r_{ll'}^{(o)})\,\Delta r_{ll'} + \frac{1}{2}\varphi''\,(r_{ll'}^{(o)})\,(\Delta r_{ll'})^2 + \cdots\right].$$

Per trovare la media di ψ nelle condizioni dette basterà trovare quella di Δr e $(\Delta r)^2$ e sostituire. Il calcolo, con le ipotesi poste circa la ripartizione delle particelle intorno alle posizioni di riposo non presenta difficoltà. Un caso analogo è stato studiato da me in una precedente Nota [1]; si trattava di determinare le medie $\overline{\Delta r}$ e $\overline{(\Delta r)^2}$ per due atomi qualunque per i quali le medie quadratiche $\overline{\delta^2}$ dell'allontanamento dalla posizione di riposo sono rispettivamente δ_l^2 e $\delta_{l'}^2$. Il resultato è che:

$$\overline{\Delta r_{ll'}} = 0 \qquad \overline{(\Delta r_{ll'})^2} = \frac{1}{3}\,(\overline{\delta_l^2} + \overline{\delta_{l'}^2}).$$

Qui faremo $\delta_{l'} = \text{costante} = \delta$ perchè dobbiamo prendere una media su tutte quelle posizioni dell'atomo nelle quali questo è allontanato di δ dal punto di riposo. Sarà perciò (come si può del resto verificare direttamente):

$$(2) \qquad \overline{\Delta r_{ll'}} = 0 \qquad \overline{(\Delta r_{ll'})^2} = \frac{1}{3}\,(\delta^2 + \overline{\delta_l^2}).$$

Così che viene

$$\psi = \sum_l \left[\varphi\,(r_{ll'}^{(o)}) + \frac{1}{6}\varphi''\,(r_{ll'}^{(o)})\,(\delta^2 + \overline{\delta_l^2})\right]$$

cioè

$$(3) \qquad \psi = \sum_l \varphi\,(r_{ll'}^{(o)}) + \frac{1}{6}\delta^2 \sum_l \varphi''\,(r_{ll'}^{(o)}) + \frac{1}{6}\sum_l \varphi''\,(r_{ll'}^{(o)})\,\overline{\delta_l^2}.$$

L'energia potenziale intrinseca dell'atomo l' è rappresentata dal 2° termine perchè è il solo che dipenda dallo spostamento δ. Eguagliando, come

(1) S. Franchetti, «Rend. Lomb.», vol. LXVI, p. 731, 1933.

si è detto, all'energia potenziale di un oscillatore armonico $2\pi^2\nu^2 m\delta^2$, si ha

$$\frac{1}{6}\sum\varphi''(r^{(0)}) = 2\pi^2\nu^2 m$$

cioè

$$\nu = \frac{1}{2\sqrt{3}\,\pi}\sqrt{\frac{\sum\varphi''(r^{(0)})}{m}} \tag{4}$$

che è la formula cercata.

Si può notare che in una certa misura essa si può ritenere indipendente dalla circostanza che la meccanica da applicare al moto degli atomi nei reticolati, come insegna la teoria dei calori specifici, è la meccanica quantistica e non la meccanica ordinaria. Basterà però ricordarsi che la ν ottenuta non avrà significato di vera frequenza, bensì di un coefficiente tale che $E = \frac{2n+1}{2}h\nu$, o approssimativamente $E = nh\nu$. È quello che si fa, per es., quando si applica la formula di Planck per ottenere l'energia media degli oscillatori.

Su alcune conseguenze deducibili da questa formula ritornerò in seguito. Intanto si può per verifica applicarla alla deduzione della relazione di Madelung–Einstein fra frequenza propria e comprimibilità [1].

Abbiamo la nota relazione termodinamica:

$$p = \left(\frac{\partial L}{\partial V}\right)_S - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial V}\right)_S \tag{5}$$

dove p è la pressione, L e Φ sono rispettivamente l'energia cinetica totale e l'energia potenziale totale delle particelle costituenti il sistema, V è il volume, S l'entropia.

Integrando in un intervallo piccolo ma finito avremo, in una trasformazione adiabatica, indicando con ΔA il lavoro fatto all'esterno

$$\Delta A = \Delta L - \Delta\Phi$$

e sviluppando i due termini del secondo membro in serie di potenze della variazione ΔV del volume (come variabili indipendenti si intendono scelte V e S):

$$\Delta A = \left(\frac{\partial L}{\partial V} - \frac{\partial \Phi}{\partial V}\right)\Delta V + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial V^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial V^2}\right)(\Delta V)^2 + \cdots$$

Ma per la (5), essendo p in condizioni ordinarie trascurabile, il termine di 1° grado in ΔV si annulla, sicchè si ha:

$$\Delta A = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial V^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial V^2}\right)(\Delta V)^2 .$$

(1) V. p. es. EINSTEIN, « Ann. der Phys. », *34*, pp. 170, 590, 1911.

È lecito ritenere per la grande rapidità di variazione delle funzioni $f(r)$ e quindi di $\frac{\partial \Phi}{\partial V}$, che il secondo termine sia preponderante rispetto al primo. Quindi si ha approssimativamente:

$$\Delta A = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial V^2}(\Delta V)^2.$$

Ma si ha anche come è facile verificare (essendo $\varkappa$ la comprimibilità):

$$\Delta A = -\frac{1}{2}\frac{1}{\varkappa V}(\Delta V)^2.$$

Si ottiene quindi

$$\frac{1}{\varkappa V} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial V^2}. \tag{6}$$

In una precedente Nota [1] ho fatto vedere come si possa mettere Φ nella forma

$$\Phi = \frac{N\lambda_1}{2}\varphi(\rho) \tag{7}$$

dove N è il numero degli atomi, λ_1 è il numero di quelli che circondano, alla più piccola distanza, uno qualsiasi di essi e ρ è un parametro dell'ordine di grandezza delle distanze interatomiche (distanze fra i centri di oscillazione) ma un poco maggiore. Da questa relazione si ottiene, nell'ipotesi che ρ dipenda linearmente da V:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial V^2} = \frac{N\lambda_1}{2}\varphi''(\rho)\left(\frac{\partial \rho}{\partial V}\right)^2.$$

Sempre nella Nota citata ha adoperato l'ipotesi che fosse $\frac{\partial \rho}{\partial V} \simeq \frac{\rho}{3V}$. Applicandola anche qui (se ne avrà pertanto una approssimativa verifica) e sostituendo nella (6) si ha infine:

$$\frac{1}{\varkappa} = \frac{N\lambda_1}{2}\varphi''(\rho)\frac{\rho^2}{9V}. \tag{8}$$

Ora si può notare che $\lambda_1 \varphi''(\rho)$ è approssimativamente sostituibile a $\sum \varphi''(r^{(0)})$ che figura nella formula (4). Difatti si può fare l'ipotesi (già utilizzata nella Nota « Rend. Lomb. » ecc. già citata) che $\varphi'''(r)$ sia piccolo nel tratto della curva $\varphi(r)$ relativo alle distanze interatomiche nei solidi, in modo che $\varphi''(r)$ è quasi costante (forze dipendenti quasi linearmente dalle distanze)

(1) S. Franchetti, « Rend. Linc. », giugno 1934.

e quindi $\varphi''(\rho)$ è circa eguale a $\varphi''(r^{(0)})$. Inoltre $\lambda_1 \varphi''(r^{(0)})$ rappresenta la parte preponderante di $\sum \varphi''(r^{(0)})$ (equivale al contributo delle particelle più vicine alla particella generica scelta, nel fare la $\sum \varphi''(r^{(0)})$). I due errori che si fanno nel sostituire $\sum$ con λ_1 e $r^{(0)}$ con ρ sono poi di segno opposto, sicchè si può scrivere, tenendo conto delle (8):

$$\nu^2 = \frac{3}{2\pi^2} N^{-1} m^{-1} V \rho^{-2} \varkappa^{-1}.$$

Ma è anche, abbastanza esattamente: $\rho^2 = V^{\frac{2}{3}} N^{-\frac{2}{3}}$, sicchè viene:

$$\nu^2 = \frac{3}{2\pi^2} N^{\frac{5}{3}} m^{-1} V^{\frac{1}{3}} \varkappa^{-1}$$

che è facile trasformare in:

$$\nu = \frac{N^{\frac{1}{3}}}{\pi} \sqrt{\frac{3}{2}} \delta^{-\frac{1}{6}} M^{-\frac{1}{3}} \varkappa^{-\frac{1}{2}}$$

dove δ è la densità e M il peso atomico.

La relazione così ottenuta coincide formalmente con quella di Madelung–Einstein e non potrebbe essere altrimenti, dato che questa si può dedurre, com'è noto, da considerazioni puramente dimensionali [1]. Però quello che importa è che il valore della costante numerica, nonostante le numerose semplificazioni, è buono. Si ottiene difatti $3.30 \cdot 10^7$ mentre si può, per es., ricavare dai cinque dati sperimentali riportati da Nernst [2] come esempi della legge di Madelung–Einstein il valore medio $3.38 \cdot 10^7$. Un più preciso confronto con l'esperienza sarebbe fuor di luogo se si pensa alle numerose approssimazioni introdotte nel calcolo [3].

(1) V. Einstein, « Ann. d. Phys. », *35*, p. 679, 1911.

(2) Nernst, *Theoretische Chemie*, 11ª a 15ª ediz. tedesca, p. 283.

(3) Fra queste se ne può notare ancora una, che è stata ammessa implicitamente ed è la possibilità di sostituire alla usuale comprimibilità isoterma la comprimibilità adiabatica, qual'è quella che si introduce nella formula (6). È del resto una approssimazione di poca importanza data la piccola dipendenza che si ha nei solidi fra comprimibilità e temperatura.

Chimica. — *I solfati doppi delle terre rare e dei metalli alcalini: Solfati di praseodimio e potassio. – Solfati di praseodimio e rubidio. - Solfati di praseodimio e cesio. – Solfati di samario e sodio* [1]. Nota [2] di SILVIA RESTAINO, presentata dal Corrisp. F. GIORDANI.

Per terminare lo studio dei solfati doppi dei metalli alcalini e delle terre rare, il compianto prof. Ferruccio Zambonini, volle affidarmi una analoga ricerca sui solfati doppi del praseodimio e dei metalli alcalini, nonchè del samario e detti metalli; ciò per poter completare lo studio delle terre del gruppo del Cerio ed avere così un quadro generale delle proprietà di tali composti.

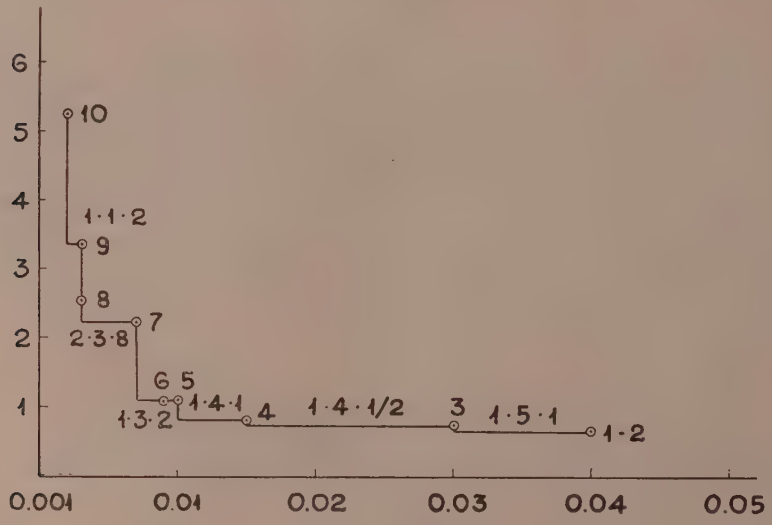


FIG. 1

Il destino volle che egli non potesse, purtroppo, esaminare i risultati delle mie ricerche e considerarli insieme con gli altri per trarne le deduzioni di carattere generale, ch'egli si riprometteva. Nondimeno, sembrandomi

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Napoli.
(2) Pervenuta all'Accademia il 12 luglio 1934.

che i risultati non siano privi di interesse, e che essi meritino di essere aggiunti alla serie di quelli precedentemente pubblicati, ho creduto opportuno raccoglierli nella presente Nota.

Solfati di praseodimio e potassio. – Le mie esperienze sono state eseguite, come al solito, per l'isoterma di 25°, attenendomi alle stesse condizioni sperimentali e seguendo gli stessi metodi analitici, già usati per gli altri sistemi. I risultati ottenuti sono riuniti nella seguente:

TABELLA I.

N. esper.	Composizione della fase liquida				Composizione del corpo di fondo					Costituenti del corpo di fondo
	$Pr_2(SO_4)_3$	K_2SO_4	H_2O	$\frac{K_2SO_4}{H_2O}$	Pr	SO_4	H_2O	K	$Pr_2(SO_4)_3$	
1	—	4.07	95.93	0.04	19.20	53.08	1.19	26.53	0.64	1 – 5 – 1
2	—	4.01	95.99	0.04	19.22	83.07	1.20	26.51	0.64	
3	—	3.20	96.80	0.03	20.89	53.25	0.09	25.77	0.73	$1 - 4\,^1/_2$
4	0.16	1.47	98.37	0.015	22.15	52.51	1.40	23.94	0.83	1 – 4 – 1
5	0.18	1.03	98.79	0.01	24.87	51.21	3.15	20.77	1.08	1 – 3 – 2
6	0.32	0.88	98.80	0.009	25.01	51.28	3.30	20.41	1.08	
7	0.40	0.67	98.93	0.007	31.28	47.75	8.07	12.90	2.21	2 – 3 – 8
8	0.52	0.34	99.14	0.003	33.33	48.80	6.61	11.26	2.53	—
9	1.87	0.27	97.86	0.003	36.00	48.94	5.13	9.93	3.31	1 – 1 – 2
10	2.63	0.19	97.18	0.002	36.87	45.56	11.29	6.28	5.23	—

Composizione teorica dei composti ottenuti:

	Pr	SO_4	H_2O	K
$Pr_2(SO_4)_3 \cdot 5K_2SO_4 - H_2O$ . .	19.18	53.00	1.22	26.60
$Pr_2(SO_4)_3 \cdot 4\,^1/_2\,K_2SO_4$	20.81	53.21	—	25.98
$Pr_2(SO_4)_3 \cdot 4K_2SO_4 - H_2O$ . .	21.93	52.33	1.40	25.34
$Pr_2(SO_4)_3 \cdot 3K_2SO_4 - 2H_2O$ . .	24.96	51.07	3.19	20.78
$2Pr_2(SO_4)_3 \cdot 3K_2SO_4 - 8H_2O$.	31.19	47.85	7.97	12.99
$Pr_2(SO_4)_3 \cdot K_2SO_4 - 2H_2O$ . .	36.11	49.25	4.61	10.03

Con i dati della tabella I ho costruito il diagramma (fig. 1), ponendo sull'asse delle ascisse i valori del rapporto $\frac{K_2SO_4}{H_2O}$, sull'asse delle ordinate i valori del rapporto dei due solfati $\frac{Pr_2(SO_4)_3}{K_2SO_4}$.

Dalla tabella, come dalla rappresentazione grafica, risulta che nelle mie condizioni sperimentali, si formano sei composti, i quali si sono trovati anche nello studio dei sistemi del cerio, lantanio e neodimio col potassio.

Solfato di praseodimio e rubidio. – I risultati sperimentali di questo sistema sono riuniti nella tabella II.

TABELLA II.

N. esper.	Composizione della fase liquida				Composizione del corpo di fondo					Costituenti del corpo di fondo
	$Pr_2(SO_4)_3$	Rb_2SO_4	H_2O	$\frac{Rb_2SO_4}{H_2O}$	Pr	SO_4	H_2O	Rb	$\frac{Pr_2(SO_4)_3}{Rb_2SO_4}$	
1	—	20.84	74.16	0.26	26.55	40.48	11.31	21.66	1.44	—
2	—	19.43	80.57	0.24	28 67	39.26	14.77	17.30	2.10	
3	—	17.59	82.41	0.21	28.69	39.22	14.90	17.19	2.11	
4	—	15.22	84.78	0.18	28.66	39.16	14.39	17.79	2.11	$1-1-8H_2O$
5	0.06	6.72	93.22	0.07	28.92	39.38	14.20	17.50	2.14	
6	1.08	0.38	98.54	0.004	29.44	40.13	11.40	19.03	2.14	—
7	1.28	0.41	98.31	0.004	29.53	40.07	11.55	18.85	2.18	—
8	1.98	0.38	97.64	0.004	30.15	40.28	10.74	18.83	2.32	—
9	3.67	0.33	96.00	0.0034	30.21	40.21	15.29	14.29	2.36	—
10	4.82	0.30	94.88	0.0032	32.73	41.06	12.45	13.76	3.14	—

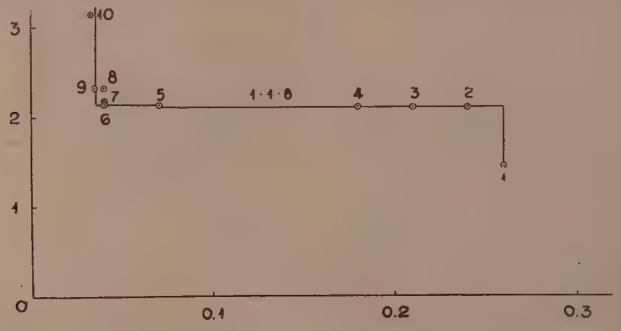


FIG. 2

Composizione teorica del composto ottenuto:

	Pr	SO_4	H_2O	Rb
$Pr_2(SO_4)_3 \cdot Rb_2SO_4 - 8H_2O$	28.72	39.16	14.69	17.43

Nella figura 2 sono rappresentati i risultati della tabella II: sulle ordinate sono riportati i rapporti $\frac{Pr_2(SO_4)_3}{Rb_2SO_4}$, determinati nel corpo di fondo, e sulle ascisse i rapporti $\frac{Rb_2SO_4}{H_2O}$ della fase liquida. Come si vede, nelle mie condizioni sperimentali, si forma un sol composto:

$$Pr_2(SO_4)_3 \cdot Rb_2SO_4 - 8H_2O ,$$

ottenuto in varie beute ed anche per lenta cristallizzazione di soluzioni miste dei due solfati.

Lo stesso composto fu trovato anche nello studio del sistema

$$Ce_2(SO_4)_3 \cdot Cs_2SO_4 - H_2O ,$$

e ottenuto per cristallizzazione nel sistema: $Ce_2(SO_4)_3 \cdot Rb_2SO_4 - H_2O$.

Solfati di praseodimio e cesio. – Per completare le ricerche sui solfati doppi del praseodimio e dei metalli alcalini, riferisco anche sullo studio del sistema $Pr_2(SO_4)_3 - Cs_2SO_4 - H_2O$, i cui risultati sono raccolti nella:

TABELLA III.

N. esper.	Composizione della fase liquida				Composizione del corpo di fondo					Costituenti del corpo di fondo
	$Pr_2(SO_4)_3$	Cs_2SO_4	H_2O	$\frac{Cs_2SO_4}{H_2O}$	Pr	SO_4	H_2O	Cs	$Pr_2(SO_4)_3$	
1	—	41.62	58.38	0.71	24.22	34.73	13.25	27.80	1.30	—
2	—	20.15	79.85	0.25	26.10	35.45	13.38	25.07	1.60	
3	—	16.06	83.94	0.19	26.18	35.58	13.31	24.93	1.60	
4	—	7.21	92.79	0.077	26.24	35.68	13.49	24.59	1.59	
5	0.47	1.92	97.61	0.019	26.10	35.56	13.50	24.84	1.58	$1-1-8H_2O$
6	3.70	0.45	95.85	0.004	26.29	35.77	13.61	24.33	1.59	
7	6.10	0.40	93.50	0.004	26.20	35.57	13.68	24.55	1.60	
8	7.00	0.35	92.65	0.003	26.20	35.65	13.45	24.70	1.59	
9	8.16	0.31	91.53	0.003	30.19	37.23	15.02	17.56	2.55	—
10	8.21	0.33	91.46	0.003	33.65	38.40	16.16	11,79	4.53	—
11	8.39	0.15	91.46	0.001	34.81	39.45	16.14	9.60	4.86	—

Composizione teorica del composto ottenuto:

	Pr	SO_4	H_2O	Cs
$Pr_2(SO_4)_3 - Cs_2SO_4 - 8H_2O$	26.20	35.72	13.40	24.68

Nella fig. 3 sono riportati, come al solito, i rapporti $\frac{Pr_2(SO_4)_3}{Cs_2SO_4}$ e $\frac{Cs_2SO_4}{H_2O}$ rispettivamente sugli assi delle ordinate e delle ascisse.

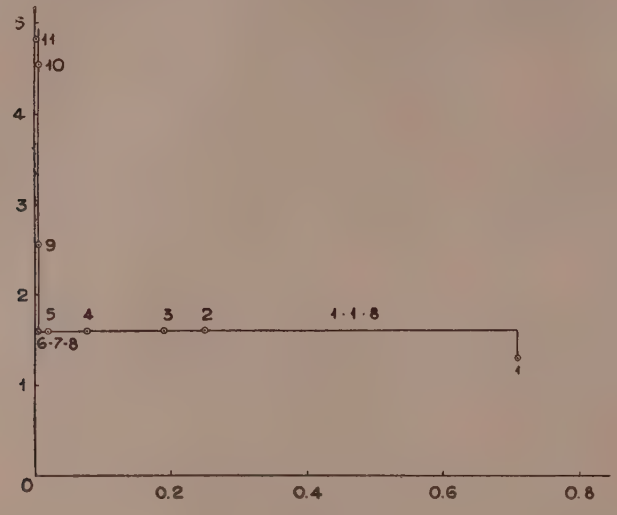


FIG. 3

Come risulta dal grafico e dai risultati analitici, nel mio sistema ritrovo un sol composto rispondente alla formula:

$$Pr_2(SO_4)_3 - Cs_2SO_4 - 8H_2O \quad \text{od} \quad 1 - 1 - 8\,,$$

esso è stato trovato anche nel sistema

$$Ce_2(SO_4)_3 - Cs_2SO_4 - H_2O\ ^{(1)}.$$

Il composto suddetto fu ottenuto in varie beute, dimostrando così di avere un vasto campo di esistenza; fu ottenuto inoltre per lenta cristallizzazione da una soluzione dei due solfati, sotto forma di bei cristalli.

Solfati di samario e sodio. – Terminato così lo studio dei solfati doppi del praseodimio e dei metalli alcalini, ho intrapreso a studiare il solfato di samario ed i composti, che esso forma con i metalli alcalini ed in particolare col solfato sodico.

Il Clève [2] nel 1883 ottenne il solfato di samario ottoidrato, sotto forma di bei cristalli, bene sviluppati, evaporando a bagno maria una soluzione

(1) Cfr. Zambonini e Restaino, «Rend. Acc. dei Lincei», genn. 1929, VII, p. 132.
(2) Clève, «Trans. Chem. Soc.», 1883, *43*, 362.

acquosa del nitrato e di acido solforico, e constatò che la sua solubilità era inferiore a quella del solfato di neodimio.

Più tardi, nel 1900, il Fock [1] preparò lo stesso sale, sotto forma di bei cristalli monoclini, di colore giallo topazio, cristallizzandoli da una soluzione ottenuta sciogliendo l'ossido di samario in acido solforico. Esso è isomorfo con i corrispondenti solfati di neodimio, praseodimio, erbio ed ittrio.

Il solfato di samario è pure facilmente idrolizzabile, ma tale carattere non poteva disturbare le mie ricerche, giacchè ho adoperato soluzioni sature e quindi lontane dal limite di idrolisi.

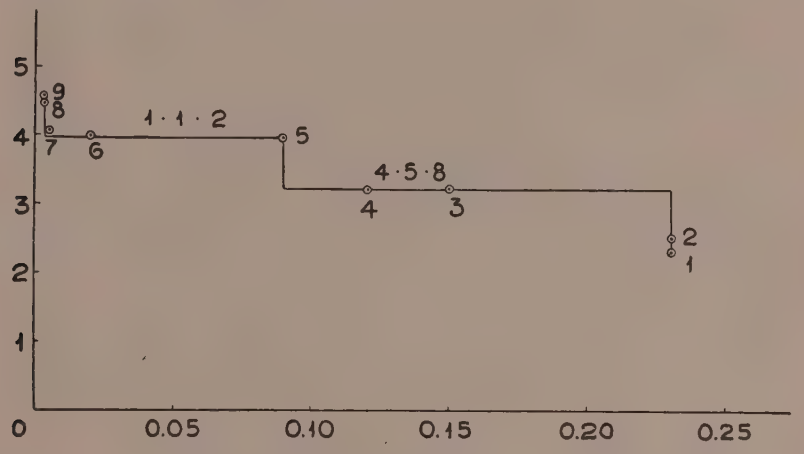


FIG. 4

Brauner e Piceck [2] e poi anche Matignon [3] ottennero un solfato acido $SmH_3(SO_4)_3$, in aghi giallo oro, evaporando una soluzione del solfato normale in acido solforico concentrato a 200°; riscaldando invece il solfato normale anidro a 700° si ottiene un solfato basico; Brill [4] attribuì la formula $Sm_2O_3SO_3$, a questo composto, il quale a 1100° si trasforma completamente nell'ossido; si presenta sotto forma di una polvere gialla insolubile in acqua ed in acido solforico.

Cleve, mescolando delle soluzioni di solfato di samario e solfato potassico ottenne per cristallizzazione il composto $2Sm_2(SO_4)_3 - 9K_2SO_4 - 3H_2O$ sotto forma di polvere bianca molto poco solubile in una soluzione di solfato potassico.

(1) Fock, « Zeit. f. Krystal. », 1900, *32*, 250.
(2) Brauner-Piceck, « Zeit. f. anorg. Chem. », 1904, *38*, 322.
(3) Matignon, « Compt. Rend. », 1905, *141*, 1238.
(4) Brill, « Zeit. f. anorg. Chem. », 1905, *47*, 464.

Per tale composto ottenne i seguenti risultati:

	Calc.	Trov.
Sm_2O_3	24.87	25.17
K_2O	30.31	31.00
H_2O	1.93	1.96

Lo stesso Cleve, studiò anche il solfato doppio con l'ammonio:

$$Sm_2(SO_4)_3 - (NH_4)_2 - SO_4 - 8H_2O\,,$$

ottenuto cristallizzando soluzioni miste dei due solfati, in presenza di un eccesso di solfato di ammonio: esso si presenta sotto forma di piccoli cristalli tabulari. Allo stesso autore è dovuta la formazione di un composto del samario e sodio, cui egli attribuì la formula:

$$Sm_2(SO_4)_3 - Na_2SO_4 - 2H_2O\,.$$

Keyes e James [1], con esperienze che non sono molto convincenti: sostengono che a 25° nel sistema solfato di samario, solfato sodico, acqua, si abbia un solo composto: 2 — 3 — 6; mentre che al solfato doppio con ammonio, attribuiscono la formula 1 — 1 — 7, invece di quella 1 — 1 — 8, determinata da Cleve.

Nelle mie esperienze, eseguendo sistematicamente l'analisi della fase liquida e del corpo di fondo, ho ottenuto i risultati raccolti nella seguente:

Tabella IV.

N. esper	Composizione della fase liquida				Composizione del corpo di fondo					Costituenti del corpo di fondo
	$Sm_2(SO_4)_3$	Na_2SO_4	H_2O	$\frac{Na_2SO_4}{H_2O}$	Sm	SO_4	H_2O	Na	$\frac{Sm_2(SO_2)_3}{Na_2SO_4}$	
1	—	18.68	81.32	0.23	34.16	52.35	4.84	8.65	2.30	—
2	—	18.51	81.49	0.23	35.34	52.31	4.89	7.46	2.53	—
3	—	12.95	87.05	0.15	37.44	51.21	4.55	6.80	3.23	4 - 5 - $8H_2O$
4	—	10.65	89.35	0.12	37.31	51.03	4.74	6.92	3.23	
5	—	8.40	91.60	0.09	38.90	50.26	4.81	6.03	3.96	
6	—	2.08	97.92	0.02	39.00	50.30	5.16	5.54	3.99	1 - 1 - $2H_2O$
7	0.26	0.50	99.24	0.005	39.26	50.38	4.69	5.67	4.07	
8	1.39	0.29	98.32	0.003	40.14	50.32	4.27	5.27	4.47	—
9	1.41	0.28	98.31	0.003	40.71	50.80	3.96	4.53	4.56	—

(1) Keyes e James, « J. Am. Chem. Soc. », 1914, *36*, 634.

Composizione dei composti ottenuti:

	Sm	SO_4	H_2O	Na
$Sm_2(SO_4)_3 \cdot Na_2SO_4 \cdot 2H_2O$.	39.21	50.09	4.70	6.00
$4Sm_2(SO_4)_3 \cdot 5Na_2SO_4 \cdot 8H_2O$	37.48	50.87	4.49	7.16

Con i rapporti $\frac{Sm_2(SO_4)_3}{Na_2SO_4}$ e $\frac{Na_2SO_4}{H_2O}$ ho costruito il solito diagramma (fig. 4), da cui si può rilevare la esistenza dei due composti:

$Sm_2(SO_4)_3 \cdot Na_2SO_4 \cdot 2H_2O$ e $4Sm_2(SO_4)_3 \cdot 5Na_2SO_4 \cdot 8H_2O$.

Detti composti sono stati ritrovati anche nello studio dei sistemi:

$Ce_2(SO_4)_3 \cdot Na_2SO_4 \cdot H_2O$ e $Pr_2(SO_4)_3 \cdot Na_2SO_4 \cdot H_2O$.

Tabella V.

Con.	Solfati doppi del				
	Ce	La	Pr	Nd	Sm
K_2SO_4	1 — 5	1 — 5 — 2	1 — 5 — 1	1 — 5 — 2	—
	1 — 4 1/2	1 — 4 1/2 — 2	1 — 4 1/2	1 — 4 — 2	—
	2 — 3 — 8	1 — 4 — 1	1 — 4 — 1	1 — 4 — 1	—
	1 — 1 — 2	1 — 3	1 — 3 — 2	1 — 3 — 2	—
	—	2 — 3 — 8	2 — 3 — 8	2 — 3 — 8	—
	—	1 — 1 — 2	1 — 1 — 2	1 — 1 — 2	—
Tl_2SO_4	1 — 4 1/2	1 — 4 1/2	1 — 5	1 — 4 1/2	—
	1 — 3 — (1?)	1 — 3	1 — 4 1/2	1 — 1 — 3	—
	1 — 1 — 4	1 — 1 — 2	1 — 3 — 1	1 — 1 — 8	—
	—	—	1 — 1 — 4	—	—
$(NH_4)_2SO_4$ . .	1 — 1 — 8	1 — 6	1 — 1 — 8	1 — 1 — 8	—
	1 — 5	1 — 5	1 — 5	—	—
	—	1 — 3	—	—	—
	—	1 — 1 — 2	—	—	—
Na_2SO_4 . . .	1 — 1 — 2	1 — 1 — 2	1 — 1 — 2	1 — 1 — 2	1 — 1 — 2
	4 — 5 — 8	—	4 — 5 — 8	4 — 5 — 8	4 — 5 — 8
	—	—	—	3 — 4 — 6	—
	—	—	—	2 — 3 — 5	—
Rb_2SO_4	1 — 1 — 2	—	1 — 1 — 8	1 — 1 — 8	—
	1 — 1 — 8	—	—	—	—
	1 — 1	—	—	—	—
Cs_2SO_4 . . .	1 — 1 — 8	—	1 — 1 — 8	—	—

Credo adesso opportuno di unire in un'unica tabella (V), tutti i risultati delle ricerche sui solfati doppi delle terre rare del gruppo del Cerio e dei metalli alcalini, eseguite dal compianto prof. Ferruccio Zambonini e collaboratori, così da avere un quadro completo di tutti i composti che si formano a 25°.

Questa tabella può essere utilmente paragonata con quella riportata nel primo lavoro di questa serie [1], e serve a mostrare come si è venuto ad arricchire – pur rimanendo in condizioni fisiche ristrette – la serie dei solfati doppi conosciuti.

Mi propongo di estendere le indagini anche a temperature più elevate.

Geologia. — *Alcune osservazioni sulle analogie esistenti fra i terreni terziari dell'Albania e quelli dell'Italia centrale.* Nota [1] di P. Principi, presentata dal Corrisp. G. Rovereto.

Nell'Albania i terreni del Terziario sono particolarmente sviluppati nella zona collinosa estendentesi fra il mare ed i rilievi calcarei del Mesozoico ed assumono la facies di *flysch*, che appare molto spiccata sopratutto nella parte inferiore della serie, costituita da un'alternanza di arenarie scure, di argilloscisti e di calcari nummulitici.

Alla base del *flysch* di Scutari ai piedi del Tarabos [2] è stata riscontrata una fauna (fauna di Muric) con *Nummulites Lucasi* D'Arch., *N. laevigatus* Brgt. sp., *N. globulus* Leym., *Assilina granulosa*, *A. Leymeriei*, *Operculina canalifera*, *O. Hardiei*, la quale indica un'età non più antica del Luteziano inferiore.

Immediatamente al di sotto dei conglomerati, coi quali si inizia in molte località il *flysch* oligocenico, esiste un'altra fauna (fauna di Busati), che comprende *Nummulites Fabiani* Prever e *N. striatus* Bgrt. sp., forme che attestano la presenza dell'Eocene medio-superiore.

La parte mediana del *flysch* albanese risulta essenzialmente di conglomerati, arenarie grossolane e calcari arenacei, i quali hanno offerto una fauna caratterizzata dalla presenza di Nummuliti e di Lepidocicline. Nella regione di Tirana è stata segnalata la presenza del *Nummulites* cfr. *intermedius*; nella Malakastra *Lepidocyclina Tournoueri* Lem.; nella valle dello Skumbi *Lepidocyclina* sp. e nella valle della Sushica *Lepidocyclina Tournoueri* e *Amphistegina* sp. [3].

(1) « Rend. R. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XXXIII, pp. 301-8, 1924.

(1) Pervenuta all'Accademia il 17 settembre 1934.

(2) De Cizancourt, *Sur la stratigraphie de la Faune nummulitique du flysch de l'Albanie.* « Bull. Soc. Géol. de France », XXX, fasc. 3-4, Paris, 1930.

(3) A. Liebus, *Die Tertiärformation in Albanien. Die Foraminiferen.* « Palaeontographica », LXX, 1928; P. Rozlozsnik, *Studien über Nummulinen.* « Geologica Hungarica », fasc. 2, Budapest 1 .

Queste forme stanno a dimostrare come i conglomerati della parte mediana del *flysch*, tanto nella regione di Tirana che in quella dello Skumbi e nella Malakastra, hanno un'età posteocenica, mentre nel territorio di Valona discenderebbero sino all'Eocene medio per la presenza del *Nummulites perforatus*, riscontrato nei calcari della cava di Mavrova [1],

M.me De Cizancourt nella località di Belovoda lungo il margine meridionale della pianura di Koriza ha posto in evidenza delle arenarie con *Nummulites intermedius* (forme A e B), che in alcuni altri punti viene sostituito da Lepidocicline (*Lepidocyclina elephantina* Mun. Ch.), associate ad Operculine; esse evidentemente spettano all'Oligocene inferiore-medio (Lattorfiano–Rupeliano).

In un mio recente viaggio in Albania io ebbi occasione di percorrere sopratutto le regioni di Tirana, dello Skumbi e di Valona e le osservazioni, che potei eseguire nella serie dei terreni terziari, vengono a completare i dati già conosciuti in seguito agli studi del Martelli, del Nowack e di M.me De Cizancourt.

A SE di Kruja presso Briska Vogele alcuni straterelli di calcari arenacei intercalati fra argilloscisti grigi, i quali si trovano al di sopra delle arenarie grossolane con *Nummulites intermedius*, contengono una fauna a Foraminifere appartenenti alle seguenti specie:

Nummulites cfr. *vascus* J. e L.
Nummulites sp.
Lepidocyclina Tournoueri L. e D.
Lepidocyclina elephantina M. C.
Operculina complanata Defr.

Esse denotano la presenza dell'Oligocene medio-superiore, mentre altre rocce calcareo-arenacee, che riposano sopra gli strati a *Cardita crassicostata* e che già appartengono al *flysch* miocenico, sono costituite essenzialmente da un impasto di gusci di Lepidocicline spesso di grandi dimensioni, associati a qualche resto di *Miogypsina* e *Heterostegina*, ma senza alcuna traccia di Nummuliti. Siamo, quindi, in presenza del Miocene, verosimilmente della sua parte più bassa.

Nella valle dello Skumbi tra Gruksi e Papri sono frequenti delle arenarie in grossi banchi, che includono sottili straterelli di calcari con

Lepidocyclina Tournoueri L. e D.
Lepidocyclina Raulini L. e D.
Nummulites sp.:

(1) E. Nowack, *Beiträge zur Geologie von Albanien. V, Das Hinterland von Valona.* «Neues Jahrb. f. Miner., Pal. und Geol.», Stuttgart, 1926.

a questi strati riferibili all'Oligocene succede verso l'alto un'alternanza di arenarie, scisti argillosi e marne arenacee grigio-giallastre, includenti forme di *Amphistegina* (*A.* cfr. *Haueri* D'orb.), di *Miogypsina* (*M.* cfr. *irregularis* Mich.) e di *Operculina* (*O. complanata*), la quale sta a rappresentare il *flysch* superiore miocenico.

Nella Malakastra a NE di Valona tra Pahtosa e Ndrenova, entro la valle della Janica, affluente del fiume Semeni, degli straterelli arenaceo–calcarei compresi entro scisti argillosi bruno–azzurrastri, che riposano sopra banchi conglomeratici, contengono una fauna con Lepidocicline (*Lepidocyclina Tournoueri*) e piccole Nummuliti (*Nummulites* cfr. *Bouillei* De la H.) dell'Oligocene medio–superiore, mentre più in alto, sempre entro la stessa valle, delle marne alquanto scistose, alternanti con arenarie grossolane, mostrano frequenti resti di

Lepidocyclina dilatata Michel.
Lepidocyclina Raulini L. e D.
Miogypsina cfr. *complanata* Schl.
Amphistegina sp.,

l'insieme delle quali forme attesta la presenza del Miocene inferiore.

Nei dintorni di Valona si può, inoltre, constatare agevolmente il passaggio dagli scisti argillosi e arenacei con intercalazioni di calcari compatti del Miocene inferiore ad una serie di marne, di arenarie friabili, di scisti grigi, di calcari compatti a *Lithothamnium* e di calcari sabbiosi con

Corbula carinata Duj.
Pectunculus bimaculatus Poli,
Pecten Malvinae Dub.
Pecten scabrellus Lmk.

La serie suddetta è riferibile all'Elveziano, come lo dimostrano anche i numerosi fossili descritti da Martelli e Nelli nel Miocene medio del Castello di Kanina e delle colline di Mesuvon e di Koci a Sud di Valona [1].

A Nord di Valona entro la valle della Janica è ben individuabile anche il Tortoniano costituito da marne argillose grigio–azzurrastre o giallicce con *Pleurotoma*.

È interessante rilevare le strette corrispondenze faunistiche, che esistono fra la serie del Terziario inferiore e medio dell'Italia centrale e quella del *flysch* albanese. In ambedue queste regioni l'Eocene è caratterizzato dalla

(1) A. Martelli e B. Nelli, *Il Miocene medio e superiore di Valona in Albania*. «Boll. Soc. Geol. Ital.», XXIX, Roma, 1910.

presenza di Nummuliti; solo nell'Oligocene alle Nummuliti si associano le Lepidocicline, le quali, poi, unite a forme di *Amphistegina*, di *Miogypsina* e di *Operculina* perdurano sino al Miocene medio. Anche quest'ultimo periodo e sopratutto il Tortoniano, colla sua *facies* predominante di argille azzurre a *Pleurotoma*, palesa evidenti analogie con quello di alcune regioni appenniniche, specialmente del Bolognese e delle Marche.

La fauna eocenica di Muric offre alcuni elementi in comune con quelli determinati nel bacino di Rieti e nei monti Sabini meridionali, mentre le faune oligoceniche di Belovoda, di Kruja, dello Skumbi e della Janica appariscono strettamente affini a quelle delle arenarie dei monti ad Ovest di Perugia, dell'Alpe di Poti, dell'Alpe di Catenaia, della catena del Falterona e del Cimone e della parte superiore della scaglia cinerea dell'Umbria meridionale, del Lazio e dell'Abruzzo settentrionale, riscontrandosi in quasi tutte la *Lepidocyclina Tournoueri* associata a Nummuliti del tipo del *Nummulites vascus*. Infine la fauna miocenica della valle della Janica comprende specie perfettamente identiche alle forme esistenti nel Miocene inferiore e medio dell'Appennino centrale.

Riassumiamo nel quadro seguente le caratteristiche del Terziario inferiore e medio delle regioni considerate:

	Italia centrale		Albania
	Serie in giacitura normale	Serie scivolata per effetto di pieghe rovesciate o in giacitura diapirica (1)	
Eocene . . .	scaglia rosata (in parte) e scaglia cinerea con lenti o strati di calcari con Nummuliti, Ortofragmine, Assiline ecc.	argillose scagliose con banchi di calcare marnoso a fucoidi	*flysch* inferiore; scisti rossi e arenarie con intercalazioni di calcari contenenti Nummuliti, Ortofragmine, Assiline ecc.
Oligocene . .	scaglia cinerea includente strati o lenti di calcare con Nummuliti (*Nummulites vascus*, *N. budensis*, *N. complanatus*) e Lepidocicline (*Lepidocyclina Tournoueri*, *L. dilatata* ecc.	argille scagliose; arenarie con lenti calcaree contenenti una fauna costituita da *Nummulites Boucheri*, *N. budensis*, *N. vascus*, *Lepidocyclina dilatata*, *L. sumatrensis*, *L. Tournoueri L. Raulini* ecc.	*flysch* medio; conglomerati, arenarie, scisti e calcari con Nummuliti (*Nummulites* cfr. *vascus*, *N. intermedius*) e Lepidocicline (*Lepidocyclina Tournoueri*, *L. Raulini* ecc.
Miocene inferiore . . .	formazione marnoso-calcarea o marnoso-arenacea con *Lepidocyclina dilatata*, *L. marginata*, *Miogypsina irregularis*, *M. burdigalensis*, *M. complanata*, *Amphistegina Niasi*, *Operculina complanata* ecc.	—	*flysch* superiore; marne, argille, scisti argillosi arenarie con *Lepidocyclina dilatata*, *L. Raulini*, *Miogypsina complanata*, *M.* cfr. *irregularis*, *Operculina complanata* ecc.
Elveziano . .	calcari arenacei o conglomeratici con *Pecten* (*Pecten Malvinae*), *Ostrea*, Briozoi e *Lithothamnium*	—	alternanza di marne arenacee, di calcari compatti a *Lithothamnium* e di calcari sabbiosi con *Pecten* (*P. Malvinae*) ecc.
Tortoniano .	arenarie con intercalazioni di marnoscisti; marne argillose con *Pleurotoma*	—	marne argillose grigio-azzurre o giallastre con *Pleurotoma*

(1) A questa serie riferisco il *flysch* calcareo-argilloso, che, secondo le mia ipotesi, rappresenta una *facies* particolare della scaglia rosata e della scaglia cinerea e le arenarie con calcari a Nummuliti e Lepidocicline, anch'esse eteropiche alla parte superiore della scaglia cinerea, le quali, per effetto di una piega rovesciata, si trovano al di sopra della formazione marnoso-arenacea del Miocene inferiore. Vedi P. Principi, *Intorno all'età della scaglia cinerea dell'Appennino centrale.* «Rend. R. Accad. Lincei», 1933.

Mineralogia (Petrografia). — *Contributo alla conoscenza petrografica della Sardegna. Un caratteristico filone kersantitico a «facies» prasinitica del Sarrabus.* Nota II [1] di A. Cavinato, presentata dal Socio G. Boeris.

Tra le numerosissime rocce che ho raccolto durante il rilievo geologico del Sarrabus–Gerrei, ormai condotto a buon punto, vi è un caratteristico filone kersantitico a *facies* francamente prasinitica (*prasinite cloritica* – ovardite) del quale mi occupo in questa Nota, perchè tipo interamente nuovo per la Sardegna, e perchè non privo di interesse, data la natura, la sua giacitura filoniana là dove non si trovano rocce dinamometamorfiche perchè mancano le necessarie dislocazioni.

Trovasi a metà della strada tra San Geremeas e Villasimius, nella zona centrale del grande batolite granitico sud–orientale dell'isola, e costituisce un piccolo filone, di pressochè costante spessore (cm. 30–35), di quasi costante direzione Nord–Sud (come gli altri numerosissimi filoni, una quarantina, di lamprofiri della famiglia delle spessartiti che si incontrano percorrendo la stessa strada) imprigionato, quale lastra, verticalmente (come i lamprofiri) entro al granito che ha le solite varie *facies* acide e basiche, e le solite varietà di grana dalla grossa alla minuta.

La roccia ha un colore verdolino con bei riflessi setacei; è dura compatta, fresca; la tessitura nettamente scistosa, con i piani di scistosità paralleli alle superfici di salbanda, è alquando ghiandolare o microghiandolare od occellare per la forma granulare, oblunga, lenticolare degli elementi di feldspato cui si alternano straterelli, solo leggermente sinuosi, di clorite; la struttura è granoblastica, poco porfiroide. Componenti essenziali sono: albite, albite oligoclasica e clorite; accessori: quarzo, ortoclasio, rutilo, titanite, zircone, ilmenite, magnetite; secondari: muscovite, talco, ossidi di ferro in parte limonitizzati, zoisite.

I granuli di plagioclasio che hanno composizione variabile e compresa tra la albite e l'albite oligoclasica sono freschi e ben conservati. Hanno forma granulare o lenticolare, a contorni irregolarissimi, generalmente non geminati, solo qualche elemento risultando geminato di due individui secondo la legge dell'albite. Sono tutti punteggiati di cristallini di muscovite, probabilmente di neo formazione, orientati costantemente secondo le due direzioni seguenti: le basi delle lamelline sarebbero coincidenti coi piani di

(1) Pervenuta all'Accademia il 10 settembre 1934.

sfaldatura (010) (001). Si trova anche qualche piccolo granulo incluso di zoisite.

La *clorite* proviene dalla trasformazione della biotite: essa è in cristalli della stessa dimensione, forma e orientazione della primitiva biotite da cui è derivata, ha bassa birifrangenza, è uniassica, con carattere ottico negativo, pleocroismo secondo lo schema = verde oliva; incoloro o giallo chiaro: trattasi evidentemente di *pennina*. Nessuna particolarità degna di nota è nei minerali accessori e secondari che compaiono nella roccia.

L'analisi chimica ha dato i seguenti risultati:

$SiO_2 = 53.90$ $TiO_2 = 1.06$ $Al_2O_3 = 10.21$ $Fe_2O_3 = 9.00$ $FeO = 7.76$
$MnO = —$ $CaO = 1.59$ $MgO = 7.18$ $K_2O = 1.00$ $Na_2O = 4.40$
$H_2O = 4.90$ Totale = 101.00

Per meglio chiarire i raffronti e le considerazioni che seguono riporto la analisi chimica di una spessartite pochissimo discosta dal filone in parola: analisi chimica da me eseguita, che è, purtroppo, l'unica analisi che sin ora sia stata fatta sulle interessanti rocce diabasiche filoniane della Sardegna.

$SiO_2 = 49.85$ $TiO_2 = 0.75$ $Al_2O_3 = 13.32$ $Fe_2O_3 = 6.11$ $FeO = 5.59$
$MnO = —$ $CaO = 6.23$ $MgO = 6.07$ $K_2O = 3.26$ $Na_2O = 3.19$
$H_2O = 4.99$ Totale = 99.39 .

Considerazioni sulla natura del metamorfismo. – La composizione chimica della roccia prasinitica è nettamente diversa da quella della spessartite, specie per quanto riguarda il tenore in Al, Fe, Ca; ma anche la composizione mineralogica, ora così nettamente diversa da quella delle stesse spessartiti doveva pure esserlo ancor prima del metamorfismo. Infatti le spessartiti di Sardegna sono generalmente di tipo diabasico mentre la roccia prasinitica deriva da metamorfismo di un tipo kersantitico. Così si spiega bene la presenza della clorite proveniente da biotite, la presenza di un plagioclasio acido fondamentale e dell'ortoclasio accessorio. Il basso contenuto in Ca e la notevole ricchezza in Mg e sopratutto in Fe si spiegherebbe ricordando che è un fatto generale ben accertato (vedi Artini, Friedel...) l'impoverimento in Ca e l'arricchimento in Mg ed Fe da parte di rocce durante l'azione metamorfizzante. E pertanto essa rappresenta, anche da un punto di vista chimico, una differenziazione magmatica nettamente distinta da quelle sin ora note per l'Isola, che ripete la sua origine da una fase a sè, sia pure sporadica, dei fatti vulcanici paleozoici dell'Isola, già da me distinti e classificati in altri lavori. Rappresenta poi un tipo singolare per il suo attuale carattere metamorfico.

È opinione corrente che le prasiniti derivino da metamorfismo di rocce eruttive basiche (gabbri, diabasi) od anche, in minor proporzione da dioriti, per metamorfismo « al quale certo hanno contribuito energiche dislocazioni » « ma che non può essere ritenuto di pura natura meccanica ». « Le deformazioni meccaniche non sono state in molti casi che gli acceleratori di processi trasformativi cui l'acqua e una temperatura relativamente alta debbono necessariamente aver collaborato » (Artini, *Rocce*, p. 697). Nel nostro caso non possiamo però ammettere che abbiano concorso energiche dislocazioni poichè queste mancano nella regione in esame: ed anche a volerle invocare come ipotesi di comodo, si urterebbe in una obiezione di valore decisivo: perchè queste energiche dislocazioni avrebbero agito solamente su questo filone e non sugli altri quaranta della stessa età che gli sono vicini, non sul granito incassante e non sui sedimenti ecc.? Meglio è ammettere che vi abbiano concorso l'acqua e l'anidride carbonica, che possono esercitare un'azione localizzata, e l'alta temperatura, lasciando insoluto il problema sulla natura e provenienza degli stessi agenti (fenomeno idrotermale, pneumatolitico?) e tralasciando pure di ricercare le cause che hanno condotto ad una sì netta scistosità. Si ha così la possibilità di una franca « prasinitizzazione » sia pure su piccola scala, sia pure per eccezione, anche senza l'intervento di dislocazioni: prasiniti di origine non dinamometamorfica. E risultano del pari chiarite le trasformazioni della biotite in clorite e, crediamo anche, la neo formazione di microliti di muscovite e di zoisite dall'alterazione per via chimica del plagioclasio, senza invocare per quest'ultima neo formazione l'aiuto di ipotetiche vicende tettoniche, ritenute necessarie da molti studiosi.

A proposito delle quali trasformazioni e neoformazioni crediamo piuttosto non inutile fare le considerazioni seguenti intese a mettere in rilievo un particolare comune carattere; considerazioni che permettono di inquadrarle in una classe di fenomeni ben noti: voglio dire tra le trasformazioni « paramorfiche » e tra gli « accollamenti regolari » di cristalli di specie diverse (Friedel, Wyrouboff).

Sono comuni nei minerali delle rocce tali trasformazioni chimiche che sono da riguardarsi come fatti pressochè identici al paramorfismo. La uralitizzazione del pirosseno è uno dei più classici esempi: sia l'anfibolo che il pirosseno sono monoclini ed hanno reticolati molto vicini per forma e dimensione, multipli l'uno dell'altro secondo numeri interi piccoli; i due silicati hanno la stessa formula generale $MSiO_3$ (M = Ca, Mg, Fe. . . ,) salvo che nel pirosseno c'è sempre un maggior contenuto in Ca, invece nell'anfibolo predominano Mg, Fe con alquanto H. Ebbene quando avviene la trasformazione chimica da pirosseno ad anfibolo, accompagnata da una piccola modificazione di composizione chimica consistente in via principale in una diminuzione del tenore in calcio, questa ha tutti i caratteri di una trasformazione « paramorfica » perchè, salvo piccole deformazioni, il reti-

colo dell'anfibolo conserva ancora l'orientazione di quello del pirosseno ed il cristallo di pirosseno da origine ad un unico cristallo di anfibolo avente la stessa orientazione cristallografica.

Ma un più interessante esempio è offerto dalla cloritizzazione della biotite. La pennina e la biotite, entrambe monocline, pseudo–esagonali hanno dei reticoli pressochè uguali. I paramenti della biotite sono 0.577 : 1 : 3.274; $\beta = 90$; quelli della pennina 0.577: 1 : 3.495; $\beta = 89.40$ (il rapporto parametrico è noto grossolanamente per la pennina, nei libri talvolta è segnato per i parametri della clorite 0.577 : 1 : 2.2772, ma ciò dipende dallo scambio dei simboli (110) con (221). I parametri risultano uguali: d'altra parte la composizione chimica, variabile per ognuno dei silicati entro larghi limiti, differisce per un maggior contenuto in alcali nella biotite e in acqua nella pennina, oltrechè per il solito normale minor contenuto in Fe e Mg e maggior contenuto in Ca nella biotite come sempre si riscontra nei confronti tra un minerale ed i minerali secondari che da esso si formano.

Nella trasformazione che si compie in natura, forse molto lentamente, con le modificazioni chimiche ora accennate, da un unico cristallo di biotite si genera frequentemente un unico cristallo di pennina isorientato col primo; gli assi cristallografici x, y, z, conservano la stessa direzione. Nonostante dunque le modificazioni chimiche ora dette la natura delle trasformazioni è molto vicina, direi identica, alle trasformazioni « paramorfiche ». Anche da un punto di vista ottico si conservano, in questo caso, delle nette analogie: l'uniassicità e il carattere ottico negativo si conservano, l'assorbimento $\omega > \varepsilon$ permane quantunque in modo meno intenso. Altri esempi sono offerti dalle zeoliti la cui acqua può essere eliminata e ripresa od anche sostituita da altri liquidi e le cui basi possono essere sostituite senza alterazioni della costituzione cristallina. L'insieme di questi fatti dimostra le possibilità della conservazione dell'edificio cristallino e *della sua orientazione*, come nelle trasformazioni paramorfiche, anche quando ha luogo un rimaneggiamento dell'ordine chimico dell'edifizio cristallino. Se allora in una roccia si trovano dei cristalli di minerali secondari che presentano una certa « disposizione particolare », è ragionevole avanzare, fra le altre, anche la ipotesi che essi provengano da cristalli di primitivi minerali che già avevano assunto nel processo di consolidazione quella disposizione particolare, oltre all'ipotesi che detta disposizione sia conseguenza di azioni meccaniche (pressione unilaterale), che favorirebbero la trasformazione di ordine chimico e che porterebbero a quella « disposizione particolare ». Così nel caso della roccia prasinitica che ci occupa crediamo poter supporre una tessitura laminare primaria assunta durante la consolidazione (Primär schieferige Gesteine di Erdmannsdörffer) accentuata sino alla scistosità durante il metamorfismo. La difficoltà di spiegarla viene così ricacciata indietro nel tempo ma essa permane ancora intera.

In quanto ai microliti di muscovite (e di zoisite) che si mostrano

generalmente con orientazione costante nei cristalli di plagioclasio (l'Andreatta ha osservato lo stesso fenomeno, già da tempo su altri tipi di rocce) il fatto può riguardarsi come un « accollamento regolare » di due specie differenti.

Il fenomeno è comunissimo e ben noto: esempi se ne trovano fra i minerali naturali: rutilo su oligisto, distene su staurolite, ecc: ma più chiari esempi sono offerti da accollamenti fra cristalli artificiali, il cui studio ha portato qualche chiarimento sul fenomeno. Si è trovato che la condizione necessaria perchè ciò avvenga è che esista nelle due specie una comune maglia solida o piana semplice o multipla che abbia pressochè una stessa forma e dimensione. L'accollamento regolare avviene allora per modo che tale maglia semplice o multipla comune alle due specie sia isorientata.

Riteniamo che anche i microliti di muscovite e di zoisite abbiano una costante orientazione rispetto al plagioclasio per l'incontro fortuito di una maglia piana o solida, semplice o multipla comune alle due specie, muscovite-plagioclasio e zoisite-plagioclasio, per cui la muscovite (o la zoisite) di neoformazione, proveniente dalla trasformazione dei plagioclasi si rideposita su questo accollandosi regolarmente. È molto probabile che si tratti di uno stesso fenomeno. Certo è che c'è vantaggio a riguardarlo od a supporlo come tale, in quanto rientra così in una classe di fenomeni conosciuti.

La forma allungata dei minerali secondo piani cristallografici (di sfaldatura) è da ritenersi dovuta al loro costituire una via più facile per gli agenti (probabilmente liquidi) della trasformazione. Le due direzioni e due sole che si osservano negli accollamenti starebbero ad indicare l'esistenza di due tipi di maglia comune ai due minerali secondo le quali è possibile il regolare accollamento.

Ma questo modo di riguardare le cose ha il vantaggio di inquadrare, e vorrei credere, in qualche modo di chiarire anche altri fatti analoghi che si osservano in petrografia, quale, ad esempio, il doppio regolare intreccio del serpentino proveniente da alterazione di un cristallo di olivina e, fuori dal campo della petrografia, dal cloruro ferroso (Lehmann) che cristallizza a freddo in lamelle a forma di losanga, che scaldate rapidamente dentro la loro soluzione si risolvono in cristallini aghiformi meno idrati orientati nelle due direzioni parallele ai lati della losanga ecc.

E non solo questi fatti, che si accompagnano ad una trasformazione chimica, sarebbero da riguardarsi come un fenomeno di regolare accollamento, ma anche certe *scissioni o smistamenti* la cui diffusione è grandissima e la cui osservazione ci è famigliare sarebbero più chiari ove si risguardassero, sia pure per intanto in via provvisoria, come una manifestazione dello stesso fenomeno: voglio dire le pertiti, le micropertiti ecc., le micropegmatiti (*quartz vermiculé* degli autori francesi) che secondo alcuni autori sarebbero appunto dovute ad una scissione in seguito a raffreddamento: ma che altri riguarda invece come fenomeno primitivo di regolare concrescimento.

Biologia. — *Diagnosi delle brucellosi negli animali: la Brucellina Mirri* [1]. Nota [2] di A. Mirri, presentata dal Corrisp. S. Baglioni.

Dopo la scoperta della tubercolina da parte di Koch furono fatti innumerevoli tentativi per utilizzare le reazioni allergiche anche nella diagnosi di altre malattie infettive.

Ben presto infatti si trovò che il nuovo principio poteva ottimamente applicarsi nella diagnosi della morva.

Ma mentre per queste due infezioni il metodo si impose subito nella pratica e nuovi contributi scientifici valsero a sempre più perfezionarlo, invece i tentativi fatti per altre malattie rimasero infruttuosi.

Così nelle brucellosi.

I primi esperimenti di applicazione delle reazioni allergiche nelle brucellosi furono fatti, nei bovini, da Mc Fadyean e Stockman mediante un preparato da essi denominato « abortina » (estratto glicerico di bac. di Bang ottenuto col metodo della tubercolina e malleina) e nell'uomo e nelle capre da Burnet mediante un preparato da esso denominato « melitina » ottenuto filtrando attraverso candele di Chamberland o Berkefeld delle colture in brodo di 5-20 giorni di bac. melitensis.

Questi prodotti, come pure numerosi altri preparati nelle maniere più diverse (estratti acquosi ed alcoolici di colture di agar, colture totali in agar od in brodo, prodotti di filtrazione o di decantazione di colture ecc.) coi più diversi metodi applicati (prova sottocutanea, oftalmica, intrapalpebrale, intracutanea) hanno dato quasi sempre dei risultati più o meno incerti, tanto che i trattatisti di malattie infettive degli animali (Hutyra, Zwick, Stazzi) affermano concordemente che allo stato attuale delle nostre conoscenze le reazioni allergiche nella diagnosi delle brucellosi lasciano molto a desiderare e comunque hanno un valore assai inferiore a quello delle reazioni sierologiche (agglutinazione e deviazione del complemento).

*
* *

Io sono stato indotto ad occuparmi del problema delle reazioni allergiche nelle brucellosi per ragioni contingenti della regione ove il mio Istituto esercita la sua attività.

(1) Lavoro eseguito nella Stazione sperimentale zooprofilattica della Sicilia. Palermo.
(2) Pervenuta all'Accademia il 18 settembre 1934.

Infatti, rivestendo le brucellosi in Sicilia una grande importanza, specialmente per la frequenza con cui il contagio viene trasmesso all'uomo dagli animali lattiferi (sopratutto capre) io ho da alcuni anni iniziato un sistema di profilassi basato sull'accertamento degli animali sospetti ed il loro consecutivo isolamento, sistema che ha condotto a notevoli risultati pratici, come fu già riferito in una pubblicazione del mio aiuto dott. Togo Rosati.

A primo tempo tale accertamento veniva eseguito col metodo dell'agglutinazione, ma dato l'esame di quantità spesso notevolissime di animali, si imponeva l'adozione di un metodo di diagnosi più semplice e pratico quale appunto poteva essere una reazione allergica.

Cominciai col riprovare alcuni metodi già noti ma dovetti abbandonarli perchè ottenevo delle reazioni aspecifiche.

I migliori risultati, per quanto ancora incostanti, li ottenni con filtrati di colture in brodo, che conservavo con l'aggiunta di acido fenico o di formalina.

Pensai allora di utilizzare delle *colture in brodo escludendo i germi dal mestruo colturale, anzichè colla filtrazione, coll'aggiunta di congrue quantità di siero agglutinante ad alto titolo.*

Tale procedimento forma la base del mio metodo.

In linea di massima io preparo l'antigene come segue:

Diversi ceppi dei diversi tipi di brucelle vengono seminati in palloni di brodo glucosato all'1 %. I palloni vengono posti in termostato per 20–30 giorni, indi in ognuno si aggiunge tanta formalina da ottenere una diluizione del 0,5 % e una quantità di siero agglutinante sufficiente per ottenere la chiarificazione completa del mestruo. Il liquido chiaro viene quindi decantato e dopo le comuni prove per accertarne la sterilità, è pronto per l'uso.

Per questo prodotto mi pare adatto il nome di *Brucellina Mirri.*

Non ho ancora avuto il tempo sufficiente per determinarne la validità. Posso dire per ora che dopo due mesi dalla preparazione è ancora pienamente attiva ed ho ragione di ritenere che lo sia molto più a lungo.

Quale punto di inoculazione della brucellina ho preferito fin dall'inizio il tessuto connettivo sottocutaneo della palpebra inferiore dell'occhio (prova intrapalpebrale). Ho senz'altro scartato, perchè meno rispondenti allo scopo, le altre prove comunemente usate per le reazioni allergiche.

Circa la quantità di brucellina da inoculare in ogni singolo animale, dopo alcune prove di orientamento mi sono fissato sul mezzo centimetro cubo nei caprini e negli ovini, e sui due centimetri cubi e mezzo nei bovini.

Le reazioni che si ottengono colla brucellina sono quasi sempre nette e molto evidenti. Le reazioni dubbie sono eccezionali.

La reazione positiva si appalesa dopo 1 a 3 giorni dall'inoculazione sotto forma di una tumefazione palpebrale molto evidente, specialmente se gli animali vengono osservati di fronte in maniera da vedere contemporaneamente come paragone l'altro occhio.

Tale tumefazione si presenta al tatto di natura consistente, fibrosa, ed è completamente indolore.

Nei pochi casi in cui l'ispezione visiva è dubbia, decide senz'altro l'ispezione tattile.

La reazione permane evidente almeno tre giorni per cui *la lettura dei risultati può essere fatta tanto in terza che in quarta od in quinta giornata.*

Assai spesso anzi le reazioni permangono più a lungo: nel 60 °/₀ circa dei casi 8 giorni, e nel 30 °/₀ 12 giorni.

Le reazioni sono di tipo nettamente localizzato, senza interessamento dello stato generale del soggetto; tutt'al più si nota in qualche caso un leggero rialzo termico (pochi decimi) e un lieve interessamento delle ghiandole linfatiche regionali. Un eventuale stato di gravidanza, anche avanzato, non viene per nulla disturbato.

Nel caso di reazione negativa la palpebra rimane perfettamente normale, nè si osserva altra qualsiasi manifestazione.

Gli esperimenti finora eseguiti interessano n. 3471 caprini, n. 1234 ovini e n. 396 bovini.

In complesso quindi n. 5.110 animali.

In ogni animale, contemporaneamente alla inoculazione della brucellina fu praticato l'esame del sangue col metodo dell'agglutinazione, usando come antigene delle sospensioni batteriche in soluzione fisiologica fenicata al 0,5 °/₀ (sono contrario all'uso di sospensioni batteriche vive avendo constatato che, per essere i sieri in esame al momento dell'uso quasi sempre più o meno inquinati di germi vari, in tal modo si ottengono reazioni abnormi) e considerando positivi i titoli di almeno 1 : 50.

L'esito degli esami risulta dalla seguente tabella:

Specie animali	N° dei soggetti esaminati	Reazioni positive	
		Agglutinazione	Brucellina
Caprini	3471	196 = 5,6 °/₀	431 = 12,4 °/₀
Ovini	1243	27 = 2,1 °/₀	294 = 23,6 °/₀
Bovini.	396	42 = 10,6 °/₀	83 = 20,9 °/₀
Totali . . .	5110	265 = 5,1 °/₀	808 = 15.8 °/₀

Da notare che tutti gli animali con agglutinazione positiva sono stati positivi anche alla brucellina.

Dall'esame della tabella sopra riportata colpisce anzitutto il notevole numero di soggetti che hanno reagito soltanto alla brucellina e non alla agglutinazione, per cui si potrebbe pensare a reazioni aspecifiche. Ma il seguente esperimento sta a dimostrare come ciò non sia da ammettere. Da un centinaio di caprini che avevano reagito tanto alla agglutinazione che alla brucellina, e da altrettanti caprini che avevano reagito solo alla brucellina, sono stati prelevati dei campioni di latte. Tali campioni sono stati sottoposti alla centrifugazione e col sedimento e la panna di ognuno è stata inoculata una cavia sottocute.

Dopo 12 giorni si è proceduto all'esame del sangue delle cavie col metodo dell'agglutinazione e si è constatato che del primo gruppo reagivano positivamente 9 e del secondo gruppo 14. Le stesse cavie furono poi uccise e da ognuna fu poi isolato il ceppo di brucella. Si deve pertanto ritenere che il *maggior numero di reperti positivi alla brucellina dipenda non da aspecificità della stessa, ma da una sua maggiore sensibilità.*

Tale maggior sensibilità della brucellina, che nei caprini e nei bovini risulta circa doppia della agglutinazione, nei riguardi degli ovini è addirittura decupla.

Il fatto può sembrare strano dovendosi ammettere che negli ovini il metodo dell'agglutinazione corrisponda pochissimo nella diagnosi delle brucellosi. Eppure che ciò realmente sia lo dimostrano i dati epidemiologici, come ad esempio quello di un gregge di 183 ovini che avevano quasi tutti abortito per anni consecutivi, nel quale si hanno 113 reazioni alla brucellina e soltanto 13 alla agglutinazione: è evidente che quest'ultimo reperto è troppo lontano dalla realtà dei fatti. D'altra parte ciò mi spiega perchè, quando ancora non avevo iniziato gli esperimenti con la brucellina, io raramente sia riuscito a dimostrare con l'agglutinazione (praticata in pochi soggetti) l'esistenza della brucellosi in greggi nei quali i reperti epidemiologici propendevano tutti per tale infezione.

Altro vantaggio che la brucellina possiede di fronte all'agglutinazione è rappresentato dal fatto che mentre, come sappiamo, l'agglutinazione è un fenomeno incostante, nel senso che un determinato animale oggi può dare reazione positiva e domani negativa o viceversa, pur rimanendo sempre infetto, invece questo non succede o succede in misura molto più limitata nella brucellina.

Infatti, avendo provato all'agglutinazione n. 157 caprini che un mese prima agglutinavano, ho constatato che solo 117 reagivano ancora. Per contro, su n. 374 caprini che reagivano positivamente alla brucellina, dopo un mese ne reagivano ancora 396.

Di notevole interesse inoltre sono i risultati comparativi fra brucellina e agglutinazione ottenuti in una stalla di bovini dell'agro palermitano (Istituto Zootecnico).

In tale stalla, composta di 29 bovine, si ebbero nei primi mesi del 1933 diversi aborti da bac. di Bang.

Fu allora praticata la vaccinazione con germi morti, e da oltre un anno a questa parte non si è più verificato nessun nuovo caso. Pertanto gli animali si dovrebbero considerare guariti. Ho praticato nel mese di giugno u. s. la prova della brucellina nonchè l'esame del sangue (agglutinazione) negli stessi animali.

Ebbene, mentre l'agglutinazione è stata positiva in 9 di essi, cosa del resto naturale dato che dovevano ancora permanere gli anticorpi provocati dal vaccino, invece la brucellina ha dato risultato completamente negativo in tutti i soggetti.

Questi reperti mi hanno suggerito il seguente esperimento di laboratorio: 10 capre presumibilmente non affette da brucellosi (agglutinazione e brucellina negative) sono state inoculate con dosi crescenti di colture uccise di brucelle. Dopo un mese, l'esame del sangue con l'agglutinazione è stato positivo in tutti i soggetti con titoli varianti da 1 : 500 a 1 : 1000. – La reazione alla brucellina è stata, invece, completamente negativa.

Tanto l'esperimento pratico che quello di laboratorio stanno dunque a dimostrare che *la reazione alla brucellina non viene influenzata dalla vaccinazione con germi morti*, come invece ne viene influenzata l'agglutinazione.

Riassumendo, dato il considerevole numero di soggetti esaminati e la costanza dei risultati ottenuti, mi pare di poter concludere:

1° – *La brucellina preparata e usata col metodo indicato costituisce un mezzo di diagnosi delle brucellosi negli animali che per la sua praticità e sensibilità può sostituire vantaggiosamente la prova dell'agglutinazione.*

2° – Negli ovini la brucellina è l'unico metodo utilizzabile per la diagnosi delle brucellosi.

3° – La reazione della brucellina non viene influenzata dalla vaccinazione con germi morti.

Botanica (Citologia vegetale). — *Osservazioni su alcuni elaborati delle cellule del clorenchima.* Nota [1] di R. Savelli presentata dal Socio B. Longo.

Già altrove mi occupai del cosidetto « amido lipidico », estendendone la cognizione all'infuori delle Monocotiledoni, e mostrando che anzi nelle Cactacee presenta massima diffusione e tipici caratteri: tuttavia il più interessante di questi caratteri è forse quello che poi ho trovato nei granelli elaborati dal cloroplasto sterinoforo (eleocloroplasto) dell'asse del *Cephalocereus euphorbioides*: interponendo questi granelli tra i Nicol incrociati *essi lasciano il campo perfettamente oscuro*; manca perciò il fenomeno della croce che comunemente si è abituati a ritenere proprio del granello d'amido e conseguenza necessaria della sua struttura. Ma esaminando gli strati più profondi del parenchima, dove il suo color verde impallidisce, e parallelamente si attenua e poi scompare il carattere lipidico dei granelli d'amido elaborati dai plastidi, si vede che correlativamente questi granelli ripresentano il comportamento ordinario dell'amido, alla luce polarizzata ed allo jodio: sembra dunque evidente che la mancanza di queste manifestazioni sia in rapporto col carattere lipidico dell'amido.

Riguardo alle manifestazioni ottiche dei granelli d'amido, tra i Nicol del microscopio polarizzatore, corre i trattati una spiegazione semplice, anzi semplicista: i granelli risulterebbero da piccoli cristalli (probabilmente del sistema rombico) e ne presenterebbero la birifrangenza. Anche la vecchia teoria dei « trichiti » di Meyer assimilava il granello d'amido ad uno sferocristallo. Non è improbabile che il granello d'amido possa in certi casi risultare da un insieme di cristalli orientati radialmente, sebbene Sponsler avendo studiato la questione coi raggi X concluda per una certa orientazione regolare delle molecole, non tale tuttavia da potersi ritenere propriamente cristallina; ma a parte il fatto che sono molto probabili differenze rilevanti da specie a specie, non si possono neanche trascurare le considerazioni presentate da H. Bouasse (*Optique cristalline*, Paris, 1925, pp. 462-464): corpi birifrangenti possono risultare formati da sostanze *isotrope*, purchè disposte secondo convenienti strutture: così un corpo stratificato, i cui strati sovrapposti, di opportuno spessore, presentino alternativamente due indici di rifrazione diversi, si comporta come un corpo cristallizzato uniasse, ed è birifrangente pur essendo costituito di sostanze non birifrangenti. Ora, generalmente,

(1) Pervenuta all'Accademia il 10 settembre 1934.

l'amido ha appunto una struttura periodica attorno all'ilo (struttura lamellare); le sue proprietà in ogni punto appaiono come una funzione periodica della distanza dall'ilo; e questo può bastare a dar ragione del comportamento ottico senza che appaia una vera necessità di supporre una struttura cristallina, cui il Bouasse non credeva: « nous avons probablement afaire à une matière *amorphe* de propriétés scalaires variant périodiquement » (Bouasse). La controversia può riaffacciarsi a proposito dell'amido lipidico; ed il Botanico il quale voglia, secondo prudenza, lasciare ai Fisici competenti la risoluzione del quesito, deve pur dire che la pratica dell'osservazione corrente gl'insegna come il fenomeno della croce oscura si veda realmente bene in quei granelli che all'osservazione ordinaria appaiono molto ben nettamente stratificati; e v'è luogo per una revisione che determini in quali casi i due fatti non si verificano. Nell'amido lipidico intanto questi due fatti (stratificazione, e speciale comportamento ottico) non esistono, e per conto mio io sono più propenso per la spiegazione del Bouasse che per quella corrente: i granelli d'amido potrebbero anche risultare di sostanze amorfe, ed avere tuttavia il classico comportamento ottico quando sono realmente stratificati, non averlo quando sono più o meno omogenei. Che cosa poi veramente accada nei centri di formazione, e come ed in qual ordine vengano deposti dal plastidio i costituenti dell'amido lipidico, se questa varietà nasca da una specie di infiltrazione d'una sostanza per così dire estranea e che venga ad interporsi quasi come un cemento fra le particelle amilacee (cristalline o no) fors'anche alterandone il normale orientamento, o si tratti invece (meno probabilmente) di una modificazione chimica dell'amido stesso, sono questioni che attendono adeguata trattazione.

Un comportamento ottico speciale, invece che nei granelli d'amido, si trova nel secreto lipidico dello stesso plastidio, perchè la sua grande sferula parastromatica illumina il campo oscuro tra i Nicol incrociati, e così osservando a mediocre ingrandimento una sezione del clorenchima dell'asse di *C. euphorbioides* il campo appare tutto punteggiato da sferette luminosissime: se, come spesso avviene durante la preparazione, si è avuto un principio di *clorolisi* (cfr. *Bull. Orto Bot. Napoli*, vol. XII, pp. 99–109), la loro luminosità appare verdastra, altrimenti essa è appena lievissimamente azzurrognola. Tale proprietà ottica è di qualche interesse e vale a distinguere queste sferule da molti altri secreti endocellulari, che non la presentano: così non la presentano gli inclusi di *Lantana alba* già menzionati in una mia precedente Nota, nè le sferule d'aspetto oleaginoso dell'epidermide di *Haworthia cymbiformis*, pure studiate nel mio Istituto, come neanche, del resto, le comuni gocce d'olio nè le soluzioni di colesterina in olio, etere, cloroformio, alcool, acetone ecc. Invece il fenomeno osservato fa pensare di primo impulso agli *esteri delle sterine*, dei quali non interessa dire, secondo l'espressione di un celebre trattato di biochimica, che « hanno una importante proprietà fisica, la birifrangenza », poichè la birifrangenza è comune a tutti i

corpi cristallizzati in sistemi diversi dal monometrico, perciò comunissima e dalla stessa colesterina presentata: la singolarità sta, caso mai, nel fatto che questi esteri possono presentare la birifrangenza *anche allo stato fluido*, cioè per l'appunto anche nello stato fisico che presentano le nostre gocciole o sferule parastromatiche dell'eleocloroplasto: queste proprietà sono quelle dei così detti « cristalli fluidi » di Lehmann, ossia del così detto stato « mesomorfo », dipendente da una particolare orientazione delle particelle. Tuttavia bisogna osservare che il semplice rischiaramento del campo tra i Nicol incrociati non conduce necessariamente ad ammettere la birifrangenza: tale rischiaramento potrebbe anche essere semplicemente l'effetto di una depolarizzazione della luce; e le mie osservazioni ottiche sulle sferule parastromatiche dell'eleocloroplasto sono pel momento assai sommarie ed insufficienti ad approfondire la questione, che del resto va lasciata ai Fisici competenti. Nel caso classico dei cristalli fluidi della modificazione sciropposa dell'oleato di ammonio, facendo fare al preparato un giro completo, essi divengono – come i cristalli solidi uniassi – quattro volte brillanti e oscuri e, in quest'ultimo caso, presentano una estinzione d'insieme, *salvo nelle vicinanze degli spigoli e degli apici*, che sono arrotondati per azione della tensione superficiale: le nostre gocciole, che sono perfettamente rotonde, non presentano un analogo fenomeno d'estinzione; si può osservare soltanto che presentano aspetti diversi evidentemente dipendenti dalla loro diversa posizione: la maggioranza sono semplicemente luminose, ma talora presentano una barra nera diametrale, altre presentano due linee curve nere, talora congiunte da una barra diagonale, quasi a formare una specie di Z, altre infine – e benchè il fenomeno sia raro, è nettissimo – presentano una *croce scura*, ed insomma figure di cui talune vicinissime a quelle che il Chwolson (*Traité de Physique*, Paris, 1909, T. 2, 4ᵉ fasc.) mostra per le *gocce cristalline* (fig. 558, *a*, *b*, p. 895, op. cit.) quali possono ottenersi p. es. dal paraossifenetolo di Gattermann, o che sono possibili nel caso di quelle formazioni miste costituite da un liquido cristallino che circondi a guisa di scorza un liquido ordinario, formando così una gocciola sferica inviluppata da una membrana cristallina liquida, ciò che otticamente equivale ad uno sferocristallo cavo, e dà, a Nicol incrociati, il fenomeno della croce nera.

Per i citologi io volevo soltanto far risaltare l'esempio di questo plastidio in cui l'amido, fra i Nicol incrociati, non presenta la croce, e può presentarla invece il lipide; dimostrazione del niente che valgono le indagini fatte su questo fondamento per riconoscere se certi inclusi nei gonidi dei Licheni sono amido o non sono amido: che del resto si comprende *a priori* come un fatto fisico di questa natura non possa essere per nulla idoneo alla identificazione chimica d'una sostanza. Le ricerche più recenti sui gonidi dei Licheni, introducendo manipolazioni di tecnica atte piuttosto a confondere le sostanze che a distinguerle, hanno, a mio parere, fatto retrocedere ancora un poco il termine della discussione, nella quale interloquiremo in altro momento.

Riveniamo alla sferula lipidica contenuta nella vescicola parastromatica del nostro Eleocloroplasto: immersa in liquidi opportuni questa può intraprendere con essi degli scambi, veri scambi osmotici, aumentando di volume o diminuendo: ho già detto altrove della sua istantanea solubilità nell'acetone; ma se noi la immergiamo in una soluzione d'acetone assai diluita nell'acqua (meglio aggiungendo anche una traccia d'alcool) l'affinità tra il contenuto lipidico della sferula e l'acetone si manifesta in altra maniera: non è più la gocciola che sciogliendosi si diffonde nell'acetone circostante, ma è l'acetone che entra nella gocciola e la gonfia. Appena entra l'acetone, immantinenti le descritte particolarità ottiche della sferula scompaiono, evidentemente per l'azione disgregante che il solvente esercita sulle particelle orientate da cui dipendevano. Così introducendo, con opportuna tecnica, nelle sferule lipidiche un po' d'etere, o di cloroformio, o d'alcool ecc., l'effetto è identico: esse perdono istantaneamente il potere di rischiarare il campo oscuro tra i Nicol incrociati.

Poichè la presenza di fitosterine nelle eleosfere è stata da me per altre vie dimostrata, e poichè d'altra parte questa presenza non è dimostrabile, nell'estratto acetonico, con la reazione di Windaus, della Digitonina (che avviene solo per sterine libere), la supposizione che si abbia da fare con fitosterine esterificate concorda pienamente con le osservazioni ottiche, sia pur sommarie, che abbiamo fatto, e diventa quasi una certezza.

Io credo che sieno impegnate in un simile legame anche le fitosterine del secreto mesofillare di *Viburnum Tinus* L. e *V. odoratissimum* Ker. appunto perchè l'estratto acetonico delle foglie non reagisce alla Digitonina [si preferisca il seguente reattivo: acetone 73, acqua 18, alcol 9, Digitonina 0.5 (Leulier e Noël)]. Nondimeno questo estratto è carico di sterine, difatti evaporando e filtrando ripetutamente (per togliere una parte delle impurezze), portando quasi a secco, riprendendo con anidride acetica, poi trattando cautamente con acido solforico, si hanno le vivacissime reazioni cromatiche delle sterine. Il procedimento riesce meglio nel *V. Tinus*. Poichè le sterine sono abbondanti, ma non reagiscono alla Digitonina, pare di poter concludere che sono eterificate. Invece la Dragone-Testi credette di poter istituire un contrapposto fra lo stato delle sterine trovate « in tutte le foglie e in tutte le parti del fiore » (« Annali di Bot. », Vol. XX, p. 19) e lo stato di quelle che si trovano nel seme, e ciò perchè le prime, dopo il trattamento Ciaccio, « conservano chiaramente la proprietà di sciogliersi in solfuro di carbonio », mentre le seconde « invece persero questa proprietà, mostrando trattarsi di eteri di fitosterine ». Logicamente dunque appare che secondo la Dragone-Testi: 1°) le fitosterine in questione sono libere nelle foglie, ed invece eterificate nel seme; 2°) che può stabilirsi la regola che al trattamento Ciaccio restano solubili le sterine libere, e si insolubilizzano quelle eterificate. Questa particolare applicazione del metodo Ciaccio è ribadita a p. 23 dove si afferma che appunto i risultati di questo metodo

« fanno concludere trattarsi di una fitosterina, *che nel seme sarebbe eterificata* ». Ma a p. 253 della Memoria del Ciaccio *Contributo alla distribuzione ed alla fisiopatologia cellulare dei Lipoidi* (« Arch. f. Zellfors », 1910), nel gruppo D, dei lipidi che restano *totalmente solubili*, vengono collocati la colesterina *ed i suoi eteri*, e questo può non essere del tutto rigorosamente esatto, ma vale bene a mostrare come, per questa parte, le osservazioni della Dragone–Testi non sieno molto approfondite, nè le conclusioni molto convincenti. Io ritengo probabile che nel *Viburnum Tinus* L., le sterine sieno eterificate tanto nelle foglie quanto nel seme [1], che il diverso comportamento dipenda dalla diversità dei radicali acidi concorrenti in questa eterificazione e dal fatto probabile che nel seme questi composti sieno mescolati con altre sostanze che influenzino la loro solubilità. D'altra parte per una trattazione *ex professo* della questione si dovrà tener conto dei lavori che F. W. Heyl e Ch. Barckenbus fecero, tra il 1919 e il 1922, sulle sterine del *Viburnum*.

Uscendo un momento dal prefisso confine del clorenchima, confermo pienamente l'osservazione del Reilhes che nelle cellule epidermiche delle scaglie del bulbo di Giglio esiste (oltre gli « sterinosomi ») un incluso lipidico endocitoplasmatico: tanto più strano che sia sfuggito al Mirande in quanto esso, resistendo al comune Sudan alcoolico, è più facilmente dimostrabile degli « sterinosomi ». Se, come pretende Reilhes, questi non sono formati di *liliosterina* ma di lecitina, e quello è invece un globulo grasso, si dovrà osservare al metodo Ciaccio la insolubilizzazione degli uni e la solubilità dell'altro.

Chiudo avvertendo che, a proposito delle mie ricerche sull'amido lipidico, il prof. Buscalioni – primo illustratore di questa varietà d'amido nell'Aloe – ha avuto la cortesia di informarmi che egli ricorda di averne osservato casi anche all'infuori dell'Aloe (ciò che non risulta dalle sue pubblicazioni), e particolarmente ricorda grossi granuli di amido da un lato dei quali i lipidi addossati formavano una « calotta polare » rossiccia al Sudan III; e dubita che tale osservazione riguardi forse le Cactacee. Questa reminiscenza inedita dell'insigne citologo, non s'identifica con i casi miei, perchè sembra riferirsi piuttosto ad una apposizione che non ad una incorporazione del lipide all'amido; ma vale a dimostrare come in questo campo le ricerche possano utilmente estendersi.

(1) Per una identificazione meno incerta del precipitato ottenuto dalla reazione della Digitonina, non è bene omettere i saggi di solubilità all'acetone, etere, acido acetico e piridina, come vedo sbrigativamente praticato in recenti lavori.

Fisiologia (Chimica fisiologica). — *Sugli effetti della lenta e ripetuta asfissia in ambiente confinato*[1]. Nota[2] di G. Amantea, presentata dal Corrisp. S. Baglioni.

Parecchi anni or sono mi ero proposto di studiare le variazioni di azione dei farmaci nello stato asfittico; e, passando in rassegna la vasta letteratura, accumulatasi intorno alle più svariate quistioni, connesse coll'argomento generale dell'asfissia, avevo rilevato, che al riguardo esistevano più che altro semplici tentativi sperimentali, e pure questi scarsi e con risultati, che lasciavano adito a incertezze, per esser derivati da confronti istituiti su animali differenti.

Ma ero rimasto colpito specialmente dalla constatazione, che in effetti esisteva una lacuna ancor più notevole, in quanto si poteva considerare estesa a quasi tutti i problemi, che, nei riguandi dell'asfissia, sarebbe stato desiderabile risolvere, ma che rimanevano tuttora insoluti, perchè, esigendo metodiche esperienze comparative, con la rigorosa esclusione del fattore individuale, nessuno si era ancora preoccupato di affrontarli nelle condizioni appropriate, che la loro indole imponeva.

E siccome uno studio in questo senso mi si presentava assai promettente, da compensare senza dubbio del lavoro per raggiungere l'intento, decisi di tentarlo. Nè mi fu difficile realizzare condizioni di esperimento, che, per quanto provvisorie, dessero sufficiente affidamento; sicchè, anche adottandole come tali, potetti ricavarne un primo gruppo di risultati, che mi parvero già corrispondenti alle favorevoli previsioni fatte.

Tuttavia il proposito di meglio estenderli e svilupparli – ricorrendo, se fosse occorso, a quei perfezionamenti della tecnica, cui bene si prestava il primo metodo impiegato, che fra poco sarà descritto, – per diversi ostacoli, non ha potuto trovare finora attuazione; mentre dall'altra parte vari motivi sono intervenuti ad indurmi a riferire - sia pur sommariamente, intanto, e in forma espositiva, senza discussioni – le osservazioni preliminari suaccennate.

Questo precisamente desidero fare nella presente Nota.

Poteva corrispondere al mio scopo soltanto un metodo, che avesse permesso di spingere l'asfissia fino al limite pressochè estremo, compatibile

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisiologica della R. Università di Roma.
(2) Pervenuta all'Accademia il 17 settembre 1934.

colla ripresa e colla sopravvivenza dell'animale; che avesse concesso di ripetere anche molte volte la prova, nonchè di interromperla sempre a un momento preciso, senza commettere gravi errori nel computo esatto del tempo di resistenza; e che avesse offerto infine l'opportunità di sorvegliare direttamente il contegno dell'animale durante tutto il decorso di ogni esperienza.

A tanto sarei già potuto in maniera semplice pervenire, ricorrendo ad animali di piccola taglia; sottoponendoli a lenta asfissia in vasi a pareti trasparenti, ermeticamente chiusi; e stabilendo con esattezza quale potesse essere il limite estremo più adatto per l'interruzione delle singole prove.

Mi servii pertanto di ratti albini, e di recipienti di vetro a tappo smerigliato: per meglio garantirne l'ermetica chiusura, si spalmava la superficie del tappo e quella corrispondente del vaso con lanolina.

Saggi pazienti mi indussero a scegliere quale momento conveniente per l'interruzione dell'esperienza quello segnato dalla scomparsa del riflesso di posizione, che si verifica più tardi della scomparsa del riflesso corneale, e coincide col periodo delle più gravi e minacciose alterazioni del ritmo respiratorio (respirazione periodica, sospensione dei movimenti respiratori toracici ecc.).

Se si inclina dolcemente il vaso, che racchiude l'animale, si può ottenere, che la superficie corneale del bulbo oculare sporgente del ratto ne tocchi la parete: il contatto e la reazione, che esso provoca, si apprezzano bene per trasparenza; sicchè, anche a vaso chiuso, si può così esplorare agevolmente il riflesso corneale.

Mettendo invece il recipiente in posizione orizzontale bruscamente, si può cercare di far cadere l'animale sul dorso: ciò è difficile che riesca in un primo tempo; segue un periodo, in cui riesce, ma in cui il ratto è ancora capace di rimettersi più o meno prontamente sugli arti; infine si giunge al punto, in cui esso, caduto sul dorso, pur scuotendo energicamente il vaso, non fa più nemmeno tentativi apprezzabili per riprendere la posizione normale.

Appunto questo momento critico scelsi quale limite estremo di ciascuna esperienza.

Da opportuni confronti è risultato, che, per ratti adulti di 150–200 gr., esplorati in un vaso della capacità di 1000 cmc., esso di regola precede in media di soli 3′–5′ la morte; mentre il tempo di resistenza, esattamente computato dalla chiusura del recipiente al limite stabilito, non si trova di solito mai inferiore ai 60′–80′ circa. Cosicchè, già di fronte a queste ultime cifre, l'errore che si può commettere, superando alquanto il momento critico, appare di grado senza dubbio minimo, quasi trascurabile.

Diveniva agevole pertanto accertare il tempo di resistenza di un determinato ratto in un recipiente di data capacità, e quindi studiare, ad es., se e come questo tempo di resistenza variasse in asfissie successive per lo

stesso animale, a parità di altre condizioni; ovvero se e come variasse in dipendenza di svariati fattori, accidentali o fatti deliberatamente intervenire; se e quali effetti non ancora noti le asfissie più o meno ripetute, e più o meno ravvicinate lasciassero eventualmente nell'animale; quali modificazioni presentasse l'azione di determinate sostanze in rapporto collo stato asfittico, e fino a che punto la resistenza all'asfissia risentisse a sua volta dell'azione di altre ecc.

Comunque le esperienze eseguite nelle accennate condizioni, e tenendo sempre esatto conto della temperatura e della pressione, dovevano intanto servire solo come preliminari e orientative; in seguito si sarebbero estese anche ad altri animali, e con le utili variazioni di tecnica, che le prime avessero suggerito.

Me ne furono necessarie molte per accertare il rendimento effettivo del metodo, dal punto di vista più generale; ma parecchie altre furono anche impostate e condotte collo scopo preciso di saggiare il rendimento del metodo stesso nello studio di taluni problemi speciali.

I risultati complessivi furono tali, da giustificarne in realtà l'ulteriore sviluppo in varie direzioni. Ma ho già accennato alle difficoltà, che finora lo hanno vietato, nonchè ai motivi che mi inducono tuttavia a fare oggi questa semplice esposizione di fatti, colla speranza che la ripresa delle ricerche e l'acquisizione di dati nuovi possano presto mettere in grado di ritornare sull'argomento per l'opportuna discussione.

Mi limiterò a riferire le osservazioni, che mi sembrano di maggiore interesse, tralasciando pel momento le altre accessorie.

È anzitutto da premettere, che adatte prove di confronto, eseguite su animali diversi e di differente età, sesso e taglia; ovvero sullo stesso animale, ma interponendo lunghi intervalli, e facendo variare la capacità del vaso, nonchè scegliendo differenti condizioni di temperatura ambiente o di pressione, hanno permesso di rendere conto dell'entità delle oscillazioni, che il tempo di resistenza all'asfissia poteva nel caso nostro subire – com'era del resto molto ovvio prevedere – in dipendenza appunto dei suaccennati fattori (età, sesso e taglia dell'animale, capacità del vaso, temperatura, pressione). Di grado più rilevante sono risultate le differenze, riferibili alla taglia dell'animale e alla capacità del vaso; relativamente molto esigue invece quelle riferibili alle ordinarie variazioni della temperatura ambiente e della pressione atmosferica. Non ne sono risultate apprezzabili in rapporto col sesso.

Ma è importante rilevare, che, adoperando il medesimo recipiente, facendo esperienze quotidiane o a giorni alterni sul medesimo animale, e ripetendole molte volte, in serie ininterrotta e sufficientemente prolungata, si è potuto assistere, per ratti adulti, sempre a un graduale progressivo e nettissimo aumento del tempo di resistenza, indipendentemente dalla limitata

azione nello stesso senso, attribuibile alla temperatura e alla pressione, o nonostante anche l'azione interferente di tali fattori.

L'aumento di resistenza, che così l'animale presenta, e che si può presumere connesso con sue particolari condizioni, da precisare, indotte dall'asfissia ripetuta a brevi intervalli, si può già annunziare chiaro alla 2ª o 3ª prova; precede quindi in quelle successive, attraverso oscillazioni, spiegabili con l'intervento di fattori accessori; e raggiunge un massimo - variabile a seconda dei casi –, intorno al quale rimane di regola pressochè stazionario. Poi si può pure osservare una parziale perdita di quel che in resistenza era stato guadagnato, ma solo qualche volta e quando si insista troppo nell'esperimento.

Anche se si vuole parlare di adattamento a una maggiore resistenza all'asfissia, occorre rilevare, che il descritto comportamento si è dimostrato costante, e non ha subìto mai eccezioni, in numerosi accertamenti su ratti adulti di differente sesso o peso, nonchè su femmine gravide e non gravide.

Il guadagno in resistenza è stato sempre di grado notevole: talora ha persino superato la proporzione del 100 %. Ecco alcuni esempi dimostrativi: un maschio adulto di gr. 213, che, in un vaso di cc. 2420, ha resistito $1^h\ 7'\ 35''$ nella prima esperienza, resiste $1^h\ 43'\ 0''$ nella 11ª; un altro maschio adulto di gr. 220, che, nel vaso precedente, incomincia col resistere $1^h\ 17'\ 20''$, giunge a $1^h\ 52'\ 15''$ nella 25ª prova; una femmina di gr. 220, gravida, che, nello stesso vaso, ha incominciato col resistere $1^h\ 23'\ 50''$, ha toccato $2^h\ 7'\ 0''$ nella 11ª prova; altra femmina, pure gravida, di gr. 202, ancora nello stesso vaso, resiste $1^h\ 48'\ 0''$ nella prima prova, e arriva a $2^h\ 27'\ 0''$ nella 28ª; una terza femmina di gr. 285, gravida all'inizio, incomincia col resistere $0^h\ 31'\ 15''$, in un vaso cc. 1600, e tocca $1^h\ 7'\ 15''$ nell'ottava esperienza; una quarta adulta, ma non gravida, di gr. 120, in un vaso di cc. 1000, resiste $1^h\ 13'\ 0''$ nella prima prova, e tocca $2^h\ 3'\ 5''$ nella decima; un maschio di gr. 173, nel medesimo vaso di cc. 1000, resiste $1^h\ 0'\ 22''$ la prima volta, e $1^h\ 51'\ 25''$ nella decima prova ecc.

Ma è da considerare, che, se il fenomeno si è così dimostrato costante e di tale entità nel caso di animali adulti o a sviluppo completo, esso è tuttavia sempre mancato o rimasto inapprezzabile in tutti gli esperimenti fatti su ratti molto giovani, in via di accrescimento (di 40–50 gr. circa). Resta da confermare questa differenza di comportamento, e quindi da indagarne i motivi.

Comunque, fermandosi al caso dei ratti adulti, bisogna aggiungere, che in essi, una volta ottenuto l'adattamento alla massima resistenza, sospendendo le asfissie, e lasciando gli animali in riposo, per intervenire con prove isolate di assaggio sempre più distanziate (ogni 10, 20 e 30 giorni, ovvero ogni 15, 30 e 45 giorni ecc.), si è potuto per tentativi agevolmente accertare, che la resistenza guadagnata continua a mantenersi ancora invariata persino

dopo 30–40 giorni: soltanto in un tempo successivo si verifica il ritorno alla norma.

Se dunque si ammette, che, come conseguenza dell'asfissia lenta e molte volte ripetuta a brevi intervalli (24–48 ore), si determinano nel ratto adulto speciali condizioni interne, che gli concedono appunto un guadagno in resistenza di un dato grado - ma sempre notevole -; bisogna d'altra parte pure rilevare, che lo stato particolare, così artificialmente indotto, non è permanente, ma transitorio.

Esso rimane da chiarire nella sua effettiva essenza, e in questa direzione è possibile proseguire le indagini sperimentali. Ma si può già prevedere, che debbono essere in giuoco modificazioni complesse, di ordine biochimico e fisiologico, le quali, oltre a giustificare il noto fenomeno descritto, potranno forse in seguito risultare anche responsabili di altre particolari manifestazioni.

Da parte mia posso intanto dichiarare, che debbo appunto alla conoscenza già acquisita di quanto ho riferito, se mi è stato possibile guidare a suo tempo i miei allievi dott. E. Moracci e dott. G. Aragona nelle loro ricerche sulle variazioni numeriche degli eritrociti e dei leucociti circolanti per effetto dell'asfissia [1], e precisamente verso i risultati, che hanno già reso noti e che sono in evidente nesso coll'argomento qui trattato.

Altro fatto da considerare è il seguente: se un ratto adulto normale, per cui si sia misurato già il tempo di resistenza in una prima prova, si sottopone l'indomani a una seconda, previa intossicazione con ossido di carbonio - fino ai primi segni netti di sofferenza - e mantenendo pari tutte le altre condizioni, risulta di regola un notevole aumento di resistenza, con un vantaggio anche di oltre il 100 % sulla durata della prima prova, che vale pel confronto. In questo caso, per azione del CO, sembra che si possa ottenere pronto e immediato tutto l'effetto, che pure lo espediente dell'asfissia ripetuta permette di raggiungere, ma solo gradatamente. Tuttavia, mentre in quest'ultimo caso, come si è visto, il vantaggio - pur essendo temporaneo - persiste per almeno 30–40 giorni, nel caso invece dell'CO si è rivelato addirittura fugace, e tanto, da ritrovare già dopo 24 ore l'animale ritornato al normale. Sono da precisare meglio analogia e differenze tra i due casi. Comunque, in quello dell'CO il risultato si può interpretare, tenendo presente quanto è noto sull'azione della sostanza, specie nei riguardi degli enzimi cosidetti respiratori; e, partendo dal caso medesimo dell'CO, si potrà forse essere anche aiutati nell'ulteriore studio e spiegazione dell'altro.

In due femmine gravide, su cui si era incominciato a sperimentare in coincidenza coll'inizio della gravidanza, e che si erano perdute per avere troppo spinto una delle prove coincidenti col periodo terminale della gravidanza medesima, all'autopsia si è potuto accertare, che era avvenuta, per

(1) « Arch. di Fisiologia », vol. XXIX, 1930, e « Boll. d. Soc. ital. di Biol. sper. », vol. V, 1930.

effetto delle asfissie precedenti, morte intrauterina dei fetini, ma in tempi diversi e successivi, com'era da desumere dalla diversa dimensione e dal diverso stadio di alterazione dei singoli. In una delle due femmine fu trovato un solo fetino (sopra nove) di dimensione corrispondente al periodo terminale di gravidanza; gli altri, tutti certamente morti per le asfissie precedenti e in giornate differenti, erano stati ciononostante ritenuti, senza che si fosse verificato aborto.

Rileverò, che i ratti giovani, i quali, a differenza degli adulti, hanno mostrato di non presentare il fenomeno dell'aumento di resistenza progressiva per asfissie ripetute, è ovvio che si debbano prestare più degli adulti, e si debbano preferire per quelle esperienze comparative, in cui il suddetto comportamento negativo possa diventare favorevole a più adeguati confronti.

Come esempio di quanto si può ottenere nello studio delle variazioni di azione dei farmaci per effetto dello stato asfittico, valga il seguente esperimento, di facile esecuzione e di risultato preciso: per due giovani ratti, di eguale peso (50–60 gr.) età e sesso, si stabilisce il tempo di resistenza all'asfissia in un dato recipiente, e quindi si accerta la dose minima di nitrato di stricnina, capace di provocare in essi, per iniezione ipodermica, semplicemente un netto aumento dell'eccitabilità riflessa; dopo 2–3 giorni si inietta a entrambi $^1/_2$ e $^1/_3$ della dose trovata, e, mentre l'uno si chiude nel vaso per l'asfissia, l'altro si lascia come testimone in condizioni ordinarie: quest'ultimo non presenterà alcun segno apprezzabile di stricninizzazione, mentre l'altro, in ambiente confinato, assai prima di giungere al noto momento critico, mostrerà crescente ipereccitabilità riflessa, e poco più tardi violenti tetani stricnici, che, se si interviene in tempo aprendo il vaso, subito cessano, e l'animale torna nelle condizioni del controllo.

Un ultimo fatto mi resta da segnalare. Un ratto (♂) adulto normale era stato sottoposto ad una asfissia quotidiana per 30 giorni consecutivi (esplorando sempre assiduamente, come esige il metodo, il riflesso corneale oltre quello di posizione); poi era stato tenuto in riposo per circa una settimana, quindi di nuovo sottoposto ad asfissia per 3 giorni, e infine lasciato tranquillo. Dopo circa due mesi dall'ultima asfissia subìta, esso presentava opacamento bilaterale completo del cristallino, cioè una netta cataratta bilaterale. Senza dubbio non ne esisteva accenno apprezzabile nè all'inizio, nè alla fine dell'intera esperienza: non sarebbe altrimenti potuto sfuggire durante l'esplorazione del riflesso corneale.

Cataratta da asfissia? Questa particolare condizione non mi risulta che sia stata presa finora in considerazione e studiata convenientemente, in rapporto colla genesi della cataratta. Da parte nostra, non avendo potuto identificare altre cause sufficienti, cui riferire il fatto osservato, ci siamo posto in effetti il quesito dell'eventuale intervento di tale fattore. E insistendo su parecchi altri animali, per riprodurre il fenomeno segnalato, un'altra volta

sola abbiamo potuto osservarlo, ma di grado più limitato, nella forma cioè di semplice intorbidamento durevole del cristallino.

È da rilevare, che, in entrambi i casi, l'alterazione non si è manifestata come effetto immediato dell'asfissia, sì bene dopo che le prove erano state sospese, e per ciò in coincidenza piuttosto collo stato particolare e complesso, che, come si è visto, le asfissie ripetute bisogna ammettere che inducano: precisamente di tale stato dunque il risentimento del cristallino potrebbe rappresentare un'altra manifestazione, da aggiungere al noto fenomeno dell'aumento di resistenza all'asfissia medesima.

È anche possibile, che l'asfissia stessa non intervenga come unico fattore, sia pure indiretto, ma che esiga la cooperazione anche di altro o di altri, da identificare.

Resta comunque aperta la via a nuove indagini in questo campo.

Una delle ragioni che mi ha indotto a portare a conoscenza questa della cataratta, come le precedenti osservazioni riferite, è stata appunto quella di mettere anche altri, che lo ritenessero opportuno, in grado di partecipare e cooperare all'ulteriore proseguimento e sviluppo di questo tipo di ricerche.

Fisiologia. (Chimica fisiologica). — *Osservazioni sul decorso dei processi ricostruttivi nel colombo* [1]. Nota [2] di D. Gigante, presentata dal Corrisp. S. Baglioni.

In una sua Nota introduttiva G. Amantea rimarcava, nel 1927, la lacuna, esistente nella letteratura, circa lo studio dei fenomeni ricostruttivi per la reintegrazione del peso corporeo, perduto dopo digiuni più o meno gravi; e contemporaneamente rilevava la notevole importanza, oltrechè scientifica, anche pratica, che perciò avrebbe avuto uno studio sistematico della rialimentazione dopo il digiuno [3].

A seguito di questa Nota sono stati pubblicati vari lavori, eseguiti nel suo laboratotio dagli allievi G. Martino [4] e V. Famiani [5].

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisiologica della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 30 luglio 1934.

(3) G. Amantea, *Sulla rialimentazione dopo il digiuno.* « Boll. Soc. It. di Biol. Sper. », vol. II, p. 39, 1927.

(4) G. Martino, *Ricerche sulla rialimentazione dopo il digiuno.* Nota I. *Variazioni della capacità del consumo alimentare nei vari periodi della rialimentazione.* « Boll. Soc. It. di Biol. Sper. » vol. II, fasc. 1, 1927; Id., Nota II. *Sulle modalità della ripresa del peso del corpo nei colombi rialimentati a grano e a granoturco.* « Ibidem », vol. II, fasc. 2, 1927; Id., Nota III. *Rialimentazione dopo un digiuno immediatamente successivo alla ripresa da un digiuno precedente.* « Ibidem », vol. II, fasc. 3, 1927; Id., Nota IV. *Sulla quantità minima di alimento necessaria al mantenimento del peso corporeo prima del digiuno e nei vari periodi della rialimentazione del colombo.* « Ibidem », vol. II, fasc. 3, 1927; Id., *Sulla rialimentazione dopo il digiuno nel colombo.* « Arch. di Sc. Biol. », vol. XIII, p. 421, 1929.

(5) V. Famiani, *Sulla capacità di consumo alimentare nella rialimentazione dopo digiuno,*

Intento sopratutto di G. Martino prima, e poi anche di V. Famiani, fu quello di studiare e risolvere sperimentalmente alcuni quesiti preliminari, ma di valore pregiudiziale e di portata generale, da costituire una necessaria premessa e una salda base per ricerche più fini e dettagliate successive. Precisamente in questo ordine di indagini rientrano quelle, che qui esporremo.

Essendoci trovati a lavorare intorno al problema dell'inanizione, ma con altri propositi – come a suo tempo sarà esposto, – abbiamo avuto incidentalmente occasione di utilizzare parte dei nostri animali da esperimento, per fare osservazioni, relative appunto alla rialimentazione dopo il digiuno, le quali, connettendosi con talune di quelle citate di G. Martino e di V. Famiani, ci sembra che valgano vantaggiosamente ad estenderle, onde ci siamo indotti a riferirne.

Ricorderemo che, in generale, tanto G. Martino che V. Famiani, sperimentando su colombi adulti, dopo aver accertato preventivamente, per tentativi, la quantità massima di alimento, che ciascun animale era capace di elaborare in condizioni normali, nelle 24 ore, assoggettavano i colombi a un digiuno più o meno spinto, ma mai di regola molto grave, e quindi li rialimentavano con una sola e determinata qualità di cibo, (variabile per le varie esperienze), sempre somministrandolo per imbeccamento (che aveniva una sola volta durante la giornata), e graduandone la quantità secondo le diverse esigenze sperimentali, imposte dai diversi problemi da risolvere.

Animale da loro preferito per gli esperimenti fu il colombo, sopra tutto per la comodità, che offriva di poter controllare agevolmente colla palpazione dell'ingluvie, la eventuale sosta, ovvero il più o meno pronto progresso dell'alimento, traendone adeguate deduzioni circa la capacità di elaborazione dell'alimento stesso.

Anche noi abbiamo eseguito le nostre esperienze su colombi, e precisamente su colombi sia adulti che giovani, di ambo i sessi, e tutti risultati affatto normali durante un congruo periodo di osservazione preliminare. Ma la tecnica da noi adottata è stata diversa: dopo avere accertato il peso effettivo massimo dell'animale, a ingluvie vuota (al mattîno), il colombo veniva isolato in una gabbia, in cui rimaneva a digiunare (con sola acqua a disposizione). Il digiuno è stato sempre molto spinto, avendo portati tutti i nostri colombi fino a presentarsi nettamente la « fase patologica » dell'inanizione secondo Luciani, che è segnata da una caratteristica brusca caduta del peso. Ciascun colombo durante il digiuno, era pesato ogni giorno alla medesima ora. Quando dal comportamento del peso risultava raggiunta

« Rend. R. Acc. dei Lincei », vol. XVI, ser. 6ª, 2° sem., fasc. 7–8, 1932; Id., *Contributo alla conoscenza del valore alimentare ricostruttivo degli embrioni di vari semi di cereali e leguminose.* « Ibidem », vol. XVI, ser. 6ª, fasc. 7–8, 1932.

la detta fase patologica di Luciani, il digiuno si interrompeva, e l'animale veniva rialimentato. Oltre che pel grado dell'inanizione le nostre esperienze decorsero differentemente da quelle di G. Martino e di V. Famiani anche per le modalità di rialimentazione. Fu lasciata infatti sempre libera facoltà all'animale di assumere spontaneamente l'alimento, che si offriva sempre abbondantemente e misto (grano, granturco, pane secco, veccia, ecc.); ma mentre i colombi in alcune esperienze lo assunsero continuando a rimanere in gabbia, in altre invece lo potettero utilizzare rimanendo liberi nell'ampia colombaia dell'Istituto. Anche durante la rialimentazione, ogni giorno alla solita ora, si pesava l'animale e si controllava lo stato dell'ingluvie. Si considerava chiusa l'esperienza solo quando l'animale, riacquistato il peso di partenza, lo presentava invariato o aumentato nei giorni successivi: l'accertamento si faceva sempre a ingluvie completamente vuota. Allorchè lo stesso animale venne sottoposto a più esperienze, si ebbe cura di intercalare fra le prove successive un congruo periodo di riposo (4-6 settimane circa). Ma nel caso, in cui, avendo sperimentato su colombi giovani, si volle poi sperimentare sugli stessi divenuti adulti, la sosta fu necessariamente molto lunga, di parecchi mesi.

Sperimentando come si è detto, è ovvio che non poteva esser facile controllare, come nel caso di G. Martino e di V. Famiani, la quantità di alimento consumata per giorno e in totalità; e di conseguenza neppure il rapporto tra alimento consumato e peso riacquistato, nonchè altri importanti dati, già dai detti ricercatori considerati. Tuttavia, in compenso, a noi si offriva l'opportunità di studiare il comportamento dei fenomeni di ricostruzione, dopo digiuni molto gravi, sullo stesso animale da loro usato, ma in condizioni sperimentali prima non attuate e destinate ad assecondare nella maniera più naturale e completa la ripresa dell'animale.

Riassumiamo per maggior chiarezza in una Tabella ed in due grafici i dati più generali ottenuti, sperimentando nelle condizioni descritte su dieci colombi, ed eseguendo in tutto diciotto esperienze.

Come appare chiaro dalla Tabella, nei colombi adulti, rialimentati in gabbia con cibo misto a volontà, la ricostruzione è avvenuta in un numero di giorni sempre superiore a quelli occorsi per la demolizione (digiuno). Non tenendo conto della differenza di 17 giorni in più, avuta pel colombo 10° nell'esperienza 17ª, in quanto quest'ultima rappresenta un caso isolato, in cui il digiuno si era voluto spingere oltre la fase patologica, e cioè fino al grado estremo (40 % circa di perdita percentuale di peso); nelle rimanenti esperienze su colombi adulti, che avevano prima tutti digiunato fino alla fase patologica (con perdita percentuale media di peso di circa il 32 %), la differenza in più ha oscillato fra 3 e 6 giorni. Tali risultati, confrontati con quelli di G. Martino dimostrano, che la ripresa è sensibilmente più rapida quando i colombi assumono a volontà – e sia pure in gabbia – l'alimento, anzichè quando lo ricevono per imbeccamento, e sia

TABELLA.

Esperienza	Colombo	Età	Peso all'inizio del digiuno in gr.	Peso alla fine del digiuno in gr.	Peso perduto nel digiuno in gr.	Perdita percentuale peso	Durata del digiuno in giorni	Durata della rialimentazione in giorni	Luogo in cui è avvenuta la rialimentazione
1	I	adulto	450	320	130	28.9 %	11	18	In gabbia
2	»	adulto	460	320	140	30.4 %	14	14	In colombaia
3	II	adulto	410	288	122	29.7 %	11	22	In gabbia
4	III	adulto	415	297	118	28.6 %	10	17	In gabbia
5	»	adulto	425	300	125	29.4 %	13	11	In colombaia
6	IV	giovane	460	260	200	43.5 %	17	21	In gabbia
7	»	adulto	460	310	150	32.6 %	15	20	In gabbia
8	»	adulto	470	300	170	36.1 %	14	21	In gabbia
9	V	adulto	340	225	115	33.8 %	13	11	In colombaia
10	VI	adulto	380	258	122	32.1 %	13	11	In colombaia
11	VII	adulto	385	275	110	28.5 %	10	22	In gabbia
12	»	adulto	400	275	125	31.2 %	12	23	In gabbia
13	VIII	giovane	425	250	175	41 %	17	18	In gabbia
14	»	adulto	440	300	140	31.8 %	15	19	In gabbia
15	IX	giovane	345	215	130	37.6 %	11	18	In gabbia
16	X	giovane	375	235	140	37.3 %	11	15	In gabbia
17	»	adulto	380	230	150	39.5 %	13	30	In gabbia
18	»	adulto	410	280	130	31.7 %	13	16	In gabbia

pure in quantità abbondante. E ciò ha tanto più valore, in quanto i nostri animali erano stati tutti sottoposti ad un digiuno ben più grave che quelli di G. Martino. Risulta d'altra parte pure a noi, che la maggiore o minore prontezza della ripresa è in rapporto con la minore o maggiore perdita percentuale di peso prima subita. Ma la velocità di ricostruzione ha raggiunto il grado massimo nel caso dei colombi lasciati a rialimentarsi liberamente nella colombaia dell'Istituto, e cioè nelle condizioni sperimentali più propizie e più prossime alla vita normale di questi animali: qui infatti il tempo necessario pel recupero del peso perduto è risultato eguale a quello del digiuno, o addirittura inferiore (1–2 giorni). Per rendere ancora più chiara e dimostrativa questa notevole differenza di rapidità nella ripresa tra i colombi rialimentati in gabbia e quelli in colombaia, riportiamo la grafica n. 1, corrispondente alle esperienze 4ª e 5ª, condotte sul colombo 3° adulto, che nella prima prova fu rialimentato in gabbia, nella seconda prova in colombaia.

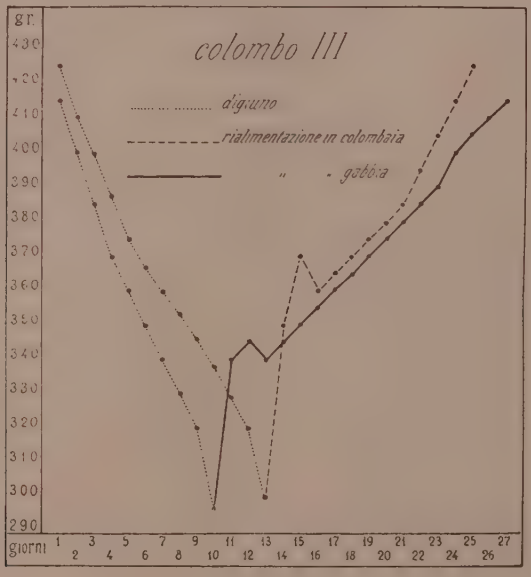


Fig. 1.

Per ciò che concerne il caso dei colombi giovani, occorre premettere, che da altre nostre ricerche, ancora inedite, ci risulta bene accertata la loro notevole resistenza ad entrare in fase patologica, che di regola si presenta relativamente molto tardi e con una perdita percentuale di peso molto elevata. Sicchè, spingendo pure su questi il digiuno fino alla fase patologica, necessariamente si raggiunse la media molto elevata del 40 % di perdita percentuale di peso. Rialimentandoli poi tutti sempre in gabbia, il tempo

della ricostruzione risultò di 1–7 giorni più lungo, rispetto a quello della demolizione. Tenendo conto del grado dell'inanizione, in questo caso molto più spinto, tale risultato, confrontato con quello ottenuto nei colombi adulti, rialimentati in gabbia, e cioè nelle identiche condizioni, ci sembra attestare, che la ripresa del peso perduto in colombi giovani avviene relativamente in modo più rapido che negli adulti. A dimostrarlo meglio rappresentiamo nella grafica n. 2 l'andamento delle esperienze 13ª e 14ª, eseguite sul colombo 8°, la prima quando questo animale era giovane, la seconda quando lo stesso era divenuto adulto.

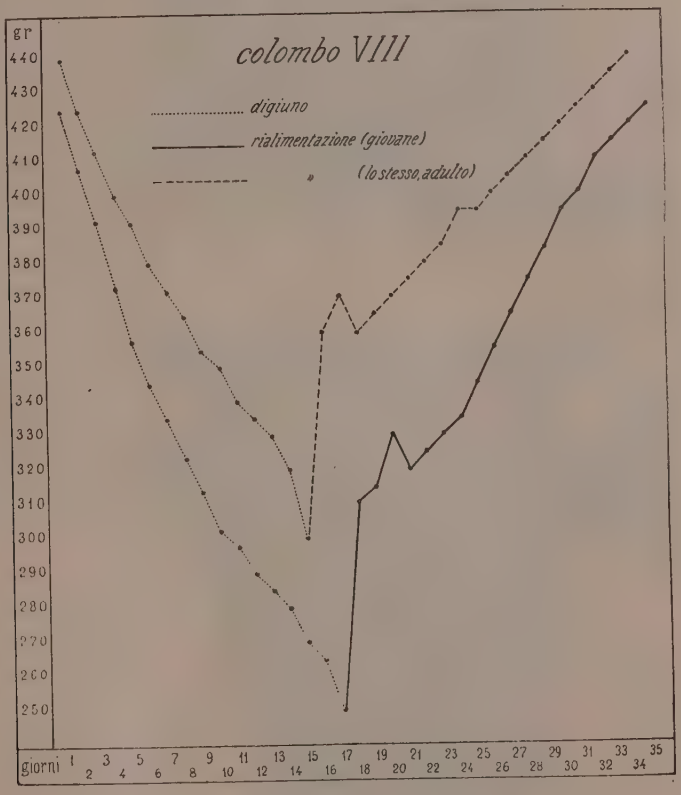


Fig. 2.

Ancora un rilievo vogliamo aggiungere: G. Martino aveva notato che nei suoi colombi la ripresa era molto più rapida nei primi giorni della rialimentazione che negli ultimi, in modo tale che, dividendo tutto il tempo della rialimentazione in tre periodi, pressochè uguali, si poteva constatare agevolmente una maggiore rapidità di ricostruzione nel primo periodo sul secondo, e nel secondo sul terzo. Ebbene, anche nei nostri colombi è ri-

sultato evidente questo fatto. Lo dimostreranno alcuni esempi: dei colombi adulti rialimentati in gabbia, il colombo 4°, nell'esperienza 7ª riacquistò il 50 °/₀ del peso perduto nel I periodo, il 30 °/₀ nel II, ed il 20 °/₀ nel III; il colombo 10° nell'esperienza 18ª riprese il 61 °/₀ del suo peso nel I periodo, il 24 °/₀ nel II, ed il 15 °/₀ nel III. Ancora più netta demarcazione fra i tre periodi hanno presentato i colombi adulti rialimentati in colombaia: ad esempio il colombo 1° nell'esperienza 2ª riprese il 65 °/₀ del peso perduto nel I periodo, il 28 °/₀ nel II, il 7 °/₀ nel III; e il colombo 5° nell'esperienza 9ª riprese perfino il 70 °/₀ del suo peso nel I periodo (della durata di soli 4 giorni circa), il 22 °/₀ nel secondo, e l'8 °/₀ nel III. Pei colombi giovani invece le differenze fra i tre periodi sono state meno marcate; ed infatti il colombo 9° nell'esperienza 15ª riprese il 45 °/₀ del peso nel I periodo, il 30 °/₀ nel II, il 25 °/₀ nel III; ed il colombo 10° nell'esperienza 16ª riacquistò il 50 °/₀ del peso nel I periodo, il 35 °/₀ nel II, ed il 15 °/₀ nel III°.

Ad attestare che la completa ricostruzione, per quanto avvenuta con molta prontezza, denota sempre un effettivo ritorno allo stato normale, valga la constatazione, più volte fatta, che se il colombo è sottoposto ad un nuovo digiuno subito dopo aver ripreso il peso perduto pel precedente, esso è capace di sopportare questa seconda prova, liquidando le riserve recentemente ricostruite, e quindi di nuovo ricostruendo, senza permettere di apprezzare – in condizioni eguali di osservazione - sostanziali differenze di comportamento.

Questi in succinto i principali risultati, derivati dalle nostre esperienze. Abbiamo creduto utile comunicarli per l'intimo ed evidente nesso, che essi hanno con gli altri già riferiti da G. Martino e da V. Famiani; e pel valore che si può sperare che acquistino in seguito, per chiunque intenda ulteriormente occuparsi dello studio dei fenomeni ricostruttivi.

N. P.

Tav. I. – Reazione alla brucellina nei bovini.

Tav. II. – Reazione alla brucellina nei caprini.

Tav. III. - Reazione alla brucellina negli ovini.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1934 (Anno XII).

(Ogni Memoria e Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo)

Meccanica. — *Il concetto di "fuoco" nella stabilità dei velivoli.* Nota [1] del Corrisp. G. A. Crocco.

Prescinderemo in questa Nota dall'influsso dell'elica e considereremo perciò il fuoco come punto di applicazione della derivata vettoriale della forza aerodinamica totale del velivolo relativa alle ali, alle fusoliere ed agli accessori.

Poichè nello studio della stabilità d'un velivolo il momento ristoratore dell'equilibrio può calcolarsi precisamente dal prodotto della derivata della forza totale per la distanza del baricentro della sua linea di azione, ne segue che il concetto di fuoco e di curva focale viene a sostituirsi in aviazione al concetto di metacentro e di curva metacentrica adoperato nella stabilità navale ed aerostatica.

Tale concetto non è nuovo in aerodinamica, ma non è stato sinora elaborato in modo da venire utilmente introdotto nelle indagini sulla stabilità.

Vi accenna il Fuchs nella sua classica trattazione [2] ma non sviluppa la formula indicatavi. Vi accenna lo scrivente stesso [3] là dove precisa il punto limite di stabilità ed il rapporto di centramento; ma senza connettere queste definizioni col concetto di « fuoco »; vi insiste il Munk in un suo recente trattato [4], precisando le definizioni di « fuoco » (che egli chiama

(1) Presentata nella seduta del 4 marzo 1934.
(2) R. Fuchs e L. Hopf, *Aerodynamic*, 1922, par. 2ª, cap. II, § 1, p. 318, fig. 219.
(3) G. A. Crocco, *Elementi di aviazione*, 1933, cap. VI, n. 85, 86.
(4) M. Munk, *The principles of Aerodynamics*, 1933, par. VI, § 30.

« centro aerodinamico ») nel cap. VIII; e la sua applicazione alle considerazioni di stabilità nel cap. XXX; ma si limita a valutarlo teoricamente e a considerarne soltanto la posizione longitudinale lungo la corda aerodinamica.

La presente Nota elabora questi sparsi accenni in una concreta formulazione.

A questo scopo noi prenderemo le mosse da una constatazione di aerodinamica sperimentale.

Supporremo cioè di aver misurato i momenti di un modello di velivolo rispetto ad un punto qualsiasi, che diremo *fulcro*; e di averli riferiti ad una conveniente funzione dell'incidenza, cioè alla componente della forza aerodinamica secondo un asse y perpendicolare a una *corda di riferimento*, x, per altro arbitraria.

È notorio che il coefficiente numerico C_y relativo a tale componente si identifica praticamente con C_p. I coefficienti di momento C_m sono dunque riferiti a C_p, come d'ordinario [1].

Se ora immaginiamo di far variare il fulcro di riferimento in altezza, cioè spostandolo in senso opportuno parallelamente all'asse y, constateremo che l'*incurvamento* della linea rappresentante il coefficiente di momento si addolcirà fino a scomparire sensibilmente e poi ad invertirsi. Esisterà in altri termini un'altezza ottima di fulcro per la quale l'andamento dei coefficienti di momento risulterà sensibilmente rettilineo. La variazione del fulcro in profondità, cioè lungo l'asse x, modificherà invece ben poco l'andamento rettilineo dei coefficienti di momento, e ne altererà sostanzialmente la sola direzione.

Ciò premesso, seguendo il metodo indicato in altra mia Nota [2], ricerchiamo il fulcro ottimo, che ci fornirà il fuoco (se esiste) o ci darà in caso contrario la *escursione focale* [3], da una sola esperienza aerodinamica ove il momento sia riferito ad un fulcro qualsiasi.

Se perciò indichiamo x_g, y_g (fig. 1) le coordinate del fuoco S del velivolo rispetto al baricentro G, ed agli assi x, y su definiti, positive quando G è in avanti ed in basso, rispetto al fuoco, il momento ristoratore dell'equilibrio, positivo in senso picchiante, potrà formularsi con

$$(1) \qquad \frac{\delta M_g}{\delta \alpha} = \frac{\delta M_g}{\delta C_p} k_p = k_p \rho S V^2 \left(x_g - y_g \frac{\delta C_x}{\delta C_p} \right)$$

dove α è l'angolo d'incidenza rispetto ella corda di riferimento e $k_p = \frac{\delta C_p}{\delta \alpha}$.

(1) G. A. Crocco, *Elementi di aviazione*, cap. V, figg. 235, 238.

(2) G. A. Crocco, *Sul "fuoco" di un biplano*. Questi « Rend. », vol. XIX, maggio 1934.

(3) Nota cit. La escursione focale, di cui ivi si parla, non è ancora provata. Tuttavia ne teniamo conto in questa Nota per maggiore generalità.

Qui conviene osservare, come per altro risulta dal metodo di determinazione del fuoco, che la C_x presa rispetto alla corda di riferimento, avrà la generica forma approssimata [2]

$$C_x = C_0 + \alpha_1 C_p - \beta_1 C_p^2 \tag{2}$$

dove α_1 e β_1 sono coefficienti sperimentali generalmente positivi, il primo dei quali ha l'ordine di grandezza dell'angolo tra la corda e la direzione di partenza nulli; ed il secondo è all'incirca eguale a $1 : \pi$. Si avrà pertanto

$$\frac{\delta M_g}{\delta \alpha} = k_p \rho S V^2 (x_g - \alpha_1 y_g + 2\beta_1 C_p y_g). \tag{3}$$

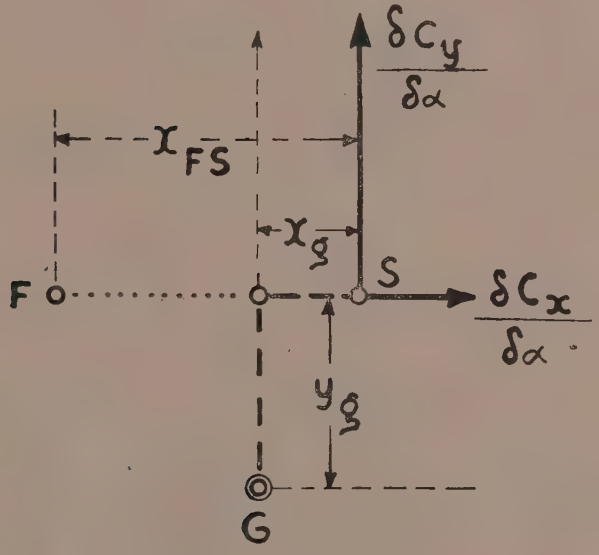


Fig. 1.

Questa espressione, malgrado la sua natura approssimata, appare fondamentale per le indagini sulla stabilità. Essa rivela infatti che il coefficiente del momento stabilizzatore è funzione non solo della posizione del baricentro lungo la corda focale, ma altresì della sua altezza rispetto alla corda focale; e consente alcune notevoli deduzioni.

Anzitutto viene confermato che una posizione del baricentro *avanti* al fuoco del velivolo accresce la stabilità e viceversa: mentre una posizione del baricentro *sotto* la corda focale, accresce la stabilità, a partire dal valore di $C_{p_1} \gtrless \frac{\alpha_1}{2\beta_1}$; e viceversa.

In secondo luogo si deduce che è possibile, dal suddetto valore di C_p in poi, avere il baricentro in corrispondenza del fuoco S, cioè con $x_g = 0$, purchè y_g abbia un conveniente valore.

Inoltre si dimostra la possibilità di due tipi di stabilità, nettamente distinguibili: una stabilità *in lunghezza*, che è ottenuta da sola quando l'altezza y_g del baricentro sia nulla (baricentro sulla corda focale) e una stabilità *in altezza*, ottenuta da sola quando la coordinata longitudinale del baricentro soddisfi, contemporaneamente, alla condizione $x_g = \alpha_1 y_g$.

Il primo tipo di stabilità è di natura prettamente *aviatoria*. Esso impone un baricentro avanzato rispetto al fuoco del velivolo.

Per ogni regime, ossia per ogni valore del prodotto ρV^2, essa comporta un coefficiente di stabilità costante, dato dalla distanza x_g.

Il valore numerico della ρV^2, che figura come moltiplicatore, varia però col regime in ragione inversa di C_p, entro i limiti ordinari di volo. Epperciò il coefficiente stabilizzatore risulta massimo alla massima velocità e minimo alla massima portanza.

Il secondo tipo di stabilità è di natura pendolare o *navale*. Esso richiede un baricentro basso rispetto al fuoco S. La stabilità è proporzionale alla depressione del baricentro; e il coefficiente di proporzionalità è dato dal fattore $C_p \rho S V^2$, che per gli ordinari regimi di volo, si può ritenere una costante eguale al peso del velivolo. Esso corrisponde, dunque, per i piccoli spostamenti angolari cui si riferisce la stabilità, ad un'altezza metacentrica, in senso navale, eguale a $2\beta_1 k_p y_g$. Però, uscendo dai limiti ordinari del volo, e precisamente in picchiata quando C_p tende verso la portanza nulla, la velocità di volo tende invece verso un valore finito; quindi la stabilità del *secondo tipo* tende a svanire. Ciò non avviene per quella del *primo tipo*, che tende in quel caso a un valore finito e determinato.

Riservandoci in una prossima Nota di applicare questi concetti e queste formulazioni allo studio della stabilità di un velivolo a comandi bloccati; qui osserveremo che la (3) definisce una lunghezza fittizia

$$\bar{x}_g = x_g - \alpha_1 y_g + 2\beta_1 C_p y_g \tag{4}$$

la quale può introdursi con vantaggio nello studio della stabilità; poichè tiene conto non solo della posizione in lunghezza del baricentro rispetto al fuoco, ma anche di quella in altezza.

Questa quantità $\bar{x}_g$ nella teoria della stabilità dinamica viene perciò a indicare l'entità della stabilità *statica* in dipendenza della posizione del baricentro; e poichè risulta che tale stabilità deve mantenersi positiva per tutti i regimi ordinari di volo, la quantità $\bar{x}_g$ deve sempre risultare positiva in volo librato.

Ora l'altezza y_q del fuoco rispetto al baricentro menoma il valore di $\bar{x}_q$, sopratutto alle massime portanze, se $y_q < 0$: cosicchè, introducendo nella

espressione di $\bar{x}_q$ al posto di C_p il suo massimo valore (per es. $C_p = 0.5$), si può tracciare dal fuoco una *retta limite* della posizione del baricentro, per $y_g < 0$.

Analogamente alle minime portanze e al disotto di $C_p = C_{p1}$ il valore di $\bar{x}_q$ è menomato (se $\alpha_1 > 0$) per $y_g > 0$; cosicchè introducendo nella (4) per C_p il valore *zero* si può tracciare dal fuoco una *retta limite* della posizione del baricentro, per $y_q > 0$.

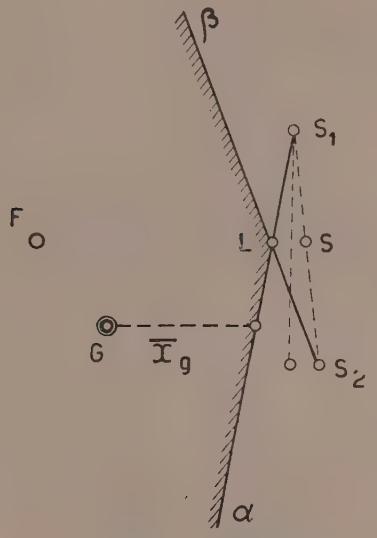


Fig. 2.

La limitazione della posizione del baricentro così individuata consente altresì di tener conto della eventuale *escursione del fuoco*. Sebbene l'entità di tale escursione non sia ancora sperimentalmente confermata, è tuttavia opportuno preventivarla [1].

Nel caso che si abbia un abbassamento del fuoco col crescere della portanza ne risulterà rispetto al fuoco medio preso in considerazione nella figura 1, una posizione più elevata, S_1, per $C_p = 0$ ed una meno elevata S_2 per $C_p = C_{p\,max}$ (fig. 2).

Basta perciò che le due rette limiti su definite siano tracciate, come in fig. 2, la prima a partire da S_2 verso l'alto ($y_g < 0$) e la seconda a partire da S_1 verso il basso ($y_g > 0$).

Esse si incontreranno in un punto L e limiteranno la posizione del baricentro, precisando come in figura la quantità $\bar{x}_g$. S'intende che il punto L

(1) G. A. Crocco, loc. cit.

coincide col fuoco S nel caso che non esista alcuna escursione ed il fuoco possa ritenersi praticamente immobile.

I coefficienti angolari delle due rette limiti $S_1\alpha$, ($C_f = 0$) e $S_2\beta$($C_f = 0.5$), risulteranno eguali ad α_1 e $\beta_1 - \alpha_1$ rispettivamente.

Ci riserviamo di prendere in considerazione in una prossima Nota le limitazioni derivanti dall'azione dell'elica nel motovelivolo.

Biologia. — *Eliminazione di sostanza nucleare ed adesione dei gameti in un Ciliato in relazione all'agglutinazione nella fecondazione dei Metazoi.* Nota [1] del Socio A. Russo.

In una Nota precedente [2] misi in rilievo che i micronuclei o nuclei sessuali dei gameti, che compiono la 2ª *coniugazione accessoria di Cryptochilum e.*, avendo forma allungata, quasi di virgola, emettono dalla parte sottile o da tutto lo strato periferico, secondo la categoria cui appartengono, una sostanza, che fu messa in evidenza con la *sopracolorazione* all'Ematossilina ferrica. Tale sostanza, che ho chiamato *siderofila*, non fa parte della cromatina nucleare, che è condensata nella parte ingrossata del micronucleo, e, dopo essersi resa libera, si sparge nel protoplasma, dove in parte si scioglie, ma in parte si localizza in punti determinati della periferia, dove i gameti debbono aderire fra loro.

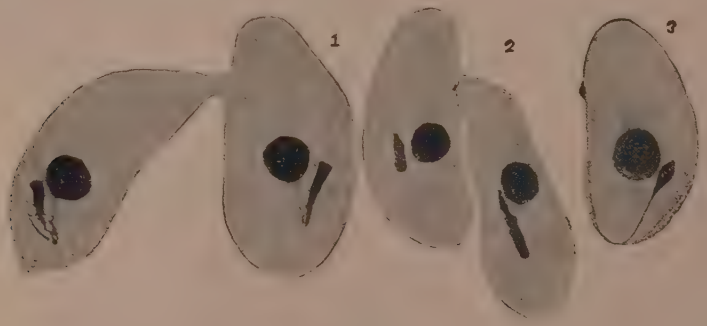


Fig. 1.

1. Stadio iniziale della 2ª coniugazione accessoria.
2. Stadio avanzato della stessa coniugazione.
3. Gamete isolato con sostanza siderofila alla periferia del protoplasma, nel punto in cui i gameti aderiscono.

Oc. 4 comp. Ob. 2.0 mm. imm. tubo alz. 18. Piano tavolo. Zeiss.
(ridotte a metà).

(1) Pervenuta all'Accademia il 6 ottobre 1934.

(2) Russo A., *Sopra una sostanza siderofila emessa dai micronuclei dei gameti impuri* ecc., «Rend. R. Acc. N. Lincei», Roma, 1925.

I gameti in questa coniugazione, che è abortiva, difficilmente si attaccano, sicchè spesso, nei preparati, si osservano alcune coppie unite da un sottile cordone protoplasmatico, mentre altre aderiscono con larga superficie. La sostanza nucleare, che si localizza nel punto in cui i gameti si toccano e che si osserva nei primi momenti dell'adesione e solo in pochi casi, quando l'adesione è completa, si presenta sotto forma di globuli intensamente colorati, o sotto forma di dischi, qualche volta accostati tra loro.

Nei preparati si osservano spesso gameti isolati, appartenenti alla stessa categoria di quelli coniugati, i quali, alla periferia del protoplasma, dove avviene l'adesione, fan vedere un addensamento di sostanza siderofila. È da ritenere tali gameti si siano staccati, dopo avere lassamente aderito, e ciò per il fatto che l'emissione della sostanza siderofila dai nuclei, fu sempre osservata nei primi momenti della copula.

Fig. 2.
Stadi diversi della eliminazione della sostanza siderofila dalla periferia dei nuclei dei gameti, che compiono la 2ª coniugazione accessoria.
Oc. 12 comp. Obb. imm. 1/15, piano tav., tubo alz. 18, Koristka.
(ridotte a metà).

Nei gameti, che compiono la *vera coniugazione* e la *1ª coniugazione falsa* o *accessoria*, nessuna sostanza siderofila fu osservata, quando essi sono pronti all'accoppiamento. Una sostanza nucleare analoga viene però espulsa dai micronuclei negli stadi, che precedono la formazione dei gameti e propriamente negli *Individui misti* e nei *Gametogeni puri* della categoria femminile, che fanno parte del *ciclo principale;* nei *Gametogeni impuri*, negli *exconiuganti* e nei nuovi *Gametogeni puri*, anche della categoria femminile, appartenenti al *ciclo accessorio*. In tutti questi individui, il nucleo sessuale (micronucleo) si divide per *mitosi* e fra i nuclei derivati si costituisce un lungo *filamento siderofilo*, ingrossato nel mezzo, che subito diviene libero nel protoplasma, dove si scioglie [1].

Negli *Individui misti* e nei *Gametogeni* della categoria maschile, in cui il nucleo sessuale (micron.) si divide per *amitosi*, anche con le sopracolorazioni all'Ematossilina ferrica, fu osservato, interposto fra i nuclei derivati,

(1) Per dettagliate notizie sulle varie forme di *Cryptochilum echini* Mps, vedasi: A. Russo, *Ciclo evolutivo di « Crypt. ech.» Maupas.*, « Atti R. Acc. N. Lincei », Roma, 1930.

un fuso di sostanza quasi incolore, limitato da sottilissima parete, con qualche filamento nel mezzo. Di tale sostanza, come nel caso precedente, non si ha traccia quando si sono costituiti i due gameti maschili.

Il filamento siderofilo, osservato durante la divisione del nucleo degli individui sopra elencati, si distingue, per particolari caratteri, dal filo, che connette i nuclei in divisione, durante la coniugazione. Difatti, mentre nei primi esso comparisce fra i nuclei in stato avanzato della divisione, ordinariamente sotto forma di sottili filamenti, alcune volte ondulati ed intrecciati, che successivamente si allungano e si fondono, formando un rigonfiamento fortemente colorato nella parte mediana, quello che connette i

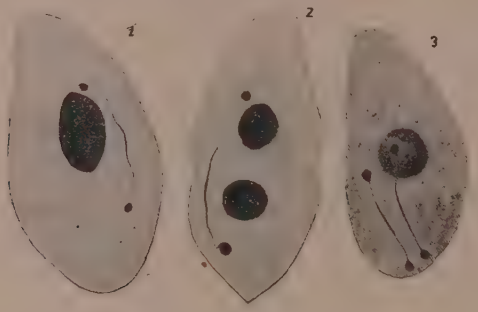


Fig. 3.

1. Gametogene puro, in divisione, con filamento siderofilo.
2. Gametogene impuro, in divisione, con filamento siderofilo.
3. Exconiugante, formatosi dopo la 1ª coniugazione accessoria, con nuclei legati da filamenti siderofili.

Oc. 4. comp. Obb. 0.2 mm. imm. tubo alz. 18. Piano tavolo, Zeiss.
(ridotte a metà)

nuclei, durante la coniugazione, è molto sottile e dello stesso calibro. Mentre, nel primo caso, il filamento si assottiglia subito ai due estremi per potersi staccare dai nuclei, rimanendo per qualche tempo libero nel protoplasma; nel secondo caso, il filo connettivo segue a lungo i nuclei e, specialmente in quelli migranti, esso si osserva fino a che tali nuclei non siano passati nel Gamete opposto, dove spesso una parte filiforme permane, per qualche tempo, come un'appendice.

Al filamento siderofilo, formazione caratteristica degl'individui pregametici, osservato in altri ciliati (*Ophryoscolecidi*-Dogiel. « Arch. f. Protistenk », 1925), non fu assegnato finora alcun significato fisiologico.

Non ostante l'incertezza, che esiste a tale riguardo, l'eliminazione di sostanza nucleare, osservata nei gameti, che compiono la 2ª *Coniugazione accessoria*, e la successiva localizzazione alla periferia del protoplasma, nel punto del loro incontro, potrebbe essere utilizzata nello studio dei complessi

fattori relativi all'azione, intercorrente tra ova e spermi, al momento della fecondazione, riferita ai fenomeni della agglutinazione.

Al riguardo, è ammesso che lo strato corticale delle ova, che hanno raggiunto la maturità, contenga una sostanza colloidale, diffusibile anche all'esterno, che esercita una preminente influenza su l'adesione dei gameti. La comparsa di tale sostanza, rilevata in seguito a fecondazioni artificiali, ottenute con vari mezzi sperimentali, dal Lillie [1] detta *fertilizina*, e che avrebbe funzione di *ambocettore*, pare coincida con l'inizio delle divisioni maturative o *meiotiche* della vescicola germinativa, poichè essa non si forma nelle ova immature, le quali perciò non attraggono e quindi non fanno aderire gli spermi. Fu supposto che, in tale periodo, sciogliendosi la membrana nucleare, alcuni materiali, contenuti nel nucleo, resi liberi, potessero localizzarsi nello strato corticale, influendo sul fenomeno dell'agglutinazione, al quale fenomeno parteciperebbero da parte loro anche gli spermi con prodotti propri, che si ritiene elaborati nella testa.

Lillie ritiene però, che la fertilizina possa essere preformata e che essa sia comparabile ad uno *zimogene*, pronto ad essere convertito in forma attiva, per azione del succo nucleare. Ammettendo tale succo possa trasudare dalla parete della vescicola germinativa, si spiegherebbero teoricamente alcune fecondazioni (*Nereis*) prima delle divisioni maturative. (*It is more probable that it exists in a state comparable to zymogen ready to be converted into active form, and that the escape of nuclear sap furnishes the necessary conditions*).

In tutti i casi, l'influenza del nucleo ovulare, nel prodursi di una particolare sostanza colloidale nello strato corticale delle ova, potrebbe dare alla emissione di materiali dai nuclei sessuali dei gameti, che debbono compiere la 2ª *Con. accessoria* e, verosimilmente, al filamento siderofilo degli *individui pregametici*, per lo meno il valore di dato positivo, che, qualunque possa essere la natura chimica di detti materiali e la loro partecipazione al fenomeno dell'agglutinazione, suggerisce un nuovo indirizzo alle ricerche sui complessi fenomeni di fecondazione dei Metazoi, su cui esiste già una ricca letteratura [2].

(1) F. R. Lillie, *Studies of fertilization*. VI. *The mechanism of fertilization in Arbacia*, « The Journal of Experimental Zoology », vol. 16, n. 4, 1914.

(2) Parte della letteratura, relativa all'agglutinazione, è riferita nel lavoro di E. Godlewski. *Nouvelles recherches sur l'hétéroagglutination des spermatozoïdes et sur l'action d'extraits de cellules sexuelles d'espèces étrangères*, « Arch. de Biologie », to. XLV, fasc. 4, 1934.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Un théorème se rattachant à la méthode par récurrence (induction complète).* Nota [1] di S. Sarantopoulos, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Introduction [2].

1. Dans un Mémoire ayant le titre: *Sur l'existence des intégrales holomorphes des équations différentielles du premier ordre dans les cas singuliers* qui n'a pas encore paru, et dont j'ai donné un résumé dans une Note récente présentée par l'éminent savant Émile Picard à l'Académie des sciences de Paris [3], je me sers d'un théorème se rattachant à la méthode par récurrence. Nous allons communiquer ici la démonstration de ce théorème qui, à cause de sa généralité, nous semble intéressant. Une petite introduction nous servira pour faire ressortir la signification et l'importance de ce théorème d'une façons, nous croyons, simple.

2. En mathématiques il arrive très souvent qu'une proposition ne soit vraie que pour des valeurs particulières des quantités qu'elle contient. Si une de ces quantités, A, n'admet que des valeurs entières et l'on peut assurer que la proposition dont il s'agit, est vraie pour la valeur un, pour démontrer qu'elle est vraie généralement pour toutes les valeurs entières de A nous employons souvent la méthode par récurrence (autrement dite méthodhe de l'induction complète) qui consiste dans ceci: on accepte comme vrai le théorème proposé, pour une valeur ν de A en on démontre que, à cause des propriétés dont les autres quantités entrant dans la question jouissent par hypothèse, le théorème est vrai pour $\nu + 1$: On en conclut alors que le théorème est aussi vrai pour toutes les valeurs entières de ν.

Donc par la méthode de l'induction complète on démontre des théorèmes dans lesquels une quantité A prend des valeurs entières. Nous appellerons cette quantité, indice du théorème dans lequel elle se présente. Or, il est possible qu'un théorème contienne deux indices μ et ν, c'est-à-dire deux quantités n'admettant que des valeurs entières. Il peut arriver que ce théorème

(1) Pervenuta all'Accademia il 5 ottobre 1934.

(2) Un résumé de ce Mémoire a été communiqué au Congrès Interbalcanique de Mathématiciens qui a eu lieu le 2-9 septembre 1934, à Athènes.

(3) « Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris », to. 198, p. 1733, séance du 14 mai 1934.

soit vrai seulement pour des valeurs particulières de μ et ν. Mais s'il est vrai pour toutes les valeurs entières de μ et ν, pour le démontrer à l'aide de la méthode par récurrence, il faudrait assurer la vérité de ce théorème pour $\mu = 1$ et $\nu = 1$ et ensuite en acceptant la vérité de la proposition pour une valeur fine de ν et une valeur certaine de μ de démontrer que le théorème sarait vrai pour les entiers ν et $\mu + 1$. Il peut arriver, peut-être, que la proposition soit telle que cela ne soit accessible que seulement lorsque ν a la valeur 1. En général nous conclurons tout d'abord que le théorème est vrai pour $\nu = 1$ et μ quelconque. Ensuite il faudrait, en échangeant les rôles de ν et μ, faire voir que, si le théorème est vrai pour ν et μ, il serait aussi vrai pour $\nu + 1$ et μ. Alors nous serons sûrs que le théorème proposé étant vrai pour $\nu = 1$ et $\mu = 1$, il sera vrai aussi pour ν et μ quelconques.

En général, on peut s'imaginer un théorème contenant plusieurs indices, en nombre n quelconque. Alors on pourrait démontrer ce théorème en appliquant successivement la méthode par récurrence comme nous l'avons fait précédemment sur les deux indices ayant en vue que le nombre n des indices du théorème est aussi un indice. Cette affaire serait simple dans le cas qu'on pourrait réduire le théorème proposé contenant n indices à un autre ne contenant que $n - 1$ indices. Mais, en général, une telle réduction n'a pas toujours lieu d'une manière commode et la méthode par récurrence étant appliquée comme nous avons déjà expliqué sur les deux indices devient pénible, ou bien, en pratique, inapplicable.

Théorèmes.

3. Pour ce cas général nous avons démontré le théorème suivant concernant un nombre m quelconque d'indices.

Théorème se rattachant à la méthode par récurrence.

Supposons que la vérité d'une proposition dépend d'un nombre m d'indices

(1) $$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \cdots \rho_m.$$

Si la proposition est vraie

1° *pour chaque indice de* (1) *uniquement y contenu (c'est-à-dire tous les autres indices gardant la valeur zéro),*

2° *pour un nombre* ν *quelconque d'indices, pris de* (1) *arbitrairement, quand chacun d'eux a la valeur un (tous les* $m - \nu$ *autres gardant la valeur zéro),*

3° *pour un nombre n quelconque d'indices*

$$r_1, r_2, \cdots r_u, \cdots r_n$$

pris de (1) *arbitrairement, quand on la suppose vraie pour tous ces indices après avoir remplacé l'un d'eux, par exemple* r_u *par* $r_u - 1$, *u pouvant être arbitrairement un des nombres* $1, 2, 3, \cdots n$, *(tous les* $m - n$ *autres indices gardant la valeur zéro);*

Alors, sous toutes ces trois conditions, la proposition sera vraie pour tous les indices, quelles que soient leurs valeurs entières (positives).

4. Pour démontrer ce théorème il nous faut donner une suite d'autres théorèmes préparatoires (1). Pour la facilité du langage nous donnons tout d'abord la définition suivante.

Définition. – Nous appellerons proposition (A) *de m indices une proposition dont la vérité dépend d'un nombre m d'indices* $\rho_1, \rho_2, \cdots \rho_m$ *et pour laquelle les trois hypothèses* 1°, 2°, 3° *du théorème précedent sont remplies.*

Si $m - n$ des m indices $\rho_1, \rho_2, \cdots \rho_m$ prennent la valeur zéro, en même temps, et la gardent constamment, la proposition (A) se réduit à une autre proposition ne contenant que n indices pour laquelle, évidemment, les mêmes hypothèses 1°, 2°, 3° (qui concerne maintenant n indices) sont remplies par elles-mêmes (comme étant remplies dans le cas qu'elles concernaient m indices). Donc la nouvelle proposition est aussi une proposition (A) mais de n indices.

Enfin, nous remarquons que dans les trois hypothèses 1°, 2°, 3° du théorème précédent, et dans celles que nous rencontrerons dans les théorèmes suivants, l'ordre suivant lequel nous écrivons les indices ne joue aucun rôle. Cependant pour la facilité de l'exposition de nos raisonements nous prenons soins de les ordonner dans un ordre tels que ces indices ne croissent pas.

Théorèmes auxiliaires.

5. Théorème I. – *Une proposition* (A) *de m indices étant vraie pour* $m - 1$ *indices (ayant des valeurs quelconques), est aussi vraie pour les m indices dans le cas où l'un d'eux a une valeur quelconque et chacun des autres la valeur un.*

Démonstration. – a') A cause de l'hypothèse, le théorème est vrai pour $m - 1$ indices quelconques, donc il est vrai quand l'un de $m - 1$ indices est quelconque et chacun des autres a la valeur un, donc pour m tels indices, y compris un indice égal à zéro.

b') Admettons de plus, pour un moment, que le théorème est vrai pour m indices, quand l'un d'eux, l'indice ρ, a une valeur particulière λ et les autres la valeur un.

Nous montrerons alors que le théorème sera vrai aussi pour les m indices

$$\lambda + 1, 1, 1, \cdots 1, 1,$$

(1) Dans la présente Note nous envisageons deux théorèmes seulement; les autres feront l'objet d'une autre Note prochaine.

que l'on obtient de m indices

$$\lambda, 1, 1, \cdots 1, 1,$$

en augmentant l'indice λ d'une unité.

En effet, on remarque que la proposition est vraie:

pour les m indices $\lambda, 1, 1, \cdots 1, 1,$ à cause de l'hypothèse b',

» » » $\lambda + 1, 0, 1, \cdots 1, 1,$ » du cas a',

» » » $\lambda + 1, 1, 0, \cdots 1, 1,$ » » »,

.....

» » » $\lambda + 1, 1, 1, \cdots 1, 0$ » » ».

Donc, à cause de l'hypothèse 3° de la proposition (A), celle-ci sera vraie aussi pour les m indices

$$\lambda + 1, 1, 1, \cdots 1, 1,$$

dont un est égal à $\lambda + 1$ et tous les autres sont égaux à l'unité.

Mais la proposition (A) est vraie pour les m indices

$$1, 1, 1, \cdots 1, 1,$$

à cause de l'hypothèse 2°; c'est-à-dire, le théorème est vrai pour une valeur perticulière de ρ ($\rho = 1$) et par conséquent l'hypotése b' est remplie. On en conclut donc, que le théorème sera aussi vrai pour $\rho = 1 + 1 = 2$, c'est-à-dire pour les m indices:

$$2, 1, 1, \cdots 1, 1.$$

Mais alors l'hypothèse b' est aussi remplie pour une valeur particulière $\rho = 2$, donc le théorème doit être vrai aussi pour $\rho = 2 + 1 = 3$, c'est-à-dire pour les m indices:

$$3, 1, 1, \cdots 1, 1,$$

et ainsi de suite. On en conclut donc, que la proposition (A) étatit vraie (pour $m - 1$ indices quelconques et par suite) pour les $m - 1$ suivants:

$$\rho, 1, 1, \cdots 1,$$

où ρ est quelconque, elle sera vraie aussi pour les m indices

$$\rho, 1, 1, \cdots 1, 1,$$

ρ étant de nouveau quelconque. C. Q. F. D.

Théorème II. – *Une proposition* (A) *étant vraie pour* $m-1$ *indices (ayant des valeurs quelconques), supposons de plus qu'elle soit aussi vraie:*

α') *pour les* m *indices*

$$(2) \qquad \rho_1, \rho_2, \rho_3, \cdots, \rho_u, \alpha, \alpha, \cdots \alpha,$$

où l'on a $\rho_1 \geqq \rho_2 \geqq \rho_3 \geqq \cdots \geqq \rho_u > \alpha \geqq 1$, *(hypothèse* α*);*

β') *pour une suite d'indices provenant de la suite* (2), *quand on diminue chacun de ses termes d'une quantité quelconque d'unités, (hypothèse* β*);*

γ') *pour une suite de* m *indices*

$$(3) \qquad \rho_1 - \varepsilon_1, \rho_2 - \varepsilon_2, \cdots \rho_u - \varepsilon_u, b_{u+1}, b_{u+2}, \cdots b_m,$$

où l'on a $\rho_\lambda - \varepsilon_\lambda \geqq 0$, $\varepsilon_\lambda \geqq 0$, $(\lambda = 1, 2, \cdots u)$, *et les termes* b_{u+1}, $b_{u+2}, \cdots b_m$ *ne dépassent pas aucun des nombres* $\rho_\lambda - \varepsilon_\lambda$, *(hypothèses* γ*);*

Alors, (c'est-à-dire, les trois hypothèses α, β, γ *étant remplies), la proposition* (A) *sera vraie pour la suite de* m *indices*

$$(4) \qquad \rho_1, \rho_2, \cdots \rho_u, \alpha + 1, 1, 1, \cdots 1$$

qui provient de la suite (2) *quand on augmente l'un des indices égaux à* α *d'une unité et on remplace chacun des suivants par l'unité.*

De plus, toutes les trois hypothèses α, β, γ *seront remplies aussi quand on considère la suite d'indices* (4).

Démonstration. – On remarque

1) que, pour les indices

$$(5) \qquad \rho_1, \rho_2, \cdots \rho_\lambda - 1, \cdots \rho_u, \alpha + 1, 1, 1, \cdots 1, 1,$$

où λ prend les valeurs $1, 2, \cdots u$, la proposition (A) doit être vraie. En effet, on a, évidemment, $\rho_\lambda - 1 \geqq \alpha$. a') Si donc, on a $\rho_\lambda - 1 = \alpha$, la suite (5) peut être écrite

$$\rho_1, \rho_2, \cdots \alpha, \cdots \rho_u, \rho_\lambda, 1, 1 \cdots 1, 1,$$

donc, après avoir rangé les termes dans un ordre tel qu'ils n'aillent pas en croissant,

$$\rho_1, \rho_2, \cdots \rho_\lambda, \cdots \rho_u, \alpha, 1, 1, \cdots 1, 1.$$

Mais cette suite provient de (2), si l'on diminue quelques uns de ses termes. Donc, la proposition (A) est vraie pour la suite d'indices (3), (à cause de l'hypothèse β). b') Si l'on a $\rho_\lambda > \alpha + 1$ et par suite $\rho_\lambda - 1 > \alpha$, alors on aura $\rho_\lambda - 1 \geqq \alpha + 1$. Mais alors la suite d'indices (5) provient de la suite (2) après qu'on ait remplacé les indices $\rho_1, \rho_2, \cdots \rho_\lambda, \cdots \rho_u$ par

$$(5') \qquad \rho_1 - 0, \rho_2 - 0, \cdots \rho_\lambda - 1, \cdots \rho_u - 0$$

et les autres (les α) qui suivent ρ_u par les $\alpha + 1, 1 \cdots 1$ qui ne dépassent aucun de (5'). Donc, conformément à l'hypothèse γ, la proposition (A) sera vraie pour la suite (5).

Pour conséquent dans tous les deux cas a') et b') et par suite pour toutes les valeurs $1, 2, \cdots u$ de λ la proposition (A) doit être vraie. Cela veut dire que la proposition (A) est vraie pour toutes les suites d'indices:

$$\rho_1 - 1, \rho_2, \cdots \rho_u, \alpha + 1, 1, 1, \cdots 1, 1$$

$$\rho_1, \rho_2 - 1, \cdots \rho_u, \alpha + 1, 1, 1, \cdots 1, 1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\rho_1, \rho_2, \cdots \rho_{u-1} - 1, \rho_u, \alpha + 1, 1, 1, \cdots 1, 1,$$

$$\rho_1, \rho_2, \cdots \rho_{u-1}, \rho_u - 1, \alpha + 1, 1, \cdots 1, 1.$$

Elle est aussi vraie pour les indices

$$\rho_1, \rho_2, \cdots \rho_u, \alpha, 1, 1, \cdots 1, 1,$$

en vertu de l'hypothèse β'.

D'ailleurs, on a supposé que la proposition (A) est vraie pour $m - 1$ indices quelconques, c'est-à-dire pour m indices dont l'un est égal constamment à zéro. Donc, elle est vraie pour toutes les suites d'indices suivantes:

$$\rho_1, \rho_2, \cdots \rho_u, \alpha + 1, 0, 1, 1, \cdots 1, 1$$

$$\rho_1, \rho_2, \cdots \rho_u, \alpha + 1, 1, 0, 1, \cdots 1, 1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\rho_1, \rho_2, \cdots \rho_u, \alpha + 1, 1, 1, 1, \cdots 1, 0.$$

Ainsi, on voit que la proposition (A) est vraie pour tous les m indices qui proviennent de la suite

$$(6) \qquad \rho_1, \rho_2, \cdots \rho_u, \alpha + 1, 1, 1, \cdots 1, 1,$$

après avoir diminué l'un quelconque d'eux d'une unité. Par conséquent, à cause de l'hypothèse 3° qui doit être remplie en vertu de la définition de la proposition (A), elle doit être vraie aussi pour la suite d'indices (6), c'est-à-dire pour la suite d'indices (4).

Donc la première partie du théorème est démontrée. Pour démontrer maintenant que la deuxième partie du théorème est aussi vraie, c'est-à-dire que les trois hypothèses α, β, γ sont remplies quand on considère la suite d'indices (4) nous procédons comme il suit:

1) Nous avons déjà demontré que la proposition (A) est vraie pour les indices (4), donc l'hypothèse α est remplie.

2) L'hypothèse β est aussi remplie, c'est-à-dire la proposition (A) est aussi vraie pour les indices qu'on obtient de la suite (4) quand on diminue ses termes d'un nombre quelconques d'unités. Nous distinguons trois cas.

a') Soit, qu'à ces diminutions, un au moins indice égal à l'unité prend part. Alors on obtiendra une suite contenant $m-1$ au plus indices différents de zéro pour lesquels, à cause de l'hypothèse général faite sur la proposition (A) quand elle contient $m-1$ indices quelconques, elle sera vraie.

b') Soit qu'aux diminutions citées le terme $\alpha+1$ prend part, tentis que tous ceux qui sont égaux à l'unité ne s'y contiennent pas. Alors on obtiendra une suite de m indices de la forme

$$(7) \qquad \rho_1-\varepsilon_1, \cdots \rho_u-\varepsilon_u, (\alpha+1)-\varepsilon_{u+1}, 1, 1, \cdots 1,$$
$$(\text{où } 0<\alpha+1-\varepsilon_{u+1}\leqq\alpha).$$

Cette suite peut être obtenue, évidemment, aussi par diminution des termes de la suite (2). Donc la proposition (4) est vraie pour la suite d'indices (7), à cause de l'hypothèse β.

c') Supposons qu'aux diminutions citées l'indices $\alpha+1$ et tous ceux, qui ont la valeur un, gardent leurs valeurs. Alors nous distinguons deux cas particulières. Soit tout d'abord, que quelques uns des

$$\rho_1, \rho_2, \cdots \rho_u,$$

ou tous, deviennent plus petits que $\alpha+1$. Alors la suite qu'on obtient sera de la forme

$$(8) \qquad \rho_1-\varepsilon_1, \rho_2-\varepsilon_2, \cdots \rho_\lambda-\varepsilon_\lambda, \cdots \rho_u-\varepsilon_u, \alpha+1, 1, \cdots 1,$$
$$(\text{où } \varepsilon_\lambda\geqq 0),$$

et un au moins de $\rho_\lambda-\varepsilon_\lambda$ $(\lambda=1, 2, \cdots u)$ est plus que $\alpha+1$. En écrivant les indices suivant l'ordre de grandeur non croissant, on aura

$$(9) \qquad \rho_{n_1}-\varepsilon_{n_1}, \cdots \rho_{n_i}-\varepsilon_{n_i}, \alpha+1, \cdots \rho_{n_u}-\varepsilon_{n_u}, 1, \cdots 1, 1, \cdots 1$$

où

$$\rho_{n_i}-\varepsilon_{n_i}\geqq\alpha+1 \quad \text{et} \quad \rho_{n_{i+h}}-\varepsilon_{n_{i+h}}<\alpha+1, i<i+h\leqq u.$$

Mais cette suite provient évidemment de (2), quand on diminue ses termes d'autant d'unités, autant sont nécessaires pour que les indices

$$\rho_1, \rho_2, \cdots \rho_u, \alpha+1,$$

deviennent égaux aux indices

$$\rho_{n_1} - \varepsilon_{n_1}, \cdots \rho_{n_i} - \varepsilon_{n_i}, \alpha + 1, \cdots \rho_{n_u} - \varepsilon_{n_u}$$

et que chacun des termes suivants se réduise à l'unité. Donc pour la suite (9), c'est-à-dire (8), la proposition (A) est de nouveau vraie. Soit maintenant qu'en diminuant les

$$\rho_1, \rho_2, \cdots \rho_u,$$

on obtient des termes plus grand que $\alpha + 1$. Alors on aura de nouveau une suite de la forme (8). En écrivant ses termes suivant l'ordre de grandeur non croissant, $\alpha + 1$ viendra après le plus petit de

$$(10') \qquad \rho_1 - \varepsilon_1, \rho_2 - \varepsilon_2, \cdots \rho_u - \varepsilon_u.$$

Cette suite, donc, se contient dans les suites

$$(10) \qquad \rho_1 - \varepsilon_1, \rho_2 - \varepsilon_2, \cdots \rho_u - \varepsilon_u, b_{u+1}, b_{u+2}, \cdots b_m,$$

où $b_{u+1}, b_{u+2}, \cdots b_m$, peuvent avoir des valeurs, au plus, égales au plus petit de (10'). Mais pour toutes ces suites (10) la proposition (A) doit être vraie à cause de l'hypothèse γ. Donc la proposition (A) est vraie pour les indices (10) qui s'obtiennent de (2) si l'on pose

$$b_{u+1} = \alpha + 1, b_{u+2} = b_{u+3} = \cdots = b_m = 1.$$

On a démontré donc que l'hypothèse β est remplie quand on considère les indices (4).

3) Il nous reste à démontrer que l'hypothèse γ est aussi remplie quand on considère les indices (4).

En effet, si l'on remplace, d'une part, les termes

$$\rho_1, \rho_2, \cdots \rho_u \quad \text{et} \quad \alpha + 1$$

par les suivants

$$(11) \qquad \rho_1 - \varepsilon_1, \rho_2 - \varepsilon_2, \cdots \rho_\lambda - \varepsilon_\lambda, \cdots \rho_u - \varepsilon_u,$$
$$(\alpha + 1) - 1 - \varepsilon_{u+1} \quad \text{où} \quad \varepsilon_{u+1} \geqq 0, \varepsilon_\lambda \geqq 0 \quad (\lambda = 1, 2, \cdots u),$$

et d'autre part, les restes termes par d'autres $b_{u+2}, \cdots b_m$, inférieurs ou, au plus, égaux au plus petit des termes (11), on aboutira alors à la suite d'indices

$$(12) \qquad \rho_1 - \varepsilon_1, \cdots \rho_u - \varepsilon_u, \alpha - \varepsilon_{u+1} - 1, b_{u+2}, \cdots b_m$$

qui évidemment peut être obtenue de la suite (2) tout simplement par diminution de ses termes. Donc, à cause de l'hypothèse β, la proposition (A) sera vraie pour cette suite d'indices (12).

Si aux diminutions citées, $\alpha + 1$ ne se contient pas, on aboutira à une suite d'indices de la forme

$$\rho_1 - \varepsilon_1 , \rho_2 - \varepsilon_2 , \cdots \rho_u - \varepsilon_u , \alpha + 1 - 0 , b_{u+2} , \cdots b_m$$

où les indices $b_{u+2} , \cdots b_m$ ne dépassent pas le plus petit des indices $\alpha + 1 - 0$ et $\rho_\lambda - \varepsilon_\lambda$ ($\lambda = 1 , 2 , \cdots u$) entre lesquels un au moins de ε_λ est supérieur ou égal à l'unité. Dans ce cas si $\alpha + 1$ est inférieur ou égal au plus petit des $\rho_\lambda - \varepsilon_\lambda$, alors la suite (13) provient évidemment de (2) quand on applique l'hypothèse γ, car dans cette suite on remplace $\rho_1 , \rho_2 , \cdots \rho_u$ par des termes inférieurs $\rho_1 - \varepsilon_1 , \cdots \rho_u - \varepsilon_u$ et les restes termes $\alpha , \alpha , \cdots \alpha$, par d'autres inférieurs ou égaux au plus petit des $\rho_\lambda - \varepsilon_\lambda$. Mais, nous avons dit, tels sont le terme $\alpha + 1$ et les $b_{u+2} , \cdots b_m$.

Donc la proposition (A) est vraie pour les indices (13).

Si $\alpha + 1$ est plus grand que tous les $\rho_\lambda - \varepsilon_\lambda$ ou quelques uns d'eux et on a écrit les indices (13) dans un ordre de grandeur non croissant, on obtiendra, p. e., la suite

$$(14) \quad \rho_{n_1} - \varepsilon_{n_1} , \cdots \rho_{n_i} - \varepsilon_{n_i} , \alpha + 1 , \rho_{n_{i+1}} - \varepsilon_{n_{i+1}} , \cdots \rho_{n_{u-1}} - \varepsilon_{n_{u-1}} ,$$
$$\rho_{n_u} - \varepsilon_{n_u} , b_{u+2} , \cdots b_m$$

qui provient, évidemment, de la suite (2) si l'on diminue les indices

$$(14') \qquad \rho_1 , \rho_2 , \cdots \rho_i , \cdots \rho_u$$

d'un nombre d'unités égal respectivement au nombre nécessaire, pour qu'on obtienne

$$(14'') \quad \rho_{n_1} - \varepsilon_{n_1} , \rho_{n_2} - \varepsilon_{n_2} , \cdots \rho_{n_i} - \varepsilon_{n_i} , \alpha + 1 , \rho_{n_{i+1}} - \varepsilon_{n_{i+1}} , \cdots \rho_{n_{u-1}} - \varepsilon_{n_{u-1}}$$

en remplaçant, en même temps, les indices suivants $\alpha , \alpha , \cdots \alpha$, par d'autres inférieurs ou égaux au plus petit de (14''), c'est-à-dire par

$$\rho_{n_u} - \varepsilon_{n_u} , b_{u+2} , \cdots b_m .$$

Donc la proposition (A) est vraie pour les indices (14) et par suite pour les indices (13).

Si au lieu de la suite (14) on a

$$(15) \quad \alpha + 1 , \rho_{\pi_1} - \varepsilon_{\pi_1} , \cdots \rho_{\pi_{u-1}} - \varepsilon_{\pi_{u-1}} , \rho_{\pi_u} - \varepsilon_{\pi_u} , b_{u+2} , \cdots b_m ,$$

on voit pareillement, que celle-ci provient de la suite (2), si l'on diminue les indices (14') pour avoir

$$(15') \qquad \alpha + 1 , \rho_{\pi_1} - \varepsilon_{\pi_2} , \cdots \rho_{\pi_{u-1}} - \varepsilon_{\pi_{u-1}}$$

en remplaçant les suivants indices $\alpha , \alpha , \cdots \alpha$, par $\rho_{\pi_u} - \varepsilon_{\pi_u} , b_{u+2} , \cdots b_m$ qui ne dépassent pas les indices (15'). Donc, aussi dans ce cas, la proposition (A) est vraie pour les indices (15), c'est-à-dire pour les indices (13).

On en conclut que l'hypothèse γ est remplie quand on considère la suite d'indices (4).

Donc le théorème est démontré complètement.

Matematica (Analisi). — *Su una classe di funzionali analitici.* Nota I[1] di G. Belardinelli, presentata dal Socio S. Pincherle.

1. L'analisi delle trasformazioni funzionali ha avuto dal Pincherle e dal Fantappiè sistemazioni che si ricollegano rispettivamente agli indirizzi classici di Weierstrass e di Cauchy relativi alle funzioni analitiche. La trasformazione di Laplace–Abel, l'inversione degli integrali definiti, le serie ordinate per potenze di D, i funzionali normali ecc., sono altrettanti capitoli dell'Analisi Funzionale della quale il Pincherle ha dato classici risultati.

I concetti di funzionale analitico e di funzione indicatrice sono stati analizzati dal Fantappiè il quale ha dimostrato che ad ogni funzionale analitico lineare corrisponde una funzione indicatrice ed inversamente, ad ogni funzione analitica corrisponde una funzionale analitico lineare che ha quella funzione per indicatrice. Una classe importante di funzionali analitici è data dai funzionali normali la cui funzione indicatrice è stata chiamata dal Fantappiè funzione *caratteristica.*

La classe dei funzionali che considero in questa Nota e nelle seguenti, la cui trattazione sarà esposta più estesamente in altra rivista, è quella dei funzionali normali che hanno per funzione caratteristica le funzioni ipergeometriche di Goursat, funzionali che chiamo *funzionali ipergeometrici.*

2. Sia

$$(1) \qquad F[y(t); x] = f(x) ,$$

un funzionale lineare misto tale che ad ogni funzione analitica $y(t)$ regolare in un certo campo C faccia corrispondere un'altra funzione pure analitica regolare in una regione C'.

(1) Pervenuta all'Accademia il 27 settembre 1934.

Il valore del funzionale può essere espresso mediante l'integrale curvilineo

$$(2) \qquad F[y(t);x] = \frac{1}{2\pi i}\int_c v(x,t)\,y(t)\,dt,$$

ove c è una curva chiusa che racchiude tutti i punti non regolari della $y(t)$ lasciando all'esterno i punti in cui la $v(x,t)$ non è definita.

Se la funzione indicatrice è della forma

$$(3) \qquad v(x,t) = -\frac{1}{t}k\left(\frac{x}{t}\right),$$

essendo $k(x)$ una funzione analitica il funzionale è stato chiamato normale e $v(x,t)$ funzione caratteristica.

Tra le funzioni più semplici che si presentano nella analisi abbiamo le funzioni razionali ed è quindi naturale che i funzionali normali che hanno per funzione caratteristica una funzione razionale siano stati studiati esaurientemente. È stato infatti dimostrato che i funzionali lineari misti che hanno tali funzioni caratteristiche possono esprimersi mediante un numero finito di derivazioni, sostituzioni di funzioni assegnate e moltiplicazioni di funzioni assegnate ed inversamente.

Lo studio dei funzionali che hanno per funzione caratteristica la funzione esponenziale ha fatto oggetto pure di numerose ricerche.

È naturale chiedersi, in rapporto alle classiche proprietà delle funzioni ipergeometriche del tipo così detto di Goursat ed in particolar modo alla proprietà che esse hanno di rappresentare quasi tutte le funzioni più usali della analisi, tra cui anche la funzione esponenziale, le proprietà dei funzionali normali che hanno per indicatrici tali funzioni ipergeometriche.

Chiameremo questi funzionali normali *funzionali normali ipergeometrici* o semplicemente *ipergeometrici*.

3. Studiamo prima di tutto il funzionale normale che ha per caratteristica la funzione ipergeometrica di Gauss

$$(4) \qquad -\frac{1}{t}F\left(\alpha,\beta,\gamma,\frac{x}{t}\right),$$

pensata quale funzione di t, e che chiameremo *funzionale ipergeometrico di Gauss*; indichiamolo con

$$H[y(t);\alpha,\beta,\gamma,x]$$

od anche quando non vi sarà ambiguità con

$$H^{\alpha,\beta}_{\gamma,x}y \quad \text{o semplicemente con} \quad Hy \quad \text{od} \quad H.$$

Abbiamo subito

$$(5) \qquad Hy = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{t} F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{t}\right) y(t)\, dt,$$

quanto alla curva chiusa c vi è da osservare che essendo $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ singolare per $x = 1$, $x = \infty$ la funzione

$$\frac{1}{t} F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{t}\right),$$

pensata funzione di t, sarà singolare per $t = 0$, $t = x$ quindi la curva chiusa c dovrà racchiudere, per il cambiamento di segno della funzione caratteristica nello integrale, questi due punti singolari e lasciare fuori i punti singolari della $y(t)$. Il funzionale Hy è dunque definito per ogni y regolare nella origine $t = 0$. Per ogni tale funzione fissiamo un x tale che y sia regolare per $t = x$ allora, se y è funzione analitica nel senso di Weierstrass, dovrà esistere un cammino L congiungente $t = 0$, con $t = x$, lungo il quale la y sarà ancora regolare.

La funzione $f(x) = H_{\gamma_1}^{\alpha\beta} y$ che corrisponde ad y è definita come funzione di x nello stesso campo in cui è definita la y e nell'interno la y è regolare.

Però se $t = t_0$ è un punto singolare isolato per la y, nel cui intorno la y è monodroma, la (x) corrispondente avrà in generale per $x = t_0$ un punto singolare, ma di diramazione, dipendente il valore di Hy dal cammino L che congiunge lo zero con x.

Il cammino L può pensarsi come taglio di Hermite congiungente i punti singolari 0 ed x di

$$\frac{1}{t} F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{t}\right).$$

È facile vedere la polidromia del funzionale ipergeometrico $H_{\gamma_1}^{\alpha\beta} y$ e determinare il salto della $f(x)$ quando la curva c di integrazione attraversa il taglio L.

4. Chiameremo, come abbiamo detto, funzionali normali ipergeometrici quelli nei quali la funzione caratteristica è una funzione ipergeometrica di Goursat, cioè della forma

$$(6) \qquad \frac{1}{t} \sum \frac{(\alpha_1, n)(\alpha_2, n) \cdots (\alpha_h, n)}{(\gamma_1, n)(\gamma_2, n) \cdots (\gamma_k, n)} \frac{x^n}{t^n}$$

ove $(\alpha_r, n) = \alpha_r (\alpha_r + 1) \cdots (\alpha_r + n - 1)$.

Indicheremo questi funzionali con

$$H\left[y(t); {}^{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_h}_{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k} x\right] \quad \text{o con} \quad H_{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k}^{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_h} y$$

per questi funzionali si possono fare le osservazioni esposte per il funzionale ipergeometrico di Gauss, sia a riguardo della validità, sia a riguardo della polidromia.

Chiameremo *k ordine*, $k - h$ *classe* del funzionale ipergeometrico; funzionali ipergeometrici *completi* quelli in cui k è eguale ad h cioè di classe 0, *confluenti* quelli in cui $k > h$.

Notiamo subito che un funzionale ipergeometrico confluente trasforma una funzione analitica, regolare nell'intorno dell'origine, in una funzione intera.

5. La rappresentazione dei funzionali H mediante serie di potenze si ottiene immediatamente. Si ha, se la funzione $y(t)$ è data dalla serie

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,$$

dalla teoria dei residui che

$$(7) \qquad H\left[y(t); \begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_h \\ \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k \end{matrix} x\right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_r \frac{(\alpha_1, n) \cdots (\alpha_h, n)}{(\gamma_1, n) \cdots (\gamma_k, n)} x^n.$$

Inoltre si ha evidentemente

$$H^{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_h}_{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k} y = H^{\alpha_1}_{\gamma_1} H^{\alpha_2}_{\gamma_2} \cdots H^{\alpha_h}_{\gamma_h} H_{\gamma_{h+1}} \cdots H_{\gamma_k}.$$

Due funzionali si presentano quindi quali funzionali elementari cioè

$$H^{\alpha}_{\gamma} \quad \text{ed} \quad H_{\gamma}$$

mediante i quali si possono costruire gli operatori ipergeometrici di qualunque ordine e classe.

Notiamo subito che il funzionale H_1 trasforma una funzione y regolare nell'intorno dell'origine in una funzione intera, *funzione associata di Borel*.

Inoltre si ha che

$$(8) \qquad H_{\gamma} = \lim_{\varrho \to \infty} H^{\varrho}_{\gamma} y\left(\frac{t}{\rho}\right),$$

cioè l'operatore ipergeometrico confluente H_γ si ottiene mediante passaggio al limite dell'operatore completo H^{α}_{γ}.

6. Una funzione razionale regolare nell'intorno dell'origine è della forma

$$(9) \qquad y(t) = y_1(t) + y_2(t) = \sum_{r=0}^{n} c_r t^r + \sum_{h=1}^{m} \sum_{k=1}^{m_h} \frac{a_{h,k}}{(t - v_h)^k},$$

con $v_h \neq 0$.

Prendiamo in considerazione il funzionale

$$H_\gamma^\alpha$$

e determiniamo il risultato di questo funzionale sulle funzioni razionali della forma (9).

Per la proprietà del funzionale H_γ^α di essere lineare si ha

$$H_\gamma^\alpha y = H_\gamma^\alpha y_1 + H_\gamma^\alpha y_2 .$$

Inoltre sarà

$$H_\gamma^\alpha y_1 = \sum_{r=0}^{n} \frac{(\alpha , r)}{(\gamma , r)} c_r t^r . \tag{10}$$

Cioè ad un polinomio di grado n un funzionale H_γ^α fa corrispondere un polinomio di grado n ove il coefficiente di posto erresimo è moltiplicato per $\frac{(\alpha , r)}{(\gamma , r)}$.

I valore poi del funzionale per una frazione razionale semplice è

$$H_\gamma^\alpha \left[\frac{1}{(t - v)^k} ; x \right] = \frac{(-1)^k}{v^k} F\left(\alpha , x , \gamma , \frac{x}{v} \right) . \tag{11}$$

Possiamo quindi concludere che un funzionale ipergeometrico H_γ^α applicato a funzioni razionali è esprimibile mediante la somma di un polinomio dello stesso grado di y_1 e formato come alla formola (10) e della somma di funzioni ipergeometriche di Gauss della forma (11).

Il risultato del funzionale ipergeometrico applicato ad una funzione ipergeometrica può esprimersi, come facilmente si potrebbe dimostrare, mediante il seguente teorema:

« Data una funzione ipergeometrica di ordine k e di classe θ, applicandole un funzionale H di ordine k' e di classe θ' si ottiene una funzione ipergeometrica di ordine $k + k'$ e di classe $\theta + \theta'$ ».

Come esempio abbiamo che dalla funzione completa di ordine zero $\frac{1}{1 - x}$ abbiamo, col funzionale H_1^α di ordine zero, la funzione completa $\frac{1}{(1 - x)^\alpha}$ di ordine zero, mentre col funzionale confluente H_1, dalla medesima funzione, la funzione e^x di ordine zero e classe uno. Così pure la funzione di Bessel, $J(\gamma , x)$, si può ottenere dalla funzione $\frac{1}{1 - x}$ mediante i due funzionali H_α ed H_1.

Nelle Note seguenti vedremo l'importanza di questi funzionali in rapporto alle operazioni di integrazione e di derivazione e ad altri operatori classici dell'Analisi Funzionale.

Meccanica. — *Sulle curve definite da un sistema di equazioni differenziali di secondo ordine.* – II. *Qualche proprietà delle traiettorie nel problema dei tre corpi del Hill.* Nota[1] di N. MOISSEIEV, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Abbiamo mostrato nella Nota precedente: *Intorno ad un metodo di analisi qualitativa applicato ai problemi dinamici con due gradi di libertà* [2], l'esistenza di una certa curva sul piano del moto: luogo geometrico dei punti nel quale avviene il contatto delle traiettorie con una data famiglia di curve

$$f(x, y) = \text{cost}$$

– contatto non inferiore di second'ordine – questa curva può essere anche detta *caratteristica dei contatti* colla famiglia di curve prese in considerazione.

Ci proponiamo di dare nella presente Nota un'esempio di applicazione di detta curva allo studio delle proprietà delle traiettorie in un problema classico di meccanica celeste, voglio dire, nel problema dei tre corpi del Hill, come possiamo adeguatamente specificare il problema del moto di un punto che corrisponde al seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= w'_x, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= w'_y, \end{aligned} \tag{2.1}$$

dove

$$\begin{aligned} w &= \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{r}, \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Su queste equazioni (2.1) si basa, come è noto, la teoria del Hill circa le orbite periodiche in vicinanza della massa minore nel problema ristretto dei tre corpi, ed esse non sono altro che equazioni semplificate del moto in questo problema. L'integrale di Jacobi per le equazioni (2.1) sarà:

$$v^2 = 3x^2 + 2r + 2h. \tag{2.3}$$

L'equazione della curva di velocità zero sarà:

$$3x^2 + 2r + 2h = 0. \tag{2.4}$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 29 agosto 1934.
(2) Cfr. p. 178 di questo stesso volume di «Rendiconti».

Non ci tratterremo a definire le caratteristiche di questa curva (vedi la Memoria del Hill: *Researches into the Lunar Theory*, « Collected mathemat. works », vol. I) ma ci limiteremo a notare, che l'ovale circondante la massa situata sull'origine delle coordinate (questa massa minore noi, per amore di brevità, designeremo in seguito *terra*) rimane chiuso allora quando i valori della costante di Jacobi h soddisfano alla disuguaglianza:

$$(2.5) \qquad -\infty < h < -2.163.$$

Quando $h = -2.163$, quest'ovale combacia col ramo esterno della curva nel punto di librazione situato sull'asse x.

Nella presente Nota ci limiteremo allo studio di moti, in cui la costante h soddisfa alla disuguaglianza (2.5) e che si svolgono dentro all'ovale, circondante la terra.

Costruiamo dapprima la quantità D caratteristica per il fascio delle traiettorie (vedi formula (1.4) della Nota precedente):

$$(2.6) \qquad D = (w_x'^2 + w_y'^2) - 4v^2 = -3x^2 - \frac{8}{r} - \frac{6x^2}{r^3} + \frac{1}{r^4} - 8h.$$

Un piccolo studio, che tralasciamo di riportare qui, dimostra, che per tutti i valori della costante h, i quali possono interessarci in seguito, il valore di D rimane positivo. Ciò significa, che in ogni punto delle regioni, che ci interessano, degli ovali di Hill, circondanti la terra, sono possibili traiettorie di moto rotatorio intorno al momentaneo centro di curvatura, tanto in senso diretto quanto in senso retrogrado. Dalla stessa caratteristica di Darwin segue, che in ogni punto della regione che ci interessa, troviamo due traiettorie tangenti alla linea equipotenziale che passa per questo punto – una di moto diretto, – l'altra di moto retrogrado, mentre la concavità di entrambe le traiettorie avrà la stessa direzione come nella corrispondente linea equipotenziale a cui sono tangenti, vale a dire – in direzione della terra. In ogni punto della regione sono possibili due traiettorie, aventi un flesso in questo punto. Le direzioni delle tangenti che corrispondono a questi flessi, possono essere calcolate per ognuno dei punti secondo formule ben definite che non staremo a riportare qui. Risulta ad ogni modo, che queste direzioni formano dappertutto con la tangente un angolo abbastanza grande rispetto alla linea equipotenziale e non sono in ogni caso troppo vicine alla normale del raggio vettore del punto.

Così, in nessun caso dei possibili valori di h che ci possono interessare, la curva di Darwin oppure la caratteristica del fascio di traiettorie:

$$(2.7) \qquad D = 0$$

non avrà punti entro la regione che ci interessa.

Passiamo ora ad indagare le proprietà dei contatti delle traiettorie con una qualunque delle famiglie di linee chiuse, circondanti la terra. Come tale possiamo p. es. assumere la famiglia di linee equipotenziali, ma a scopo di semplificazione delle equazioni, preferiamo alle linee equipotenziali sostituire delle circonferenze che differiscono poco dalle predette per quanto concerna lo scopo da noi prefisso. Così l'equazione del nostro sistema topografico di cicli chiusi (come l'avrebbe chiamato il Poincaré) sarà:

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0. \tag{2.8}$$

Valendoci delle equazioni (1.8) e (1.9) della Nota precedente, noi scriveremo le seguenti equazioni:

il luogo geometrico per contatti di reazione zero di traiettorie dirette è

$$R_+^* \equiv 8r^2\left[-r\sqrt{3x^2 + \frac{2}{r} + 2h} - 6x^2 - \frac{1}{r} - 2h\right] = 0, \tag{2.9}$$

e luogo geometrico di contatti di reazione zero per traiettorie retrograde è

$$R_-^* \equiv 8r^2\left[+r\sqrt{3x^2 + \frac{2}{r} + 2h} - 6x^2 - \frac{1}{r} - 2h\right] = 0. \tag{2.10}$$

Notiamo che i segni in queste equazioni sono scelti in modo, che il termine « moto diretto » corrisponda al moto rotatorio del punto intorno alla terra in senso inverso alla lancetta dell'orologio.

Per investigare le curve caratteristiche dei contatti che così otterremo, consideriamo da prima il caso, quando la costante h è negativa ed assai grande per valore assoluto. Allora solo valori minimi del raggio vettore r potranno essere presi in considerazione.

Tralasciando nelle equazioni (2.9) e (2.10) i termini di ordine superiore, ricaviamo la seguente forma approssimativa di queste equazioni, valente nelle condizioni suddette:

$$R_+^* \equiv 8r^2\left[-2\sqrt{2r(1 + hr)} - \frac{1 + 2hr}{r}\right] = 0 \tag{2.11}$$

$$R_+^* \equiv 8r^2\left[+2\sqrt{2r(1 + hr)} - \frac{1 + 2hr}{r}\right] = 0. \tag{2.12}$$

Da questo è facile vedere, che nel caso di una h negativa di grandezza considerevole, la curva caratteristica dei contatti consta di due circoli, i valori approssimati dei cui raggi saranno:

per contatti diretti:

$$r = \frac{1}{-2h - 2\left(\sqrt{-2h}\right)^{-1}} \tag{2.13}$$

e per contatti retrogradi:

$$r = \frac{1}{-2h + 2\left(\sqrt{-2h}\right)^{-1}} \tag{2.14}$$

mentre la curva di velocità zero può, con il medesimo grado di precisione, essere paragonata ad un circolo con raggio:

$$r = \frac{1}{-h}. \tag{2.15}$$

Un'indagine più dettagliata, che tralasciamo qui, dimostra, che, quando il valore di h aumenta fino al valore critico:

$$h = -2.163,$$

le curve caratteristiche dei contatti ritengono la loro forma ovaloide. Bisogna notare, che l'ovale corrispondente ai moti retrogradi è compreso entro l'ovale corrispondente ai moti diretti e quest'ultimo, a sua volta, entro l'ovale di velocità zero. Vediamo inoltre, che sopra i circoli (2.8) la reazione per i moti diretti - oppure, ciò che è lo stesso, - la quantità R_+^* con precisione approssimativa fornita dal termine positivo - sarà negativa all'interno dell'ovale (2.9) e positiva fuori di esso. Proprietà analoghe avrà anche la quantità R_-^* rispetto al suo ovale di reazione zero (2.10).

Da tutto ciò che precede risulta la conclusione seguente: per ogni valore definito di h soddisfacente alla condizione (2.5) la regione di moto possibile situata entro l'ovale delle velocità zero (2.4) è divisa da due curve chiuse di forma ovaloide (2.9) e (2.10) in tre zone anulari.

Nella prima di queste zone, interna rispetto all'ovale (2.10) e racchiudente entro se stessa la terra, - sono possibili contatti solo esterni con il sistema di circoli (2.8) tanto per moti diretti quanto per moti retrogradi. Ciò significa, che entro questa zona sono possibili solo perigei delle traiettorie qualunque sia la direzione del moto su queste. Da ciò segue, che entro questa zona non può esser compresa completamente: 1) nessuna orbita periodica; 2) nessun'altra orbita, che non sia di collisione colla terra. (Per ciò che riguarda i punti angolari la traiettoria del nostro problema non possono averne affatto, e quanto ai punti di regresso questi possono aver luogo solo sulla linea di velocità zero).

E così la prima zona risulta aciclica nel senso lato della parola o «aneiciclica». La seconda zona compresa fra gli ovali (2.9) e (2.10) possiede le seguenti particolarità: traiettorie con moto in senso diretto possono avere entro questa zona contatti solo esterni, traiettorie con moto in senso inverso possono avere entro questa zona contatti solamente interni. Questa seconda zona è quindi aciclica nel senso lato per traiettorie, non aventi punti di flesso. Traiettorie non uscenti da questa zona, devono necessariamente avere flessi in numero non minore dei contatti col sistema (2.8).

La terza ed ultima zona, compresa fra l'ovale (2.9) e l'ovale delle velocità zero (2.4) sarà aciclica nel senso lato o « anepiciclica » per traiettorie di qualsiasi direzione di moto indipendentemente dal fatto, che questa traiettoria possiede punti di flesso o no. La possibilità di punti di regresso sulla frontiera di questa regione non contraddice alla giustezza di questa asserzione, perchè i punti suddetti non possono in nessun modo compensare mancanti contatti esterni con il sistema (2.8).

A complemento di questo esame generale, bisogna notare, che abbiamo escluso di proposito dalla nostra indagine traiettorie asintotiche rispetto alle linee (2.9) e (2.10) ed anche traiettorie, aventi contatto col sistema (2.8) situate su queste stesse curve – « caratteristiche di contatti ». E così, se vogliamo precisare le conclusioni precedenti, dobbiamo dire, che le espressioni: regioni, zona ecc. debbano dappertutto essere intese come regione aperta, in cui non sono compresi i contorni (frontiere).

Da quanto precede si possono dedurre parecchie conseguenze concrete rispetto alla disposizione di orbite periodiche, comprese entro l'ovale (2.4). L'orbita chiusa, non avente punti di flesso, deve – se essa è di moto diretto – avere il suo perigèo dentro all'ovale (2.9) ed il suo apogèo all'infuori dello stesso ovale; se essa è di moto retrogrado, arriviamo a conclusioni analoghe sostituendo all'ovale (2.9) – l'ovale (2.10).

Nel problema del Hill, però, come dimostrò questo esimio matematico, esistono di fatto orbite periodiche del moto diretto.

Non ci pare perciò privo d'interesse di fare un raffronto fra la disposizione delle orbite di Hill e le caratteristiche qualitative, riportate da noi più sopra; con questo raffronto intendiamo concludere la presente Nota.

Per ogni valore di h il Hill ottiene un'orbita definita il cui perigèo è disposto sull'asse x a distanza x_π dalla terra, e l'apogèo è situato sull'asse y a distanza dalla terra y_α. Valendoci dell'equazione (2.9) abbiamo calcolato, per gli stessi valori di h, le coordinate dei punti di intersezione con gli assi coordinati della curva caratteristica dei contatti delle traiettorie di moto diretto con i circoli (2.8) x_+, y_+. Queste coordinate sono trascritte nelle colonne 4 e 9 della annessa tabella. Nelle colonne 7 e 12 diamo le differenze delle distanze dalla terra dei punti d'intersezione con gli assi delle orbite di Hill e delle nostre curve corrispondenti (2.9). I segni di queste differenze dimostrano la concordanza perfetta fra le nostre caratteristiche qualitative ed i risultati dei calcoli che condussero il Hill alle sue celebri soluzioni periodiche in vicinanza della massa minore.

Aggiungiamo un'altra osservazione concernente la tavola. Solo sette prime « lune » di Hill sono state comprese nella tavola. Per le rimanenti i valori nella costante h sono tali, che l'ovale delle velocità zero risulta già aperto. Nella colonna 6 e 11 diamo per confronto le coordinate x_H, y_H dei punti d'intersezione dei corrispondenti ovali di velocità zero con gli assi delle coordinate. E finalmente nelle colonne 5 e 10 diamo le coordinate

x_-, y_- dei punti d'intersezione con gli assi dell'ovale caratteristico (2.10) per moti retrogradi, i quali non vengono presi in considerazione nella presente Nota ad a cui si è accennato unicamente in vista di maggiore completezza d'esposizione.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	h	x_π	x_+	x_-	x_H	$x_\pi - x_+$	y_α	y_+	y_-	y_H	$y_\alpha - y_+$
						—					+
1	— 3.254	0.176	0.183	0.138	0.322	0.007	0.179	0.170	0.139	0.308	0.009
2	— 2.943	0.200	0.209	0.151	0.366	0.009	0.204	0.195	0.150	0.340	0.009
3	— 2.808	0.212	0.224	0.157	0.385	0.012	0.218	0.207	0.156	0.356	0.011
4	— 2.669	0.227	0.245	0.166	0.417	0.018	0.235	0.221	0.163	0.377	0.014
5	— 2.528	0.243	0.269	0.172	0.448	0.026	0.255	0 237	0.170	0.396	0.018
6	— 2.382	0.263	0.300	0.183	0.500	0.037	0.282	0.257	0.178	0.418	0.025
7	— 2.231	0.287	0.347	0.193	0.560	0.060	0.317	0.284	0.187	0.444	0.033
						—					+

Meccanica. — *Sulle curve definite da un sistema di equazioni differenziali di secondo ordine.* – III. *A proposito d'un metodo di studio delle curve integrali nel sistema di tre equazioni differenziali di secondo ordine.* Nota [1] di N. Moisseiev, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Esaminiamo il sistema delle equazioni differenziali:

$$(3.1)\qquad \begin{cases} \ddot{x} = \varphi_1(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z), \\ \ddot{y} = \varphi_2(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z), \\ \ddot{z} = \varphi_3(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z), \end{cases}$$

ed ammettiamo che ne sia noto un integrale della forma [2]

$$(3.2)\qquad v^2 \equiv \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \varphi_4(x, y, z, h)$$

dove h è la costante d'integrazione.

(1) Pervenuta all'Accademia il 29 agosto 1934.

(2) Tutti i ragionamenti che seguono rimangono validi, come può verificarsi senza difficoltà, anche se, in luogo dell'integrale (3.2), fosse dato un qualunque integrale primo del sistema (3.1).

Il problema dell'analisi qualitativa delle traiettorie del sistema (3.1) ha una grande importanza in generale, e riguardo alla meccanica celeste in particolare. Per quanto ci è noto, fino ad ora esisteva un solo metodo generale di tale analisi: intendiamo il metodo di Hill, fondato sullo studio della « superficie di velocità zero »:

$$\varphi_4 = 0 \tag{3.3}$$

la quale divide la regione del moto possibile da quella in cui il moto è impossibile.

Nella presente Nota ci permettiamo di attirare l'attenzione dei teoretici sopra un metodo di studio delle proprietà delle traiettorie del nostro sistema, alquanto differente da quello di Hill. Tale nostro procedimento, come si vedrà dalla susseguente esposizione, sta molto vicino per la sua sostanza ad alcuni dei metodi del Poincaré per lo studio delle proprietà delle curve definite da un sistema di due equazioni di primo ordine. D'altra parte, il procedimento in questione rappresenta uno sviluppo ulteriore e una generalizzazione di quel modo di studio delle proprietà delle traiettorie del sistema di due equazioni di secondo ordine il quale era esposto nelle nostre Note: *Intorno ad un metodo di analisi qualitativa applicato ai problemi dinamici coi due gradi di libertà* [1].

Esaminiamo una generica famiglia di superficie continue, non aventi alcuna singolarità nella regione dello spazio cui ci riferiremo:

$$f(x, y, z) = 0. \tag{3.4}$$

Ammettiamo che per ogni punto dello spazio nella parte di esso che ha interesse per noi passi soltanto una sola superficie della famiglia (3.4).

Conveniamo poi di considerare come esterna relativamente ad una delle superficie quella parte dello spazio, in cui $f(x, y, z) > 0$. Chiameremo direzione positiva della normale quella rivolta verso l'esterno.

Considerando il sistema (3.1) come spettante al moto libero di un punto materiale, possiamo associarvi equazioni del moto dello stesso punto, sotto le stesse forze, ma non più libero, sibbene ritenuto (senza attrito) dalla superficie (3.4). Tali equazioni saranno:

$$\left\{\begin{aligned} \ddot{x} &= \varphi_1 + R \cdot \frac{f'_x}{P}, \\ \ddot{y} &= \varphi_2 + R \cdot \frac{f'_y}{P}, \\ \ddot{z} &= \varphi_3 + R \cdot \frac{f'_z}{P}, \end{aligned}\right. \tag{3.5}$$

dove

$$P = |\text{grad. } f|.$$

(1) Cfr. pp. 178 di questo stesso volume di « Rendiconti ».

Scriviamo ancora le due equazioni:

$$f'_x \cdot \dot{x} + f'_y \cdot \dot{y} + f'_z \cdot \dot{z} = 0, \tag{3.6}$$

e

$$f''_{xx} \cdot \dot{x}^2 + f''_{yy} \cdot \dot{y}^2 + f''_{zz} \cdot \dot{z}^2 + 2f''_{xy} \cdot \dot{x} \cdot \dot{y} + 2f''_{yz} \cdot \dot{y} \cdot \dot{z} + \\ + 2f''_{zx} \cdot \dot{z} \cdot \dot{x} + f'_x \cdot \ddot{x} + f'_y \cdot \ddot{y} + f'_z \cdot \ddot{z} = 0, \tag{3.7}$$

conseguenze della (3.4).

Mercè le sei equazioni: (3.5), (3.2), (3.6) e (3.7) possiamo, generalmente parlando, definire la *componente* R *secondo la normale esterna* della reazione, offerta dalla nostra superficie $f = 0$, come una funzione delle coordinate x, y, z, della costante h dell'integrale (3.2) e di una delle sei quantità

$$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}). \tag{3.8}$$

Chiamando θ la quantità suddetta [1], possiamo scrivere in conformità

$$R = \underset{\cdot}{R}(x, y, z, h, \theta). \tag{3.9}$$

Per dati valori della costante h e delle coordinate del punto x, y, z, la reazione R è una funzione completamente definita di θ. Però θ, per ogni insieme di valori attribuiti a x, y, z, h, ha, per inconseguenza delle quattro equazioni (3.1) e (3.2), un intervallo ben definito di valori reali possibili.

Perciò, per il dato h, ad ogni punto (x, y, z) dello spazio corrisponde, generalmente parlando, un insieme definito di valori reali possibili di R. Indichiamo questo insieme con $R(\theta)$.

Dopo tutto ciò che abbiamo detto, possiamo stabilire una divisione dei punti dello spazio (x, y, z, h) in parti come segue:

$\overline{RZ}$ – La regione della possibilità della reazione zero, che rappresenta l'insieme dei punti, nei quali $R(\theta)$ contiene lo zero come uno dei suoi elementi.

RP – La regione delle reazioni positive, cioè l'insieme dei punti nei quali tutti gli elementi di $R(\theta)$ sono numeri positivi.

RN – La regione delle reazioni negative, in ogni punto della quale l'insieme $R(\theta)$ contiene solo i numeri negativi.

RM – La regione delle reazioni mescolate: rappresentante un insieme di punti non appartenenti ad alcuno dei tre insiemi testè definiti.

Qualora la funzione (3.9) sia continua mancherà questa ultima regione.

La costruzione delle suddette regioni ci sembra essere concettualmente possibile per ogni data famiglia di superficie (3.4).

(1) θ può anche essere una funzione qualsiasi delle quantità (3.8).

Esaminiamo adesso il significato geometrico delle sopraindicate caratteristiche delle regioni $\overline{RZ}$, RP e RN. All'uopo è necessario notare che, nel caso del contatto di una traiettoria colla superficie (3.4), se la reazione è positiva, il contatto è interno; cioè la traiettoria tocca la superficie dalla parte interna. Mentre il segno negativo della reazione indica, che il contatto è esterno. Finalmenie il valore zero della reazione indica che tra la traiettoria e la superficie ha luogo un contatto, d'ordine non inferiore del secondo.

Così la regione RP è una regione nella quale solamente i contatti interni sono possibili; la regione RN è una regione dove solamente i contatti esterni sono possibili, e finalmente la regione $\overline{RZ}$ è una regione dove sono possibili tanto i contatti esterni, quanto quelli interni, ed anche contatti d'ordine superiore.

Di qui segue, se non mi inganno, che la costruzione delle regioni descritte rappresenta un modo di studio delle relazioni delle traiettorie del sistema (3.1) con i sistemi più vari di superficie, il che può dare un numero non scarso di utili notizie riguardo alle proprietà delle traiettorie.

Immaginiamo infatti che in un certo caso di un dato sistema (3.1) accada che ad un certo sistema debitamente scelto di superficie chiuse, continue e non aventi singolarità particolari – tutti tre gli insiemi RP, RN, $\overline{RZ}$ risultino non vuoti e rappresentino porzioni continue dello spazio x, y, z, h e nello stesso tempo la regione $\overline{RZ}$ divida o le regioni RP e RN l'una dall'altra, o loro parti separate – nel caso di connessione moltiplice.

Allora, naturalmente e senza altri calcoli, arriviamo ad una serie di caratteristiche delle proprietà delle traiettorie le quali possono aver luogo nel nostro problema.

È poi evidente che in questo caso saremo costretti a concludere, che le regioni RP e RN, ognuna di esse separatamente, sono per certe regioni « acicliche in senso largo » o « anepicicliche » mentre la regione $\overline{RZ}$ è incerta dal punto di vista dell'« aciclicità nel senso largo ».

Modificando convenientemente la famiglia (3.4) possiamo continuare la nostra investigazione più in là nella medesima direzione.

Il termine qui adoperato (non molto adatto) di « regione aciclica in senso largo » o il termine « anepiciclica » deve significare: la regione dove la traiettoria non può essere situata interamente, nè come curva chiusa (ciclo), nè dall'altro tipo (epiciclo). Supponiamo con tutto che la traiettoria non abbia i punti di regresso, o punti angolari, o nodi nel centro della regione (cioè nel punto dove la superficie corrispondente diventa un punto), o finalmente, punti di cessazione, semplici o assintotici (del tipo « foyer »), nei punti singolari del sistema (3.1).

Dalla precedende esposizione appare che la regione $\overline{RZ}$ della possibilità delle reazioni zero ha nel nostro metodo un'importanza analoga all'impor-

tanza che ha nel metodo di ricerche dei cicli limiti di Poincaré « la curva dei contatti » delle curve integrali del sistema di due equazioni di primo ordine col sistema topografico di curve piane, l'analogia delle quali troviamo nel nostro metodo della famiglia di superfici (3,4). Bisogna notare anche una certa affinità tra il concetto « delle linee e delle superficie di reazione nulla » studiate da noi da una parte, ed il concetto « della superficie intersecata da tutte le traiettorie » di Birkhoff dall'altra.

Parimente si capisce benissimo, che il metodo dello studio delle traiettorie nei problemi dinamici con due gradi di libertà indicato nella nostra Nota sopraindicata non è altro che un caso particolare del metodo della presente Nota. E davvero nel problema piano fra le traiettorie del fascio, provenienti da un dato punto, ci sono, generalmente parlando, solo due traiettorie che soddisfano alla condizione del contatto, mentre nel problema dello spazio ve ne sono infinite. E questo vuol dire, che invece di mettere in correlazione per ogni punto dello spazio (x, y, z, h) di un certo insieme infinito di valori di θ, nel problema piano noi mettiamo in correlazione per ogni punto (x, y, h) solo due *certi* definiti valori del suddetto parametro θ. (In certe condizioni R nel problema dello spazio può dipendere da θ non uniformemente. Allora anche nel problema dello spazio avremo una divisione dell'insieme $R(\theta)$ in due, tre, ecc. parti, al pari di ciò, che accade sul piano. Per altro è chiaro, che mediante una scelta opportuna di θ questo può essere evitato nel problema dello spazio).

Perciò ne risulta che nel problema piano la regione $\overline{RZ}$ si degenera semplicemente in due curve, una delle quali rappresenta un luogo geometrico di contatti con una reazione zero per uno dei due suddetti valori di θ (per i moti diretti) mentre l'altra rappresenta un medesimo luogo geometrico corrispondente al secondo valore di quel parametro (per i moti retrogradi).

Astronomia. — *Misure di stelle doppie.* Nota [1] di G. L. Andrissi, presentata dal Socio G. Armellini.

Le misure di stelle doppie iniziate nel R. Osservatorio Astronomico sul Campidoglio dal prof. F. Giacomelli [2], riprese dal prof. G. Armellini [3] e tuttora continuate, rientrano nei lavori sistematici dell'Osservatorio.

Le osservazioni riportate in questa Nota sono state da me fatte con l'equatoriale di sette pollici Cauchoix–Cavignato, seguendo i ben noti metodi di osservazione [4]. E cioè: 1° Ho avuto sempre cura che l'ingrandimento fosse il massimo tollerato per le condizioni atmosferiche nell'istante delle osservazioni ed in modo che gli astri risultassero, secondo le norme di Struve [5], visibili il più nettamente possibile. L'ingrandimento usato variava, a seconda delle sere e della larghezza della coppia da osservare, da 150 a 300 diametri; 2° Dopo avere, sera per sera, determinato il *punto zero* del cerchio di posizione, ruotando il micrometro in modo che il filo fisso venisse a disporsi parallelamente al parallelo dell'astro, ponevo il filo mobile, distante qualche secondo dal filo fisso e racchiudevo, fra tali fili paralleli, la congiungente i centri delle due stelle in modo che essa risultasse parallela ai due fili stessi. In tali misure avevo cura di tenere la testa inclinata in modo che la congiungente i due occhi risultasse o parallela o normale alla congiungente le due stelle, secondo quanto consiglia il prof. G. Armellini [6]; 3° Dopo aver posto il filo mobile normalmente alla congiungente i centri delle due stelle, determinavo la loro distanza angolare portando dapprima il filo mobile a bisecare il satellite ed il filo fisso la componente principale e quindi ruotavo il tamburo fino a quando l'astro principale veniva

(1) Pervenuta all'Accademia il 4 settembre 1934.

(2) F. Giacomelli, *Prima serie di misure micrometriche di stelle doppie* ecc. Questi «Rendiconti», ser. 4ª, R. VI, 2 (1890), 161–169; ser. 2ª, id., 276-284; ser. 3ª, id., VII, 1 (1891), 80–87.

(3) G. Armellini, *Angoli di posizione di 50 stelle doppie* ecc. Questi «Rendiconti», ser. 5ª, XXXI, 1 (1922), 76-80; *Misure di stelle doppie* id., ser. 6ª, VI, 2 (1927), 551-556; *Misure di stelle doppie*, id., ser. 6ª, X, 2 (1929), 3–6; *Osservazione di stelle doppie*, «Astronomischen Nachrichten», Band 230 (1927), 253-254; id., Band 232 (1928), 431-432; id., Band 237 (1929), 167-168, id., Band 245 (1932), 373-374.

(4) G. Armellini, *Trattato di Astronomia siderale*, vol. II, p. 418 e seg. Ed. Zanichelli. Bologna.

(5) W. Struve, *Stellarum Duplicium e Multiplicium Mensurae Micrometricae.* Petropoli, 1837.

(6) G. Armellini, Note cit.

ad essere bisecato dal filo mobile ed il satellite dal filo fisso. Allora la distanza angolare ρ, chiamando con V_1 e V_2 le due letture fatte, sul tamburo della vite, è data da [1]:

$$\rho = \frac{1}{2} p (V_2 - V_1)$$

dove p è il valore di una divisione della vite micrometrica, che era stato determinato precedentemente dal prof. Millosevich con il metodo delle declinazioni e dal prof. Armellini con il metodo delle ascensioni risultando, in perfetto accordo, $p = 0''.2814$.

Le stelle vennero scelte dal *General Catalogue of Double Stars* di S. W. Burnham (Washington, 1906) ed in generale osservai ogni stella per almeno tre sere eseguendo ogni sera, al minimo, tre misure per l'angolo di posizione e tre misure per la distanza, sempre a campo lucido.

Nella tabella I sono riportate: nella 1ª colonna in numero d'ordine della stella doppia; nella 2ª colonna, la data dell'osservazione; nella 3ª colonna, il numero della stella secondo il *Catalogo* del Burnham; nella 4ª colonna e nella 5ª, rispettivamente l'angolo di posizione ϑ e la distanza ρ delle componenti.

(1) G. Armellini, op. cit., p. 420.

TABELLA I.

N	Data	Stella	ϑ	ρ	N	Data	Stella	ϑ	ρ
	1900								
1	30.86	205	303°.4	16″.30	7	29.94	2821	45°.4	4″.82
	.87		303 .9	15 .09		.99		45 .6	4 .72
	.88		303 .7	15 .50		30.00		45 .7	4 .65
	30.87		303 .7	15 .63		.19		45 .6	4 .72
						30.03		45 .6	4 .73
2	30.75	426	271 .0	8 .38					
	.77		270 .1	8 .23	8	29.94	2843	139 .4	11 .46
	.78		270 .6	8 .25		.99		140 .8	11 .18
	30.77		270 .6	8 .29		30.00		140 .2	11 .17
						29.98		140 .1	11 .27
3	30.70	520	193 .0	8 .73					
	.70		193 .7	8 .42					
	.71		193 .2	8 .50	9	29.24	3185	112 .1	29 .20
	30.70		193 .3	8 .55					
					10	29.94	3435	210 .7	19 .18
4	30.75	860	9 .9	12 .80		.99		210 .5	19 .38
	.77		9 .9	12 .54		30.00		210 .4	19 .46
	.78		9 .7	12 .56		29.98		210 .5	19 .34
	30.77		9 .8	12 .63					
					11	31.15	3692	154 .2	6 .40
5	30.86	1070	63 .6	10 .77		.26		153 .4	6 .01
	.87		63 .1	10 .73		31.20		153 .8	6 .20
	88		63 .4	10 .75					
	30.87		63 .4	10 .75					
					12	30.24	4602	44 .7	5 .77
6	29.70	1125	36 .6	16 .78		.24		44 .4	6 .36
	.85		38 .0	16 .78		.25		43 .8	6 .77
	29.77		37 .3	16 .78		30.24		44 .3	6 .30

Segue: TABELLA I.

N	Data	Stella	ϑ	ρ	N	Data	Stella	ϑ	ρ
13	29.99	4763	305°.8	30″.74	19	30.27	6263	187°.6	32″.57
	30.00		305 .5	30 .88		.30		187 .6	32 .87
	.19		305 .7	30 .78		.31		186 .8	32 .92
	30.06		305 .7	30 .80		30.29		187 .3	32 .79
14	30.24	6113	195 .9	22 .02	20	30.27	6474	75 .0	26 .13
	.24		194 .3	22 .39		.30		74. 8	26 .47
	.25		193 .9	21 .29		.31		75 .4	27 .52
	30.24		194 .7	21 .90		30.29		75 .1	26 .71
15	30.24	6212	271 .8	21 .86	21	30.27	6837	172 .3	5 .65
	.25		271 .3	21 .15		.30		172 .7	5 .65
	.27		271 .0	21 .68		30.29		172 .5	5 .65
	30.25		271 .4	21 .56					
16	30.24	6239	309 .5	5 .49	22	30.32	6887	261 .1	25 .42
	.25		309 .7	5 .50		.38		260 .9	25 .66
	.27		309 .0	5 .36		.39		260 .9	25 .65
	30.25		309 .4	5 .45		30.36		261 .0	25 .58
17	30.27	6243	319 .9	6 .38	23	30.32	6954	104 .1	5 .99
	.30		319 .5	5 .98		.38		103 .8	5 .64
	.31		319 .8	5 .89		.39		104 .0	5 .78
	30.29		319 .7	6 .08		30.36		104 .0	5 .80
18	30.27	6261	348 .3	16 .31	24	30.38	7031	44 .1	3 .55
	.30		348 .5	16 .17		.39		44 .7	3 .56
	.31		348 .3	16 .33		.40		45 .5	3 .74
	30.29		348 .4	16 .27		30.39		44 .8	3 .62

Segue: TABELLA I.

N	Data	Stella	ϑ	ρ	N	Data	Stella	ϑ	ρ
25	30.39	7111	348°.8	10″.19	31	29.63	7349	261°.4	16″.22
	.40		348 .6	10 .12		.68		262 .0	16 .36
	.45		348 .9	10 .05		.71		261 .2	15 .79
	30.41		348 .8	10 .12		29.67		261 .5	16 .12
26	30.39	7127	209 .9	4 .19	32	30.39	7500	323 .9	33 .56
	.40		210 .6	4 .33		.40		324 .9	36 .28
	.45		210 .2	4 .30		.47		323 .9	33 .84
	30.41		210 .2	4 .27		30.42		324 .2	34 .56
27	30.40	7162	10 .0	25 .55					
	.45		10 .2	24 .68	33	29.64	7514	9 .6	32 .71
	30.43		10 .1	25 .12		.68		10 .2	30 .88
						.68		10 .6	30 .17
28	30.39	7210	171 .4	13 .75		.70		9 .4	28 .48
	.40		171 .8	13 .55		30.50		9 .6	30 .88
	.47		171 .9	13 .62		29.84		9 .9	30 .62
	30.42		171 .7	13 .64					
					34	30.66	7563	222 .8	6 .06
29	30.39	3718	182 .3	3 .57		.67		222 .6	6 .22
	.40		183 .1	3 .61		.68		222 .2	5 .80
	.47		182 .3	3 .68		30.67		222 .5	6 .03
	30.42		182 .6	3 .62					
30	30.39	7334	189 .6	12 .37	35	30.49	8340	122 .6	6 .74
	.40		190 .3	11 .89		.50		122 .0	6 .87
	.47		189 .7	12 .31		.51		123 .1	6 .67
	30.42		189 .9	12 .19		30.50		122 .6	6 .76

Segue: TABELLA I.

N	Data	Stella	ϑ	ρ	N	Data	Stella	ϑ	ρ
36	30.49	8914	102°.7	22″ 00	42	30.49	10732	134°.5	24″.68
	.50		103 .0	20 .73		.50		133 .4	24 .68
	.51		102 .5	21 .01		.51		134 .2	24 .82
	30.50		102 .7	21 .25		.66		134 8	24 .82
						.67		134 .9	24 .53
37	30.75	9137	214 .6	9 .00		.68		134 .4	24 .68
	.77		214 .5	9 .10		30.59		134 .4	24 .70
	.77		214 .5	9 .00					
	30.76		214 .5	9 .03	43	30.79	10746	231 .4	3 .57
						.79		231 .0	3 .55
38	30.68	9374	53 .4	36 .69		.79		230 .5	3 .67
	.68		54 .4	33 .85		30.79		231 .0	3 .60
	.70		54 .9	34 .11					
	30.69		54 .2	34 .83					
					44	30.86	10985	219 .9	3 .54
39	30.91	10281	254 .8	17 .07		.87		219 .8	3 .61
	.92		254 .5	16 .92		.88		220 .1	3 .45
	.92		255 .1	16 .50		30.87		219 .9	3 .53
	30.92		254 .8	16 .83					
40	30.66	10504	3 .2	5 .65	45	30 79	11051	338 .7	2 .99
	.67		3 .5	5 .73		.79		339 .5	3 .09
	.68		4 .1	5 .25		.79		339 .2	3 .13
	30.67		3 .6	5 .54		30.79		339 .1	3 .07
41	30.49	10509	268 .2	10 .10					
	.50		270 .3	10 .72	46	30.91	11997	62 .7	3 .79
	.51		269 .8	10 .19		.92		62 .9	4 .09
	30.50		269 .4	10 .34		30.92		62 .8	3 .94

Segue: Tabella I.

N	Data	Stella	ϑ	ρ	N	Data	Stella	ϑ	ρ
47	30.79	12265	30°.6	5″.12	49	30.79	12312	83°.5	3″.13
	.79		30 .1	5 .08		.79		84 .7	3 .13
	.79		30 .0	5 .13		.79		84 .0	3 .14
	30.79		30. 2	5 .11		30.79		84 .1	3 .13
48	30.86	12304	207 .2	3 .05	50	30.79	12601	87 .9	4 .98
	.87		207 .4	2 .99		.79		88 .0	5 .01
	.88		207 .0	2 .99		.79		88 .3	4 .95
	30.87		207 .2	3 .01		30.79		88 .1	4 .98

Tra le cinquanta stelle osservate presentano un notevole moto orbitale le seguenti che riporto nella tabella II, dove: nella 1ª colonna, è dato il numero della stella corrispondente al *Catalogo* del Burnham (β) e nella 2ª colonna, è dato il numero corrispondente al *New General Catalogue of Double Stars* di R. G. Aitken (Washington, 1932); nella 3ª 4ª e 5ª colonna sono contenute la data, l'angolo di posizione e la distanza corrispondenti alle ultime osservazioni riportate nel *Catalogo* dello Aitken (1) ed, infine, nella 6ª, 7ª e 8ª colonna sono contenuti gli analoghi elementi tratti dalle mie osservazioni precedentemente riportate nella tabella I.

Tabella II.

β	A	Data	ϑ	ρ	Data	ϑ	ρ
205	361	1925.72	302°.5	17″.30	1930.87	303°.7	15″.63
426	671	1926.77	267 .6	8 .06	1930.77	270 .6	8 .29
860	1307	1922.55	2 .1	13 .17	1930.77	9 .8	12 .63
7563	9979	1925.49	220 .9	5 .31	1930.67	222 .5	6 .03
8340	11046	1926.51	126 .3	6 .24	1930.50	122 .6	6 .76

Dato il breve intervallo di tempo e trattandosi di stelle non circumpolari nella tabella precedente non si è proceduto alla riduzione allo stesso equinozio, e quindi non si è applicata alcuna correzione all'angolo di posizione.

(1) I valori riportati dall'Aitken sono generalmente la media delle osservazioni di più osservatori.

Chimica. — *Sui composti intermedi tra i ferrocianuri e le ferroammine* [1]. Nota [2] di A. G. Barbieri, presentata dal Socio M. Betti.

La sostituzione diretta nel ferrocianuro di potassio di molecole di KCN con molecole di ammoniaca o di basi organiche, non è possibile a causa della grande stabilità del complesso $[Fe(CN)_6]$. È noto infatti che per ottenere i composti del tipo

$$\left[Fe\overset{(CN)_5}{A}\right]Me^{I}_{3} \qquad A = \text{ammoniaca, metilamina, piridina ecc.}$$

bisogna seguire una via indiretta e partire da un sale complesso del ferro trivalente, il nitroprussiato: ma anche con questo artificio non è possibile di introdurre nel complesso del ferrocianuro più di una molecola di base monoacida [3].

Una via nuova che permette una sostituzione più profonda mi è stata suggerita dallo studio dei composti ferro-dipiridilici e ferro-fenantrolinici descritti da F. Blau [4]. Questi composti corrispondono alla formula generale

$$[FeB_3]X_2 \qquad B = \alpha,\alpha'\text{-dipiridile } C_{10}H_8N_2;\ o\text{-fenantrolina } C_{12}H_8N_2$$

e appartengono alla classe delle esammine perchè le tre molecole di base che circondano l'atomo di ferro equivalgono a sei molecole di ammoniaca.

Essi sono notevolmente stabili, ma la loro stabilità è tuttavia minore di quella dei ferrocianuri, quindi mi è parso di poter prevedere che trattati con cianuro di potassio si sarebbero trasformati in ferrocianuro e che, quali termini intermedi di tale trasformazione, si sarebbero ottenuti dei derivati del complesso ferroamminico $[FeB_3]$ con due, o quattro gruppi CN nel posto di una o di due molecole di dipiridile o di fenantrolina.

I risultati delle ricerche sperimentali da me intraprese secondo tale indirizzo, cioè con l'intento di preparare i termini che segnassero il passaggio dai ferrocianuri alle ferroammine, hanno confermato pienamente quanto era stato previsto.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica del R. Istituto Superiore Agrario di Bologna.

(2) Pervenuta all'Accademia il 16 ottobre 1934.

(3) W. Manchot, P. Woringer, «Ber.», *46*, 1913, 3514.

(4) «Monatshefte f. Chem.», XIX, 1898. 647.

Facendo agire, in determinate condizioni, il cianuro di potassio sul bromuro di ferro-dipiridile $[Fe(C_{10}H_8N_2)_3Br_2 \cdot 6H_2O$ venne ottenuto il seguente composto:

(I) $$\left[Fe\begin{matrix}(C_{10}H_8N_2)_2\\(CN)_2\end{matrix}\right] \cdot 3\,H_2O$$

in cristalli aghiformi rosso-violetti, quasi insolubili in acqua, solubili in alcool con intensa colorazione violetta che ricorda quella delle soluzioni di permanganato. La formula su riportata, secondo la quale il composto non ha nella sfera esterna una parte jonizzabile e i gruppi CN sono direttamente legati all'atomo centrale, sta in accordo con la grande stabilità che il composto (I) mostra in ambiente fortemente alcalino, anche a caldo, e con il fatto che in soluzione alcoolica esso non reagisce col nitrato d'argento,

Tale comportamento esclude la formula $[Fe(C_{10}H_8N_2)_3]_2Fe(CN)_6 \cdot 9H_2O$ secondo la quale il composto sarebbe il ferrocianuro di ferro–3–dipiridile e con la quale verrebbero ugualmente interpretati i risultati analitici.

Del resto quest'ultima interpretazione non si accorderebbe nemmeno col colore violetto che possiede il composto tanto allo stato solido che in soluzione, colore del tutto diverso da quello rosso–sangue caratteristico di tutti i composti che contengono il complesso $[Fe(C_{10}H_8N_2)_3]$.

Il composto (I) trattato a caldo e a lungo con una soluzione concentrata di KCN passa in soluzione trasformandosi nel composto

(II) $$\left[Fe\begin{matrix}C_{10}H_8N_2\\(CN)_4\end{matrix}\right]K_2 \cdot 3\,H_2O$$

che cristallizza in prismi bruno–aranciati solubili in acqua con colorazione aranciata, insolubili in alcool. Che in questo composto il dipiridile e i quattro gruppi CN formino con il ferro un anione complesso, venne dimostrato mediante reazioni di doppio scambio, sostituendo il potassio col bario e con l'argento. Il complesso ferro-tetraciano–dipiridile è notevolmente stabile; con vari joni di metalli pesanti dà precipitati colorati caratteristici.

La soluzione concentrata del composto (II) addizionata con un acido minerale dà l'acido complesso:

$$\left[Fe\begin{matrix}C_{10}H_8N_2\\(CN)_4\end{matrix}\right]H_2 \cdot 2\,H_2O$$

in forma di un precipitato giallo costituito da una polvere cristallina solubile negli alcali con colorazione aranciata.

Nell'acqua madre del composto (II) si riconobbe la presenza del ferrocianuro potassico.

Comportamento del tutto analogo a quello del composto dipiridilico mostrò il composto fenantrolinico corrispondente $[Fe(C_{12}H_8N_2)_3]Br_2 \cdot 7H_2O$. Trattato con cianuro di potassio formò dapprima il composto

$$\left[Fe\begin{matrix}(C_{12}H_8N_2)_2\\(CN)_2\end{matrix}\right] \cdot 3\,H_2O$$

in cristalli nero-violetti: e prolungando l'azione del KCN si ebbe in cristalli aghiformi aranciati il composto

$$\left[Fe\begin{matrix}C_{12}H_8N_2\\(CN)_4\end{matrix}\right]K_2\cdot 2H_2O$$

PARTE SPERIMENTALE.

Il bromuro di ferro–dipiridile $[Fe(C_{10}H_8N_2)_3]Br_2\cdot 6H_2O$ sciolto nella minor quantità possibile di acqua a freddo, e addizionato con un eccesso di cianuro potassico, dà un precipitato cristallino rosso carminio costituito da squamette. Questo prodotto seccato nel vuoto si altera perdendo dipiridile e trasformandosi in cristalli aghiformi rosso–violetti. Tale trasformazione avviene anche in presenza dell'acqua–madre ed è facilitata dal riscaldamento.

Nel precipitato cristallino rosso carminio, spremuto alla pompa ma ancora umido, venne determinato il rapporto Fe: dipiridile e Fe: CN. Per il dosamento del dipiridile venne impiegato un metodo volumetrico che si fonda sulla trasformazione del dipiridile – previamente distillato in corrente di vapore – in un composto complesso dell'argento bivalente: il persolfato di argenti-dipiridile $[Ag^{II}(C_{10}H_8N_2)_2]S_2O_8$ che è praticamente insolubile.

Questo metodo verrà descritto in una Nota a parte.

Il rapporto Fe: dipiridile venne trovato I: 3.02 e quello Fe: CN = I: 2.1. Ciò prova che operando a freddo si produce soltanto la sostituzione di ioni bromo con ioni cianogeno, e il complesso $[Fe(C_{10}H_8N_2)_3]$ rimane inalterato.

Il composto rosso violetto cristallizzato in aghi venne ottenuto direttamente facendo agire il cianuro di potassio sulla soluzione di bromuro di ferro–dipiridile scaldata su bagno-maria. Il precipitato cristallino rosso violetto che si formò in pochi minuti, venne separato per filtrazione alla pompa dall'acqua–madre ancora calda, per evitare che venisse inquinato dai cristalli di dipiridile che si depositarono poi dall'acqua–madre per raffreddamento.

Il prodotto è solubile in alcool con colorazione violetta, in piridina e in acetone con colorazione bleu–verdastra. Trattato con soda caustica all'ebollizione cede appena traccie di dipiridile. Per dosare quest'ultimo si dovette dapprima eliminare l'acido cianidrico mediante decomposizione del complesso con acido solforico diluito all'ebollizione. L'acido cianidrico distillato venne raccolto in una soluzione titolata di nitrato d'argento.

All'analisi si ottennero i seguenti risultati.

	TROVATO	CALCOLATO per $\left[Fe\begin{matrix}(CN)_2\\(C_{10}H_8N_2)_2\end{matrix}\right]\cdot 3H_2O$
Fe	11.75-11.96 %	11.78
CN	11.10 »	10.98
Dipiridile	66.07-66.15 »	65.85
N (totale)	17.90 »	17.74
H_2O (perdita di peso a 110°)	11.50 »	11.39

I risultati analitici provano che la reazione tra bromuro di ferro–dipiridile e cianuro di potassio che si produce a caldo è la seguente

$$[Fe(C_{10}H_8N_2)_3]Br_2 + 2KCN = \left[Fe\begin{matrix}(CN)_2\\(C_{10}H_8N_2)_2\end{matrix}\right] + 2KBr + C_{10}H_8N_2 .$$

Data l'alta complessità del composto – rivelata anche dal suo colore anormale – era presumibile ch'esso fosse diamagnetico. Le misure della suscettibilità magnetica hanno confermato la previsione, fornendo i seguenti risultati [1]:

$\chi \cdot 10^6$	$\chi_A \cdot 10^6$	P (numero magnetoni Weiss)
— 0.244	+ 133.3	2.8.

Le acque-madri di varie preparazioni del composto rosso violetto vennero riunite e concentrate a bagno–maria; esse depositarono lentamente una piccola quantità di una sostanza color rosso–bruno–aranciata cristallizzata in begli aghi lunghi e lucenti. Un esame sommario di questo nuovo composto mostrò che per un atomo di ferro conteneva una molecola di dipiridile, quattro CN e due atomi di potassio. Esso proveniva quindi da un'azione più profonda del cianuro di potassio sulla ferroammina.

Per prepararne una quantità maggiore trovai conveniente di far agire il cianuro di potassio sul composto rosso violetto.

Gr. 10 del composto $\left[Fe\begin{matrix}(CN)_2\\(C_{10}H_8N_2)_2\end{matrix}\right] \cdot 3H_2O$ vennero introdotti in un pallone con cc. 500 di una soluzione al 10 % di KCN e si scaldò in corrente di vapore finchè tutto il composto rosso violetto non fu passato in soluzione. La soluzione bruno-aranciata così ottenuta venne evaporata a bagno–maria fino a ridurla al volume di 250 cc., poi lasciata raffreddare, e infine seminata con alcuni germi del composto rosso-aranciato. In 24 ore cristallizzarono gr. 4.5 del prodotto aranciato, e dall'acqua–madre, ulteriormente concentrata, si ottennero altri gr. 2.5 dello stesso prodotto.

Per determinare il dipiridile in questo composto si dovette prima eliminare l'acido cianidrico mediante trattamento con acido solforico diluito a caldo.

	Trovato	Calcolato per $\left[Fe\begin{matrix}(CN)_4\\C_{10}H_8N_2\end{matrix}\right]K_2 \cdot 3H_2O$
Fe . .	12.56 %	12.46
CN . .	22.85 »	23.21
Dipiridile	34.40 »	34.82
N totale	18.98 »	18.76
K . . .	17.69 »	17.45

(1) Le misure magnetiche su questo composto e sui seguenti vennero eseguite nel Laboratorio del prof. L. Cambi (Università di Milano) al quale porgo anche qui vivi ringraziamenti.

Il composto è diamagnetico; la misura della suscettibilità magnetica diede i seguenti risultati:

$\chi \cdot 10^6$	$\chi_A \cdot 10^6$	P (numero magnetoni Weiss)
— 0.352	+ 53.8	1.8.

La soluzione del composto allo stato di purezza ha reazione neutra. Trattata con soluzioni di sali di bario, di piombo e di argento fornisce precipitati colorati in giallo. Acidificata con acido solforico diluito dà un precipitato costituito da una polvere cristallina gialla, poco solubile in acqua, solubile negli alcali con colorazione aranciata. All'analisi risultò essere l'acido corrispondente al sale di potassio su descritto.

	Trovato	Calcolato per $\left[Fe\begin{matrix}(CN)_4\\(C_{10}H_8N_2)\end{matrix}\right]H_2 \cdot 3H_2O$
Fe . .	15.29 %	15.02
CN . .	28.12 »	27.97
Dipiridile	41.58 »	41.96

Composti con l'o-fenantrolina.

Gr. 1.5 di bromuro di ferro-fenantrolina $[Fe(C_{12}H_8N_2)_3]Br_2 \cdot 7H_2O$ preparato secondo F. Blau [1] vennero introdotti in una soluzione di gr. 5 di KCN in 100 cc. di acqua. Si formò dapprima una massa gelatinosa nera che per raffreddamento si rapprese in cristalli nero violetti che vennero spremuti alla pompa e lavati ripetutamente con cloroformio per asportare ogni traccia di fenantrolina libera.

Il prodotto è solubile in alcool con colorazione violetta, in acetone con color viola–indaco.

All'analisi diede i seguenti risultati:

	Trovato	Calcolato per $\left[Fe\begin{matrix}(CN)_2\\(C_{12}H_8N_2)_2\end{matrix}\right] \cdot 3H_2O$
Fe	10.97 %	10.70
CN	10.21 »	9.96
N totale	15.98 »	16.11
H_2O (perdita di peso a 110°)	9.86 »	10.06

Misure magnetiche:

$\chi \cdot 10^6$	$\chi_A \cdot 10^6$	P (numero magnetoni Weiss)
— 0.385	+ 91.7	2.3.

(1) « Monatshefte f. Ch. ». XIX, 1898, 669.

Dalle acque madri del composto nero violetto precedente, previa concentrazione a bagno-maria ed estrazione con cloroformio per asportare la fenantrolina libera, si depositò lentamente una sostanza di color bruno aranciato in bei prismi.

	Trovato	Calcolato per $\left[Fe\frac{(CN)_4}{C_{12}H_8N_2}\right]K_2 \cdot 2H_2O$
Fe .	12.12 %	12.27
N .	18.70 »	18.52
H_2O	7.45 »	7.92

Chimica. — *Influenza della temperatura sulla formazione dei composti di addizione* [1] Nota [2] di G. Scagliarini e M. Ragno, presentata dal Socio M. Betti.

In alcune Note precedenti [3] uno di noi ha messo in rilievo l'importanza che la costante dielettrica del mezzo e la concentrazione dei corpi reagenti esercitano sulla formazione dei composti di addizione.

Degli altri fattori fisici era prevedibile che anche la temperatura, in quanto modifica le interazioni che si esercitano in seno alle soluzioni stesse, dovesse esercitare una notevole influenza, ciò che del resto trova riscontro nelle temperature di trasformazione che separano i campi di esistenza dei vari idrati di molti sali che, nella maggior parte dei casi, si debbono considerare come composti di addizione.

Per mettere in evidenza tale azione della temperatura abbiamo preso in esame alcuni composti che i sali di cobalto e di nichel formano con la piridina e la esametilentetramina.

Come è stato dimostrato rispettivamente da Reitzenstein e da Grossmann tanto il cloruro di cobalto [4] quanto il bromuro di cobalto [5] fatti reagire a freddo, forniscono con piridina composti corrispondenti alle formule seguenti:

$$CoCl_2 \cdot 4C_5H_5N \quad \text{e} \quad CoBr_2 4C_5H_5N .$$

Ora noi abbiamo potuto constatare che se le soluzioni piridiche si tengono a 70°–80° per parecchie ore, il sale che cristallizza per parziale concentra-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica farmaceutica della R. Università di Messina.

(2) Pervenuta all'Accademia il 16 ottobre 1934.

(3) Questi «Rend.», ser. 6ª, II, 387, 1926; ser. 6ª, II, 574, 1926; ser. 6ª, I, 411, 1928; ser. 6ª, I, 509, 1928; ser. 6ª, II, 267, 1929.

(4) «Ann.», *282*, 1894, p. 275; «Zeits. Anorg. Chem.», *11*, 1896, p. 225; «Zeits. Anorg. Chem.», *18*, 1898, p. 273.

(5) «Ber.», 1904, 1256.

zione del liquido piridico, contiene solo due molecole di piridina e cioè si ottengono i composti:

$$CoCl_2 \cdot 2C_5H_5N \quad \text{e} \quad CoBr_2 \cdot 2C_5H_5N.$$

Il primo di questi composti è identico a quello che Reitzenstein [1] ottenne agendo a freddo ma con soluzioni alcooliche. Il $CoCl_2 \cdot 2C_5H_5N$ tenuto poi per sei ore a 104°-106° fornisce un composto di addizione che ha una sola molecola di piridina: $CoCl_2 \cdot C_5H_5N$ [2],

G. A. Barbieri e F. Calzolari [3] riconobbero che facendo cristallizzare dall'acqua i solfocianuri di cobalto, di nichel, di ferro e urotropina delle rispettive formule:

$$Co(SCN)_2 \cdot 4H_2O \cdot 2C_6H_{12}N_4$$
$$Ni(SCN)_2 \cdot 4H_2O \cdot 2C_6H_{12}N_4$$
$$Fe(SCN)_2 \cdot 4H_2O \cdot 2C_6H_{12}N_4$$

si ottenevano dalle acque madri anche dei composti con una sola molecola di urotropina:

$$Co(SCN)_2 \cdot 4H_2O \cdot C_6H_{12}N_4$$
$$Ni(SCN)_2 \cdot 4H_2O \cdot C_6H_{12}N_4$$
$$Fe(SCN)_2 \cdot 4H_2O \cdot C_6H_{12}N_4.$$

Noi abbiamo trovato che il punto di trasformazione della forma più ricca in urotropina in quella meno ricca sta al disotto di 80°; difatti le soluzioni dei sali con due molecole di urotropina anche concentrate, se vengono tenute a questa temperatura per qualche tempo dànno luogo quasi quantitativamente alla formazione dei sali con una sola molecola di base organica:

$$Co(SCN)_2 \cdot 4H_2O \cdot C_6H_{12}N_4$$
$$Ni(SCN)_2 \cdot 4H_2O \cdot C_6H_{12}N_4$$
$$Fe(SCN)_2 \cdot 4H_2O \cdot C_6H_{12}N_4.$$

Le soluzioni acquose degli alogenuri di cobalto e di nichel e urotropina dànno luogo a sali idrati delle rispettive formule [4].

$$CoCl_2 \cdot 10H_2O \cdot 2C_6H_{12}N_4$$
$$CoBr_2 \cdot 10H_2O \cdot 2C_6H_{12}N_4$$
$$NiCl_2 \cdot 10H_2O \cdot 2C_6H_{12}N_4.$$

(1) « Zeit. Anorg. Chem. », *18*, 1898, pp. 273, 277.
(2) « Reitzenstein Ann. », *282*, 1894, 275; « Z. Ann. Ch. », *11*, 1896, 255.
(3) « Atti Acc. Lincei » (5), *20*, I, 119, 1911.
(4) G. A. Barbieri e F. Calzolari, « Atti Acc. Lincei » (5), *19*, I, 382, 1910.

Ora le loro soluzioni tenute a 70°–80° per molte ore dànno luogo ad idrati meno ricchi in molecole d'acqua:

$$CoCl_2 \cdot 4H_2O \cdot 2C_6H_{12}N_4$$
$$CoBr_2 \cdot 4H_2O \cdot 2C_6H_{12}N_4$$
$$NiCl_2 \cdot 4H_2O \cdot 2C_6H_{12}N_4.$$

La temperatura di trasformazione dell'idrato con dieci molecole di acqua in quello con quattro si trova al disotto degli 80°.

Queste ricerche che verranno sviluppate anche dal lato quantitativo mostrano già la notevole influenza che la temperatura ha sulla formazione dei composti di addizione. Al contrario sulla formazione dei complessi veri e propri, come ad esempio di quelli formati dai cianuri e dai rodanati di metalli bi e trivalenti, come già è stato messo in chiaro da uno di noi [1] la temperatura ha ben poca influenza. Ciò verosimilmente dipende dalla fondamentale diversità che esiste fra la natura dei sali doppi e quella dei sali complessi e dalla presumibile diversità delle interazioni che entrano in gioco in un caso e nell'altro.

Parte sperimentale.

Alogenuri di cobalto e di nichel con piridina. – Soluzioni concentrate di cloruro di cobalto e di bromuro di cobalto trattate con forte eccesso di piridina vengono introdotte in larghe provette e tenute a 70°–80° per circa una giornata. Le soluzioni piridiche concentrate lasciano depositare delle masse cristalline che raccolte su filtro alla pompa e lavate con alcool vengono poste ad asciugare fra carta da filtro e quindi sottoposte ad analisi.

Cloruro di cobalto e piridina: $CoCl_2 \cdot 2C_5H_5N$. – Piccoli cristalli omogenei ben formati di colore rosso–violaceo solubilissimi in acqua meno in alcool, insolubili in etere.

Calcolato per $CoCl_2 \cdot 2C_5H_5N$	Trovato
% Co = 20.47	19.96
% Cl = 24.69	24.05
% N = 9.95	9.71

Bromuro di cobalto e piridina: $CoBr_2 \cdot 2C_5H_5N$. – Minuti cristalli omogenei e ben formati di colore rosso–violaceo, solubili in acqua, poco in alcool e insolubili in etere.

(1) « Gazz. Chim. Ital. », LII, II, *139*, 1923; LII, IX, *617*; LII, XII, *876*, 1923.

Calcolato per $CoBr_2 \cdot 2C_5H_5N$	Trovato
% Co = 15.65	15.20
% Br = 42.41	41.95
% N = 7.43	7.63

Solfocianuro ferroso ed esametilentetrammina: $Fe(SCN)_2 \cdot 4H_2O \cdot C_6H_{12}N_4$. – La soluzione acquosa concentrata a caldo di $Fe(SCN)_2 \cdot 4H_2O \cdot 2C_6H_{12}N_4$, protetta con una corrente di azoto dal contatto coll'ossigeno dell'aria, venne riscaldata per circa un quarto d'ora a 70°–80° e indi lasciata raffreddare. Si ottengono cristalli gialli canarini tendenti al verde, che alla luce ed all'aria si alterano diventando rossastri ed opachi. Vennero posti ad asciugare fra carta da filtro fuori del contatto dell'aria.

Calcolato per $Fe(SCN)_2 \cdot 4H_2O \cdot C_6H_{12}N_4$	Trovato
% Fe = 14.46	14.31
% SCN = 30.24	29.85
% N(amm) = 14.58	14.23

Solfocianuro di cobalto ed esametilentetrammina: $Co(SCN)_2 \cdot 4H_2O \cdot C_6H_{12}N_4$. – La soluzione acquosa satura a caldo di $Co(SCN)_2 \cdot 4H_2O \cdot 2C_6H_{12}N_4$ viene tenuta a 70°–80° per circa un quarto d'ora. Il liquido della reazione ancora caldo viene filtrato rapidamente per separare l'idrato cobaltoso ed il sale basico verdastro formatosi e poscia lasciato raffreddare. Si separano in tale modo cristallini tabulari rosso–granata scuro, che al microscopio risultano molto simili ai cristallini di $Fe(SCN)_2 \cdot 4H_2O \cdot C_6H_{12}N_4$.

Calcolato per $Co(SCN)_2 \cdot 4H_2O \cdot C_6H_{12}N_4$	Trovato
% Co = 15.22	15.15
% SCN = 29.99	29.85
% N(amm) = 14.47	14.60

Solfocianuro di nichel ed esametilentetrammina: $Ni(SCN)_2 \cdot 4H_2O \cdot C_6H_{12}N_4$. – La soluzione satura a caldo del composto: $Ni(SCN)_2 \cdot 4H_2O \cdot 2C_6H_{12}N_4$, tenuta come la precedente a 70°–80° per circa un quarto d'ora, fornisce per raffreddamento cristalli tabulari di color verde smeraldo.

Calcolato per $Ni(SCN)_2 \cdot 4H_2O \cdot C_6H_{12}N_4$	Trovato
% Ni = 15.17	15.72
% SCN = 30.00	29.85
% N(amm) = 14.48	14.81

Alogenuri di cobalto, nichel ed esamitilentetrammina. – Dalle soluzioni sature a caldo di:

$$CoCl_2 \cdot 10H_2O \cdot 2C_6H_{12}N_4$$
$$CoBr_2 \cdot 10H_2O \cdot 2C_6H_{12}N_4$$
$$NiCl_2 \cdot 10H_2O \cdot 2C_6H_{12}N_4$$

tenute a 70°–80° per circa 40 ore, per raffreddamento cristallizzano i seguenti composti che spremuti e lavati alla pompa vengono asciugati fra carta da filtro ed analizzati:

Cloruro di cobalto ed esametilentetrammina: $CoCl_2 \cdot 4H_2O \cdot 2C_6H_{12}N_4$. – Minuti cristalli di color rosa, solubili in acqua, meno in alcool, insolubili in etere.

Calcolato per $CoCl_2 \cdot 4H_2O \cdot 2C_6H_{12}N_4$	Trovato
% Co = 12.23	12.12
% Cl = 14.72	15.11
% N = 23.26	23.85
% H_2O = 14.94	14.25

Bromuro di cobalto ed esametilentetrammina: $CoBr_2 \cdot 4H_2O \cdot 2C_6H_{12}N_4$. – Piccoli cristalli simili per aspetto e solubilità ai precedenti:

Calcolato per $CoBr_2 \cdot 4H_2O \cdot 2C_6H_{12}N_4$	Trovato
% Co = 11.32	10.98
% Br = 27.29	27.56
% N = 19.62	19.50
% H_2O = 12.62	12.12

Cloruro di nichel ed esametilentetrammina: $NiCl_2 \cdot 4H_2O \cdot 2C_6H_{12}N_4$. – Scagliette cristalline verde-chiaro, simili per solubilità ai precedenti.

Calcolato per $NiCl_2 \cdot 4H_2O \cdot 2C_6H_{12}N_4$	Trovato
% Ni = 14.72	14.56
% Cl = 12.18	11.96
% N = 23.24	23.87
% H_2O = 14.95	15.00

Biologia. — *Su l'origine dell'acido urico nelle uova ibernanti di bachi da seta.* Nota [1] di CARMELA MANUNTA [2], presentata dal Corrisp. G. QUAGLIARIELLO.

In una precedente comunicazione [3] ho resi noti i dati da me raccolti sul contenuto in acido urico delle uova ibernanti di varie razze e incroci di bachi da seta, concludendo che le varie razze differiscono tra di loro per il contenuto in acido urico delle uova e che questa variazione non dipende soltanto dalla quantità di vitello racchiusa nell'uovo. Mi prospettavo già allora l'ipotesi che questo acido urico derivasse, in gran parte, non dal metabolismo embrionale ma dal sangue materno. Una abbondante serie di dati da me raccolti durante lo sfarfallamento lungo tutto il mese di giugno ha dato la precisa dimostrazione della suddetta ipotesi.

Da 5 o 10 femmine, appena sfarfallate dal bozzolo, si estrae la massa delle uova; si ripuliscono bene da ogni traccia di materiale estraneo, si asciugano e si pesano.

N. 800 uova esattamente pesate, prelevate a campione, vengono triturate con 0.5 gr. di sabbia di quarzo accuratamente, fino a ridurle in una massa perfettamente omogenea. Dopo aggiunta di circa 20 cc. di H_2O distillata, il tutto viene travasato in un piccolo beker, lavando con H_2O il mortaio per allontanare meglio anche minime tracce. Il contenuto del beker si fa bollire blandamente a bagnomaria per mezz'ora, aggiungendo di tanto in tanto l'H_2O che va evaporandosi. Il liquido sovrastante lasciato decantare viene versato e scolato lentamente in un pallone tarato da 100 cc. Il residuo viene poi estratto a bagnomaria ancora tre volte ed il beker lavato completamente con H_2O bollente. Si aggiunge a tutto l'estratto 5 cc. di H_2SO_4N e 10 cc. di tungstato di sodio al 10 % portando poi il pallone a volume. Dopo riposo di circa 20 minuti si filtra in un pallone da 500, lavando bene il residuo e portando il filtrato limpidissimo a volume.

Su di 5 cc. di questo estratto si esegue la determinazione secondo il metodo di Folin [4] (in questa serie di ricerche ho omesso determinazioni parallele col metodo indiretto, visto che esso dà valori coincidenti).

La seguente tabella riassume i risultati delle determinazioni eseguite la maggior parte sulle uova ovariche, appena estratte dal corpo della farfalla,

(1) Pervenuta all'Accademia il 27 settembre 1934.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia e Anatomia comparata della R. Università di Modena.

(3) « Boll. Soc. Biol. Sper. », 1934.

(4) « Hawk Pratical physiological chemistry », p. 423.

RAZZA	N° farfalle	Peso totale uova	Peso n° 800 uova	Contenuto in acido urico (mg)	
				in 800 uova	in 1 gr.
1 Awojiku 28° 16/6/34	10	1.9840	0.3858	2	5.1
2 Awojiku 28° 15/6-(18/6)	5	—	0.3604	1.78	4.59
3 Awojiku 28° 16/6-(18/6)	4	—	0.3598	1.6	4.5
4 Awojiku 28° (tutte nere) 17/6-(23/6)	10	1.8678	0.3873	1 46	3.769
5 Awojiku 28° (tutte nere) 17/6-(23/6)	10	1.8678	0,3873	1.46	3.769
6 Awojiku 28° 17/6-(18/6)	5	—	0 3644	1.68	4.6
7 Awojiku 28° 18/6-	10	1.3198	0.3998	1.758	4.397
8 Awojiku 18° (le prime sfarfall.) 25/6-	4	0.7334	0.3680	1.76	4.78
9 Awojiku 18° 26/6-	4	0.7570	0.3620	1.38	3.8
10 Awojiku 18° 27/6-	10	1.4441	0.3804	2.16	5.678
11 KN_2 314 IV S 17/6-	5	—	0.4264	1.868	4.38
12 KN_1 314 IV d 19/6-	5	1.1542	0.4168	2.08	4.99
13 KN_1 314 III c. traspar. 19/6	5	0.9069	0.4393	1.68	3.80
14 CN_1 313 pg. t. Sb. 19/6	5	0.9229	0.4359	1	2.29
15 KN_1 313 h h 18/6	10	2.2904	0.4550	0.98	2.15
16 KN_1 313 h h (uova tutte anner.) 17/6	10	1.9578	0.4445	1.55	3.487
17 Bagdad Trento 26/6	10	4 3240	0.5936	2	3.369
18 E 17 Kokusan Europa- 25/6	10	3.7837	0 5493	2.16	3.93
19 E 18 Kokusan Europa- 26/6	10	3.3750	0.5278	1.66	3.145
20 Bg. In. (B. chin.) 19/6	7	1.9328	0.4024	1.76	4.398
21 Verde giapponese 23/6	10	3.2754	0.4340	1.656	3.8
22 Oro chinese vell. 19/6	10	3.5291	0.4940	1.46	2.95
23 Oro chin. vellut. 21/6 (tutte nere 26/6)	10	1.9801	0.4505	1.70	3.77
24 Oro chin vell. unif. 23/6	10	4.0230	0 4711	1.78	3.73
25 Oro vellutato 25/6	10	2.4787	0.4715	1.86	3.94
26 Giallo rosa Trento 25/6	10	3.2454	0.5476	1.754	3.2
27 Chinese arancio 26/6	10	3.6989	0.5183	1.6	3.087
28 Chinese limone 23/6	10	2.6074	0.4985	1.56	3.129
29 S a N_2 18/6	10	2.4788	0.4261	1.99	4.67
30 VW III 3 c (♀ Verde ♂ Aw)	10	2.4494	0.4321	1.68	3.888
31 LA 523 Zb (♀ Limone ♂ Aw) 19/6	10	2.5206	0 4567	2	4.379
32 LA 523 Zg (♀ Limone ♂ Aw) (g. chiar) 19/6	10	2.4268	0.4610	1.94	4.2
33 LA 523 Zg. (♀ limone ♂ Aw) giall. dorat. chiar. o meno intensi 19/6- (23/6/34 tutte nere)	10	1.9697	0.4543	2.275	5

e alcune sulle uova fecondate e deposte che venivano uccise dopo una o più giornate di sviluppo (nel giorno indicato dalla data tra parentesi):

Dato che il peso dell'uovo varia con notevole ampiezza da razza a razza (ed anche nella stessa razza presenta leggere variazioni nelle successive giornate di sfarfallamento), ho calcolato il contenuto in acido urico riferendomi a 800 uova e a 1 gr. di uova.

Il confronto tra le 2 serie di valori mette in piena evidenza, come per le uova ibernanti, che il contenuto in acido urico dell'uovo varia da razza a razza non semplicemente in funzione della grandezza dell'uovo stesso. È vero che il contenuto più alto per 800 uova (mg. 2.16 2) si trova in razze a uova pesanti come E 17 e Bagdad (peso 0.54–0.59) ma uova di media grandezza (0.45–0.40) possono presentare valori minimi (0.98 in KN_1 313) come valori elevati (2 in LA 523 Zb). È vero che il contenuto più alto per 1 gr. di uova si riscontra in una razza a uova piccole come Awojiku; ma per uova di media grandezza (peso 0.45-0.40) si trovan valori bassi (2.15 per KN_1 313) come valori elevati (4.2 per LA 523 Zg). Se poi si confrontano i dati così raccolti sulle uova ovariche con quelli del contenuto in acido urico delle uova ibernanti delle rispettive razze, si osserva che di solito questi ultimi sono più elevati, ma di poco. Così per il Giallo Rosa, il Chinese Limone, il Verde e il Bagdad (per Chinese arancio i valori pressochè coincidono). Per Bianco Chinese e Chinese Rosa risultano superiori i dati delle uova ovariche; qui però si tratta di razze omonime, ma non identiche a quelle delle quali sono state saggiate le uova ibernanti.

RAZZA	Contenuto in acido urico uova ovariche		Contenuto in acido urico uova ibernanti	
	in 800 uova	in un gr.	in 800 uova	in un gr.
Giallo rosa	1.75	3.2	2.32	4.7
Bagdad	2	3.37	2.32	4.5
Bianco chinese	1.76	4.40	1.11	3.07
Chinese limone	1.56	3.13	1.69	4.22
Chinese arancio	1.06	3.09	1.20	2 90
Chinese oro	1.7	3.8	1.28	2.90
Verde	1.65	3.8	1.88	5.2
	uova ovariche		uova annerite	
KN_1 313 h h	0.98	2.15	1.55	3.48
Oro chinese vellutato	1.46	2.95	1.70	3.77
La 523 Zg	1.94	4.2	2.27	5
Awojiku 18°	1.68	4.6	1.46	3.77

Dal complesso dei dati si potrebbe pensare che il contenuto in acido urico delle uova ibernanti sia praticamente uguale a quelle delle uova ovariche. Ma il confronto tra le uova estratte dal corpo della farfallà appena sbocciata dal bozzolo e le uova della stessa razza già annerite, cioè già entrate dopo 3 o 4 giorni dalla deposizione in diapausa, dimostra evidentemente che *se la maggior parte del contenuto in acido urico delle uova ibernanti è di origine diciamo così, esogena – derivato dall'organismo materno durante il periodo della elaborazione deutoplasmica – però una certa quantità di acido urico deve essersi prodotto durante il breve periodo di sviluppo embrionale che va dalla deposizione all'entrata in diapausa. In media questa quantità di acido urico endogeno, diciamo così, è del* 21 % (37 %, 14 %, 15 %) rispetto al contenuto totale. Una percentuale media del 14 % risulta dal confronto tra le uova ibernanti e le ovariche. Tutto considerato possiamo assumere come probabile una media del 15 % come frazione « endogena » dell'acido urico totale.

Solo la razza Awojiku fa eccezione presentando le uova annerite una quantità di acido urico inferiore a quella dell'uova ovariche. Ma su questa razza, meritevole di specialissima considerazione perchè bivoltina, è ancora in corso la raccolta dei dati.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 4 novembre 1934 (Anno XIII)

Presidenza del Socio anziano sen. prof. O. M. Corbino.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica (Geometria algebrica). — *Caratterizzazione geometrica, topologica e trascendente delle serie di equivalenza sopra una superficie.* Nota [1] del Socio F. Severi.

1. Continuando la teoria delle serie di equivalenza sopra una superficie fondata in miei precedenti lavori, espongo qui a grandi linee la soluzione della questione vitale di *caratterizzare* le serie di equivalenza in rapporto colle proprietà geometriche, topologiche e trascendenti della superficie. La definizione che meglio conviene allo sviluppo metodico della teoria è questa:

Una serie di equivalenza è una serie di gruppi di punti della superficie F *ottenibile per somma e sottrazione da un numero finito di serie, ciascuna delle quali consta dei gruppi di livello di una coppia di funzioni razionali del punto di* F.

Se per una delle due funzioni razionali della coppia il livello è il medesimo in tutti i gruppi della serie, si ha una serie di equivalenza superficiale (e curvilinea) sopra una curva di F; se lo stesso accade anche per l'altra funzione della coppia, si ha un sol gruppo di punti. Dalla precedente definizione e da teoremi dimostrati negli altri miei lavori sull'argomento, segue agevolmente che:

Condizione necessaria e sufficiente perché una serie di gruppi di punti di F *sia di equivalenza è che sia contenuta totalmente in una serie razionale o nella differenza di due serie razionali.*

(1) Presentata nella seduta del 4 novembre 1934.

Sicchè, se s'introducono i gruppi virtuali, si può dire che una serie di equivalenza è sempre contenuta totalmente in una serie razionale di gruppi effettivi o virtuali. Questa proprietà potrebbe assumersi come definizione; ma la trattazione riescirebbe meno snella.

L'origine prima delle profonde divergenze fra la teoria delle serie lineari sulle curve irriducibili (o delle serie di equivalenza sulle curve riducibili) e la teoria delle serie di equivalenza sulle superficie, sta nel fatto che con operazioni di somma e sottrazione non s'esce dal campo delle serie (complete) di livello delle funzioni razionali del punto della curva; e che pertanto sopra una curva la differenza di due serie razionali è contenuta totalmente in una serie razionale completa di gruppi effettivi, mentre lo stesso non può dirsi per le serie di equivalenza sopra una superficie.

2. Un secondo motivo di divergenza è questo: Definiti come *equivalenti* due gruppi A, B di n punti di F, quando esiste una serie di equivalenza d'ordine n, che li contiene, la relazione di equivalenza fra gruppi è transitiva; ma ciò non significa affatto che, se A, B son equivalenti a C, le serie di equivalenza irriducibili complete, contenenti totalmente le coppie A, C; B, C; A, B, debban coincidere, come invece accade nel caso corrispondente delle relazioni di equivalenza sopra una curva.

3. Un terzo motivo di divergenza sta in ciò: Se sopra una curva i multipli secondo un intero k (> 1) dei gruppi G di una serie continua son equivalenti, lo stesso accade dei G; mentre questo non accade sempre per una serie di gruppi di punti sopra una superficie. La ragion topologica è la possibile torsione (lineare = superficiale) della superficie o delle serie ∞^2 contenute nella data; mentre un ente ∞^1 è sempre privo di torsione topologica.

Occorre dunque considerare sulle superficie, oltre alle serie di equivalenza, le *serie di pseudoequivalenza*. Una serie siffatta si definisce come una serie continua di gruppi G disequivalenti, ma tali che per k intero conveniente > 1, i gruppi kG appartengono a una medesima serie di equivalenza. L'intero k non può assumere, qualunque sia la serie di pseudoequivalenza considerata, che un numero finito di valori.

4. Bisogna prima di tutto caratterizzare le serie di pseudoequivalenza. Vale in proposito il *teorema fondamentale*:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una serie di gruppi di punti sopra una superficie sia di pseudoequivalenza è che sia a circolazione lineare pseudonulla e a circolazione superficiale algebrica.

Ho chiamato a *circolazione lineare pseudonulla* (o in particolare nulla) una serie sulla superficie F quando ogni ciclo lineare di F appartenente alla serie (cioè riempito da gruppi della serie) è un divisore dello zero

(o rispettivamente è nullo); ed ho chiamato a *circolazione superficiale algebrica* una serie quando ogni ciclo superficiale di F, appartenente alla serie, è algebrico.

La necessità della condizione è acquisita nei miei precedenti lavori. Per dimostrar la sufficienza continuo ad analizzare le proprietà delle corrispondenze ∞^2 fra i punti di due superficie F, F'. Se x, x' denotan punti di F, F'; γ, γ' cicli lineari di F, F', tolti da due sistemi fondamentali di cicli lineari delle due superficie; Γ, Γ' cicli tridimensionali; σ, σ' cicli superficiali trascendenti; τ, τ' cicli superficiali algebrici scelti analogamente, ogni ciclo T quadridimensionale del prodotto topologico $F \times F'$ è pseudomologo ad una combinazione lineare a coefficienti interi di cicli dei tipi

$$\Phi = x' \times F \quad , \quad \Phi' = x \times F' \quad , \quad \gamma \times \Gamma' \quad , \quad \gamma' \times \Gamma \quad , \quad \sigma \times \sigma' \quad ,$$
$$\sigma \times \tau' \quad , \quad \sigma' \times \tau \quad , \quad \tau \times \tau'.$$

Si riconosce che, se T è imagine di una corrispondenza topologica ∞^4 fra le riemanniane F, F', la quale sia a circolazione lineare pseudonulla, nella precedente combinazione lineare son nulli i coefficienti di cicli dei tipi $\gamma \times \Gamma', \gamma' \times \Gamma$; e se T è anche a circolazione superficiale algebrica son nulli i coefficienti di cicli dei tipi $\sigma \times \sigma'$, $\sigma \times \tau'$, $\sigma' \times \tau$; onde:

$$T \lesssim \alpha' \Phi + \alpha \Phi' + \Sigma \lambda (\tau \times \tau') \qquad (\lambda \text{ interi}),$$

ove α, α' son gl'indici della corrispondenza.

D'altronde le corrispondenze degeneri di 3ª specie $\alpha' \Phi, \alpha \Phi'$ sono a valenza zero; ed ogni prodotto $\tau \times \tau'$ è omologo ad una corrispondenza algebrica degenere di 2ª specie, che è pure a valenza zero. Ne deriva che T è pseudomologa ad una corrispondenza a valenza zero; epperò, se è algebrica, è a pseudovalenza nulla. Cioè i gruppi degli omologhi su F' (o F) di x (o x') variabile su F (o F') si muovono in una serie di pseudoequivalenza. Da questo segue agevolmente il teorema fondamentale per le serie ∞^2.

Per passare alle serie ∞^r $(r > 2)$ bisogna estendere il ragionamento delineato profittando della teoria delle corrispondenze fra una superficie ed una varietà di dimensione qualunque, teoria che non ho ancora esposto, ma della quale posseggo tutti gli elementi. È però possibile che occorra aggiungere la condizione (implicita nel precedente ragionamento per le serie ∞^2) che *la serie di cui trattasi non sia curvilinea*. Ogni serie curvilinea su F è automaticamente a circolazione algebrica; onde, se le serie curvilinee non dovessero essere escluse, si giungerebbe alla conclusione che ogni serie curvilinea a circolazione lineare pseudonulla (o nulla) è di pseudoequivalenza. In particolare sopra una superficie regolare ogni serie curvilinea sarebbe di pseudoequivalenza.

5. Il teorema fondamentale permette di caratterizzare anche dal punto di vista algebrico–geometrico le superficie sulle quali ogni serie di gruppi di punti è di pseudoequivalenza. Vale il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè tutti i punti di una superficie sieno pseudoequivalenti è che la superficie sia regolare e di genere geometrico nullo.

6. Nei riguardi delle serie di equivalenza, nelle precedenti Memorie ho dimostrato ch'esse son a circolazione lineare nulla, a circolazione superficiale algebrica e a ciclo–torsione nulla (cioè tali che ogni ciclo superficiale pseudonullo di F appartenente ad una tal serie è in conseguenza nullo). È molto probabile che queste tre proprietà bastino a caratterizzare le serie di equivalenza; ma non ho ancora potuto dimostrarlo. Comunque sia è certo che:

Sopra una superficie priva di torsione topologica le serie ∞^2 di equivalenza son caratterizzate dall'essere a circolazione lineare nulla, a circolazione superficiale algebrica e a ciclo–torsione nulla.

La completa caratterizzazione delle superficie a punti equivalenti è data dal teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una superficie abbia i punti equivalenti è che sia regolare, di genere geometrico zero e a divisione (delle curve) univoca.

Non credo che queste condizioni bastino ad addurre la razionalità della superficie. Tuttavia non posseggo esempi di superficie irrazionali soddisfacenti alle predette condizioni. Sarebbe di grande interesse trovarne qualcuno.

7. Le razionalità di una superficie F a punti equivalenti non consegue neppure se si aggiunge l'ipotesi che la base minima delle curve F sia (a meno di curve eccezionali) una sola curva. Si dimostra invero che:

Una superficie F *a punti equivalenti, su cui la base minima sia riducibile con trasformazioni birazionali ad una sola curva* C, *è razionale quando* C *è effettiva; oppure, se* C *è virtuale, il sistema canonico virtuale di* F *è costituito da* 3 C, *e* C *è di grado virtuale* 1 *e di genere virtuale* 3.

Esistono di fatto superficie rispondenti all'ultima alternativa? Ecco un altro importante problema insoluto.

8. Passando alla caratterizzazione trascendente delle serie di pseudoequivalenza ricordo anzitutto la condizione necessaria e sufficiente (dimostrata nei precedenti lavori) perchè una serie ∞^r di gruppi di punti di una superficie F sia a circolazione superficiale algebrica. Questa condizione è espressa dall'annullarsi identico della somma cui dà luogo nei gruppi della serie una qualunque forma quadratica differenziale di 1ª specie di F. In verità l'estensione di questo teorema alle serie di dimensione $r > 2$ richiede

la conoscenza dell'estensione di un notevole teorema sui cicli algebrici, che il Lefschetz ha dato soltanto pei cicli di una superficie. Ho abbozzato la dimostrazione di quest'estensione; e ritengo ch'essa potrà completarsi in ogni punto. Comunque sia, se l'accennata estensione non fosse possibile, resterebbe pur sempre la possibilità (facilmente acquisibile) di caratterizzare le serie ∞^r $(r > 2)$ a circolazione algebrica, mediante l'annullarsi identico nei gruppi di una tal serie delle somme inerenti alle forme quadratiche differenziali di 2ª specie appartenenti ad F.

9. Per dare veste anche più espressiva alla caratterizzazione trascendente delle serie a circolazione algebrica, muovo dall'osservazione che *un integrale doppio di una funzione razionale* R *del punto di una superficie* F *si può sempre, nell'intorno di un punto di* F, *considerare, in modo conveniente, come funzione analitica di 2 variabili.*

L'intorno δ del punto P_0 (semplice) dato su F si può infatti uniformizzare, in infiniti modi, con due variabili x, y. Presi poi un punto fisso (a, b) dell'intorno δ' del campo (x, y), che corrisponde a δ, ed un punto (x, y) mobile in δ'; e scelte inoltre sui piani rappresentativi di x, y due linee λ, μ aventi per estremi rispettivi a, x e b, y, in modo che il prodotto $\lambda \times \mu$ appartenga a δ', si riconosce facilmente che l'integrale dato esteso al prodotto $\lambda \times \mu$ è funzione analitica uniforme di x, y.

In conseguenza di ciò acquista senso preciso la frase « la somma dei valori che l'integrale doppio di R assume nei punti di un gruppo variabile su F è costante ».

Le serie a circolazione algebrica vengono allora caratterizzate come quelle nei cui gruppi son costanti le somme degl'integrali doppi di 1ª specie della superficie; e in conseguenza sussiste il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una serie di gruppi di punti sopra una superficie sia di pseudoequivalenza, è che nei suoi gruppi sieno costanti le somme degl'integrali semplici e doppi di 1ª specie della superficie.

Quest'importante teorema prova una volta di più che i concetti da noi introdotti (serie di pseudoequivalenza e di equivalenza) son imposti dalla natura delle cose. Le serie di pseudoequivalenza, come le serie lineari sopra una curva, son invero caratterizzate dalla costanza delle somme di tutti gli integrali algebrici di 1ª specie appartenenti all'ente.

10. Chiudo queste note preliminari con alcune induzioni sopra un nuovo carattere delle superficie che pare fornito dalle serie di equivalenza.

Sia, sulla superficie F, una serie σ (irriducibile) di gruppi di n punti. Se questa serie è superficiale si potrà scegliere genericamente su F un certo numero massimo r $(\geqq 0$, il segno $=$ valendo se la serie è curvilinea) di punti di un gruppo di σ; massimo nel senso che i gruppi di σ passanti per quegli r punti o sono in numero finito o costituiscono una serie curvilinea.

Dopo ciò si potrà fissare sulla curva (irriducibile o riducibile) cui questa serie appartiene, un certo numero massimo s ($\geqq 0$) di punti tali che per gli $r+s$ punti complessivamente fissati passa un numero finito > 0 di gruppi di σ. La dimensione di σ è allora data da $\rho = 2r + s$ e sussiste la disuguaglianza $n \geqq r + s$. Gl'interi $2r$, s si chiameranno le *dimensioni parziali, superficiale e curvilinea, della serie* σ.

Quando $s = 0$ si dirà che la serie è *totalmente superficiale*; quando $r = 0$ la serie è curvilinea; quando $r = s = 0$ la serie riducesi ad un gruppo di punti.

Limitiamoci a studiare le serie totalmente superficiali. Proviamo anzitutto che *i gruppi di una serie di pseudoequivalenza completa totalmente superficiale passanti per un generico punto* P *della superficie* F, *si distribuiscono in una o più serie irriducibili di pseudoequivalenza ciascuna delle quali è (con quel punto fisso) completa.*

Sieno invero $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_\nu$ le serie cui s'allude nell'enunciato. Variando P le σ_i si permutano transitivamente; epperò se una di esse è incompleta, lo stesso accade delle altre e la serie completa di pseudoequivalenza, che contiene totalmente σ_i, descrive una serie d'ordine Σ, che è indipendente da i, e che contiene totalmente σ. Si tratta di provare che Σ è di pseudoequivalenza. Ora questo si dimostra poggiando sulla caratterizzazione trascendente delle serie di pseudoequivalenza. Ma allora σ risulta incompleta, contro il supposto.

Ciò premesso, sia $\rho = 2r$ la dimensione della serie totalmente superficiale σ, completa, d'ordine n. È $n \geqq r$ e la differenza non negativa $n - r$, mutando la serie nella totalità delle serie di pseudoequivalenza analoghe, di ordine n, raggiunge un massimo δ_n, *a priori* funzione di n, cui corrisponde un valor minimo r_n per r.

Ammettiamo che da un certo n in poi, $n \geqq \nu$, r_n sia funzione crescente di n. Secondo induzioni che fra breve esporrò, l'ipotesi è soddisfatta per ogni superficie. Comunque esistono superficie per cui essa è verificata. Consideriamo sopra una tal superficie F una serie σ di pseudoequivalenza, completa, totalmente superficiale, d'ordine $n \geqq \nu + 1$ e di minima dimensione $2r_n$. Posto $n' = n - 1$ sarà $r_n > r_{n'}$; e siccome $r_{n'} \geqq 1$, risulterà $r_n \geqq 2$. I gruppi di σ passanti per un punto generico P formano, astrazion fatta da P, una serie di pseudoequivalenza, completa, totalmente superficiale, d'ordine n' e di dimensione $2r' = 2(r_n - 1)$. Poichè $n' - r' = n - r_n = \delta_{n'}$, dovrà essere $\delta_{n'} \geqq \delta_n$. Esisterà dunque un intero $\mu \geqq \nu$ tale che per $n \geqq \mu$ l'intero δ_n è indipendente da n ed eguale a un certo intero $\delta \geqq 0$. Si conclude che:

Per la superficie F *esiste un carattere* $\delta \geqq 0$ *(invariante per trasformazioni birazionali) tale che l'ordine* n *e la dimensione* ρ *di ogni serie di pseudoequivalenza, totalmente superficiale completa, appartenente ad* F, *son legati dalla disuguaglianza* $\rho \geqq 2(n - \delta)$ *(da aggiungersi all'altra evidente* $\rho \leqq 2n$*).*

Le induzioni che mi fanno ritenere come l'ipotesi ammessa valga per tutte le superficie, sono in breve queste: L'ipotesi, in forza del teorema da essa dedotto, equivale ad ammettere che la differenza $2n - \rho$ non cresca oltre ogni limite. Ora, se si pensa che il fatto che la serie sia di pseudo-equivalenza vien espresso dal teorema conclusivo del n. 9, s'intuisce come il numero delle condizioni esprimenti il fatto medesimo debba esser limitato dai caratteri della superficie ed anzi che il massimo di quel numero debba dipendere dal genere geometrico, dall'irregolarità e dal numero degl'integrali doppi di 1ª specie, che provengono dagli jacobiani delle coppie d'integrali semplici di 1ª specie.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Quelques théorèmes relatifs à la méthode par récurrence.* Nota [1] di S. Sarantopoulos, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. Très récemment, j'eus l'honneur de présenter à cette Académie une Note [2] sous le titre *Un théorème se rattachant à la méthode par récurrence* dans laquelle j'ai donné un théorème général concernant la méthodologie mathématique, et deux autres proposition auxiliaires. Cette Note doit être complétée par la présente dans laquelle je donne, d'une part, quelques autres théorèmes auxiliaires se trouvant en étroite relation avec ceux de la première Note, et d'autre part, une application intéressante par laquelle on met en évidence l'importance du théorème général de la première Note.

Nous appelons proposition (A), une proposition satisfaisant à trois hypothèses désignées dans la première Note par les numéros 1°, 2°, 3°. De même, on y voit bien, que sont les trois hypothèses désignées pour α, β, γ. Pour la commodité du lecteur qui a lu la première Note, nous continuons la numération des théorèmes et des formules, en désignant les nouveaux théorèmes par III, IV ··· et les nouvelles formules par (16), (17), (18) ···

2. Théorème III. – *Si pour une proposition* (A) *étant vraie pour* $m - 1$ *indices quelconques les trois hypothèses* α, β, γ *sont remplies, quand on considère la suite de* m *indices*

$$(16) \qquad \rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_u, a, a, \cdots, a, \text{ où } \rho_1 \geqq \rho_2 \geqq, \cdots, \geqq \rho_u > a \geqq 1,$$

les mêmes hypothèses seront aussi remplies, quand on considère la suite de m *indices*

$$(17) \qquad \rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_u, a+1, 2, 2, \cdots, 2.$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 18 ottobre 1934.

(2) Questi « Rendiconti », vol. XX, ser. 6ª, 2° sem., fasc. 7-8, p. 242.

Démonstration. – Pour démontrer ce théorème, il suffit d'appliquer à plusieurs reprises le théorème II. En effet, conformément à ce théorème, les trois hypothèses α, β, γ doivent être remplies quand on considère la suite d'indices

$$\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_u, a+1, 1, \cdots, 1, 1.$$

On peut donc appliquer sur celle-ci le théorème II, c'est-à-dire on a le droit d'augmenter l'un des indices égaux $1, 1, \cdots, 1$, d'une unités, les autres indices gardant les mêmes valeurs. Cela veut dire que les trois hypothèses α, β, γ doivent être remplies aussi quand on considère la suite d'indices,

$$\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_u, a+1, 2, 1, \cdots, 1, 1.$$

Pareillement en vertu du théorème II, les mêmes hypothèses α, β, γ doivent être remplies, quand on considère la suite d'indices

$$\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_u, a+1, 2, 2, 1, 1, \cdots, 1, 1$$

et ainsi de suite. On en conclut enfin, que les trois hypothèses α, β, γ seront remplies quand on considère aussi le suite d'indices

$$\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_u, a+1, 2, 2, \cdots, 2, 2$$

c'est-à-dire la suite (17). C. Q. F. D.

Théorème IV. – *Si, dans une proposition* (A) *étant vraie pour* $m-1$ *indices quelconques, les trois hypothèses* α, β, γ *sont remplies quand on considère la suite d'indices*

(18) $$\rho_1, \rho_2 \cdots, \rho_u, a, a, \cdots, a, a,$$

elles seront aussi remplies quand on considère la suite

(19) $$\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_u, a+1, a+1, \cdots, a+1.$$

Pour démontrer ce théorème, nous supposons, pour un moment, qu'on ait démontré la proposition suivante que nous désignons par (B):

Proposition (B). – *Si dans une proposition* (A) *les trois hypothèse* α, β, γ *sont remplies quand on considère une suite de m indices*

(20) $$r_1, r_2, r_h, a, a, \cdots, a \quad (\text{où } r_1 \geqq r_2 \geqq, \cdots, \geqq r_h > a)$$

elles seront aussi remplies, quand on considère une suite de m indices

(21) $$r_1, r_2, \cdots, r_h, a+1, b, b, \cdots, b,$$

où b désigne un nombre donné, inférieur ou égal à a *et h un nombre quelconque inférieur ou égal à* $m-1$. L'hypothèse que h soit quelconque veut dire que le nombre des indices égaux (qui sont plus petit que les autres) peut être quelconque.

A cause de cette hypothèse sur h, on peut appliquer la proposition (B) sur la nouvelle suite (21) dans laquelle les termes les plus petits sont égaux, maintenant, à b. On en conclut alors que les hypothèses α, β, γ seront aussi remplies quand on considère la suite de m indices

$$r_1, r_2, \cdots, r_h, a+1, b+1, b, \cdots, b.$$

Donc, à cause de la même proposition (B), les hypothèses α, β, γ seront aussi remplies, quand on considère la suite de m indices

$$r_1, r_2, \cdots, r_h, a+1, b+1, b+1, b, \cdots, b.$$

En procédant de la même façon on en conclut enfin que les trois hypothèses α, β, γ doivent être remplies aussi quand on considère la suite

$$r_1, r_2, \cdots, r_h, a+1, b+1, b+1, \cdots, b+1.$$

On a démontré donc la proposition suivante que nous désignons par (Γ).

Proposition (Γ). — *Les trois hypothèses* α, β, γ *étant remplies quand on considère une suite de m indices* (20) *et celle que l'on obtient après l'augmentation d'un des indices égaux à* a *(qui sont plus petits que les autres et en nombre quelconque) d'une unité et le remplacement de tous ceux qui restent par un nombre donné b (où* $b \leq a$*), elles seront aussi remplies quand on augmente, dans la suite* (20), *l'un des indices égaux à* a *d'une unité et on remplace chacun des suivants (qui sont égaux au nombre* a*) par* $b+1$, *c'est-à-dire quand on remplace, dans la suite* (21), b, *par* $b+1$.

Mais on a démontré au théorème III que les trois hypothèses α, β, γ étant remplies quand on considère la suite d'indices (16) c'est-à-dire (18), elles seront aussi remplies quand on augmente l'un des indices égaux à a d'une unité et on remplace chacun des suivants par $b = 2$ et cela quel que soit le nombre des indices égaux (qui sont plus petits que tous les autres), donc la proposition (B) est vraie pour $b = 2$. Donc aussi la proposition (Γ) doit être vraie, et par conséquent les trois hypothèse α, β, γ seront aussi remplies, lorsque on remplace chacun de b par $b+1$, c'est-à-dire par 3; pareillement, lorsque on remplace $b = 3$ par $b+1 = 3+1 = 4$ et ainsi de suite. Donc enfin, elles seront remplies pour $b = a$ et par suite aussi lorsqu'on remplace $b = a$ par $b+1$ c'est-à-dire par $a+1$. Mais alors on obtiendra la suite (19). Le théorème IV donc est démontré.

THÉORÈME V. — *Si, dans une proposition* (A) *étant vraie pour* $m-1$ *indices, les trois hypothèses* α, β, γ *sont remplies quand on considère la suite de* m *indices*

$$\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_u, a, a, \cdots, a \tag{22}$$

où $\rho_1 \geqq \rho_2, \cdots \geqq \rho_u > a$ *elles seront aussi remplies quand on considère la suite d'indices*

$$\rho_1, \rho_1, \cdots, \rho_1.$$

En effet, conformément au théorème IV, puisque les trois hypothèses α, β, γ sont remplies quand on considère la suite (22) elles seront aussi remplies, quand on considère la suite de m indices

$$\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_u, a+1, a+1, \cdots, a+1;$$

et si l'on a $a+1 < \rho_u$ en appliquant de nouveau le théorème IV, on en conclut que les hypothèses α, β, γ seront aussi remplies quand on considère la suite de m indices

$$\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_u, a+2, a+2, \cdots, a+2,$$

et ainsi de suite, donc elles seront aussi remplies quand on considère la suite de m indices

$$\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_{u-1}, \rho_u, \rho_u, \cdots, \rho_u.$$

Par le même raisonnement on voit que les mêmes hypothèses seront aussi remplies quand on considère la suite de m indices

$$\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_{u-2}, \rho_{u-1}, \rho_{u-1}, \cdots, \rho_{u-1}.$$

En procédant de cette manière on en conclut enfin qu'elles seront remplies aussi quand on considère les m indices

$$\rho_1, \rho_1, \cdots, \rho_1. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

THÉORÈME VI. — *Si la proposition* (A) *est vraie pour* $m-1$ *indices quelconques et les trois hypothèses* α, β, γ *sont remplies quand on considère les* m *indices égaux*

$$\rho, \rho, \rho, \cdots, \rho, \tag{23}$$

les mêmes hypothèses seront aussi remplies quand on considère les m *indices*

$$\rho+1, \rho+1, \cdots, \rho+1.$$

En effet, en vertu du théoreme I, la proposition (A) est vraie pour les m indices

$$(24) \qquad \rho + 1, 1, 1, \cdots, 1$$

ρ étant quelconque. Donc l'hypothèse α est remplie.

En diminuant quelques uns des indices on trouvera ou bien une suite pareille de m indices (cela arrive quand on diminue $\rho + 1$ seulement) ou bien une suite pareille ayant $m - n$ indices différents de zéro. Dans le premier cas la proposition (A) est vraie à cause du théorème I; dans la deuxième cas, elle est vraie parce qu'elle est vraie, par hypothèse pour $m - 1$ indices quelconques. Donc l'hypothèse β est remplie.

Enfin, si l'on remplace $\rho + 1$ par $(\rho + 1) - \varepsilon \geqq 1$ et l'on met à la place de tous les suivants (qui sont inférieur à $\rho + 1$ et égaux entre eux) d'autres inférieurs ou égaux au $(\rho + 1) - \varepsilon$, la suite (24) devient

$$(25) \qquad \rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_h, \cdots, \rho_m, \quad \text{où} \quad \rho_h \leqq \rho \quad \text{et} \quad h = 1, 2, \cdots, m.$$

Cette suite (25) peut être obtenue, évidemment, de la suite (23) par diminution de ses termes et par conséquent la proposition (A) doit être vraie pour ces indices (25), à cause de l'hypothèse [1] faite sur la suite d'indices (23). On en conclut que l'hypothèse γ est remplie quand on considère la suite (24).

On a démontré donc que les trois hypothèses α, β, γ seront aussi remplies quand on considère la suite de m indices (24). D'ailleurs on a supposé que la proposition (A) est vraie pour $m - 1$ indices quelconques. On en conclut alors, à cause du théorème V, que les trois hypothèses α, β, γ, seront aussi remplies quand on considère la suite de m indices

$$\rho + 1, \rho + 1, \cdots, \rho + 1. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème VII. — *Si la proposition* (A) *est vraie pour* $m - 1$ *indices quelconques et pour* m *indices dont chacun est égal à l'unité, elle sera aussi vraie pour* m *indices quelconque.*

Soient $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_m$ les m indices quelconques où $\rho_1 \geqq \rho_2 \geqq, \cdots, \geqq \rho_m$. Par hypothèse la proposition (A) est vraie pour les m indices

$$(26) \qquad 1, 1, 1, \cdots, 1.$$

Évidemment les trois hypothèses α, β, γ sont remplies quand on considère la suite d'indices (26), par conséquent elles seront aussi remplies quand on considère les m indices

$$2, 2, 2, \cdots, 2,$$

(1) On a supposé que α, β ; γ sont remplies, quand on considère la suite (23), donc (A) doit être vraie pour (25) à cause de l'hypothèse β.

conformément au théorème précédent. Donc aussi quand on considère les m indices

$$3 , 3 , \cdots , 3$$

et ainsi de suite. Donc les hypothèses α , β , γ seront remplies, aussi quand on considère les m indices

$$\rho_1 , \rho_1 , \cdots , \rho_1 .$$

Par conséquent, maintenant, à cause de l'hypothèse β seule, la proposition (A) sera vraie pour les indices

$$\rho_1 , \rho_2 , \cdots , \rho_m ,$$

qu'on obtient en diminuant les précédents. C. Q. F. D.

Théorème VIII. – *Une proposition* (A) *ne contenant que m indices, est vraie quelles que soient leurs valeurs et le nombre m*.

En effet, on a supposé dans la définition de la proposition (A) qu'elle est vraie pour un seul indice quelconque (hypothèse 1°), et pour un nombre m d'indices, quand chacun d'eux est égal à l'unité (hypothèse 2°). Contentons nous, pour un moment, que m ait la valeur 2 ($m = 2$). Alors, à cause du théorème précédent, VII, la proposition (A) sera vraie pour deux indices quelconques. Mais alors, en supposant $m = 3$, on voit que la proposition (A) est vraie pour les trois indices, ($m = 3$): 1 , 1 , 1 et pour $m - 1 = 3 - 1$ indices quelconques (comme nous l'avons démontré toute à l'heure). Donc elle sera vraie pour trois indices quelconques, et ainsi de suite. Donc la proposition (A) contenant un nombre m quelconque d'indices sera vraie quelles que soient leurs valeurs. C. Q. F. D.

On voit bien que le théorème précédent VIII n'est autre chose que le théorème général portant le titre « un théorème se rattachant à la méthode par récurrence » que nous avons cité au commencement de la première Note.

6. – Pour montrer l'importance de ce théorème nous citons l'exemple suivant.

Exemple. – Formons avec les nombres

$$\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3 , \cdots , \alpha_m \tag{27}$$

une suite (T) de nombres de la manière suivante. On ajoute à zéro un de ces nombre, puis on ajoute au résultat un des mêmes nombres, ensuite on ajoute, au nouveau résultat, un nombre quelconque de la mêmes suite (27), et ainsi de suite. On ajoutera α_1 en tout ρ_1 fois, α_2 en tout ρ_2 fois, ···

et α_m en tout ρ_m fois. Chaque résultat qu'on obtient après l'addition d'un α, sera un terme de la suite (T). En multipliant tous ces termes on obtiendra un produit Π. On peut former de tels produits tant, autant les différentes manières d'ordre qui se présentent quand on ajoute les nombres α de la suite (27), c'est-à-dire un nombre égal au nombre des permutations avec répétitions de $\rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_m$ lettres, dont ρ_1 d'eux coincident avec α_1, ρ_2 avec $\alpha_2 \cdots$ et ρ_m avec α_m.

La somme S *de toutes les fractions de la forme* $\frac{1}{\Pi}$ *qui correspondent aux indices considérés* $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_m$, *sera*

$$S = \frac{1}{\rho_1!\,\rho_2! \cdots \rho_m!\,\alpha_1^{\rho_1}\alpha_2^{\rho_2}\cdots\alpha_m^{\rho_m}}. \tag{28}$$

En effet, on remarque que,

α') la proposition est vraie pour un seul indice quelconque ρ_h, car on a, évidemment, les termes

$$\alpha_h, 2\alpha_h, 3\alpha_h, \cdots, \rho_h\alpha_h,$$

dont le produit est égal à $\rho_h!\,\alpha_h^{\rho_h}$, et comme on ne peut pas former un autre produit pareil, on aura

$$S = \frac{1}{\Pi} = \frac{1}{\rho_h!\,\alpha_h^{\rho_h}}.$$

β') Elle est vraie pour $\rho_{n_1} = \rho_{n_2} = \cdots = \rho_{n_\nu} = 1$, $\nu \leq m$, car on ne peut former, avec ces indices, que les termes $\alpha_{n_1}, \alpha_{n_2}, \cdots, \alpha_{n_\nu}$ et cela d'une seule manière; ils sont les seuls termes que contient la suite (T). On a par suite

$$\Pi = \alpha_{n_1}\alpha_{n_2}\cdots\alpha_{n_\nu}, \quad \text{donc} \quad S = \frac{1}{\Pi} = \frac{1}{1!\,1!\cdots 1!\,\alpha_{n_1}^1\alpha_{n_2}^1\cdots\alpha_{n_\nu}^1}.$$

γ') On voit facilement que, quel que soit m, la proposition étant supposée vraie pour

$$\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_u - 1, \cdots, \rho_m, \quad (u = 1, 2, \cdots, m),$$

elle est aussi vraie pour les indices

$$\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_u, \cdots, \rho_m.$$

En effet, on remarque que dans toutes les manières de construction de termes de la suite (T), le dernier terme aura la forme

$$\sigma = \alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2 + \cdots + \alpha_m\rho_m,$$

c'est-à-dire, il y sera le même; et l'avant-dernier terme aura la forme

$$\sigma_u = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 + \cdots + \alpha_{u-1} \rho_{u-1} + \alpha_u (\rho_u - 1) + \alpha_{u+1} \rho_{u+1} + \cdots + \alpha_m \rho_m$$

où u prend les valeurs $1, 2, \cdots, m$. Par conséquent la suite (T) contient m groupes de termes correspondant à ces m valeurs de u et la somme S est égale à la somme de toutes les sommes particulières qu'on obtient quand on ajoute séparément les fractions $\left(\text{de forme } \frac{1}{\Pi}\right)$ de chaque groupe. Soit S'_u la somme provenant du groupe u. Alors on a

$$S = S'_1 + S'_2 + \cdots + S'_u + \cdots + S'_m. \tag{29}$$

D'ailleurs on remarque que le nombre σ_u est le dernier terme qu'on obtient quand on forme les termes de la suite (T) avec les lettres (27) prises respectivement

$$\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_{u-1}, \rho_u - 1, \rho_{u+1}, \cdots, \rho_m \tag{30}$$

fois, de toutes les manières possibles. Soit S_u la somme de toutes les fractions de la forme $\frac{1}{\Pi}$ qu'on obtient avec les indices (30). Quand on multiplie chaque forme de S_u par $\frac{1}{\sigma}$ on obtient, évidemment, un terme de la somme S'_u et inversement. On peut donc écrire

$$S'_u = \frac{1}{\sigma} S_u.$$

Mais puisque on a admis que la proposition est vraie pour les indice (30), on doit avoir

$$S_u = \frac{1}{\rho_1! \rho_2! \cdots \rho_{u-1}! (\rho_u - 1)! \rho_{u+1}! \cdots \rho_m! \, \alpha_1^{\rho_1} \alpha_2^{\rho_2} \cdots \alpha_{u-1}^{\rho_{u-1}} \alpha_u^{\rho_u - 1} \alpha_{u+1}^{\rho_{u+1}} \cdots \alpha_m^{\rho_m}},$$

c'est-à-dire

$$S_u = \frac{\rho_u \alpha_u}{\rho_1! \rho_2! \cdots \rho_u! \cdots \rho_m! \, \alpha_1^{\rho_1} \alpha_2^{\rho_2} \cdots \alpha_u^{\rho_u} \cdots \alpha_m^{\rho_m}}$$

(avec $u = 1, 2, 3, \cdots, m$). Alors la relation (29) devient

$$S = \frac{1}{\sigma}(S_1 + S_2 + \cdots + S_m) = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\rho_1 \alpha_1 + \rho_2 \alpha_2 + \cdots + \rho_m \alpha_m}{\rho_1! \rho_2! \cdots \rho_m! \, \alpha_1^{\rho_1} \alpha_2^{\rho_2} \cdots \alpha_m^{\rho_m}},$$

c'est-à-dire

$$S = \frac{1}{\rho_1! \rho_2! \cdots \rho_m! \, \alpha_1^{\rho_1} \alpha_2^{\rho_2} \cdots \alpha_m^{\rho_m}}.$$

On en conclut que, pour la proposition que nous venons de considérer, les trois hypothèses 1°, 2°, 3° sont remplies quel que soit m. Elle est donc une proposition (A) quel que soit m et par conséquent la formule (23) est toujours vraie quels que soient les entiers $m, \rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_m$ et les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$.

Matematica (Analisi). — *Su una classe di funzionali analitici.* Nota II[1] di G. Belardinelli, presentata dal Socio S. Pincherle.

1. Prima di collegare i funzionali H con classici funzionali della analisi desideriamo fare, in questo paragrafo, alcune osservazioni riguardanti i rapporti di questa classe di funzionali con la trasformazione di Laplace-Abel.

L'integrale generalizzato

$$(1) \qquad f(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\,\varphi(t)\,dt;$$

ove $\varphi(t)$ è una funzione di variabile reale o complessa della variabile t, data univocamente nell'intervallo $(c, +\infty)$, limitata ed integrale in ogni tratto finito ed x è variabile complessa, si chiama trasformazione di Laplace–Abel.

La trasformazione inversa è stata data nella forma

$$(2) \qquad \varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} f(u)\,e^{tu}\,du\,.$$

I funzionali H si ricollegano a questa trasformazione inversa.

Sia ad esempio il funzionale $H^{\alpha,\beta}_{\gamma,1}\,y$, cioè:

$$(3) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{t}\,F\left(\alpha, \beta, \gamma), \frac{x}{t}\right)\varphi(t)\,dt,$$

ove c è una curva che racchiude i punti singolari o ed x, della funzione indicatrice e lascia all'esterno quelli della funzione $\varphi(t)$.

Poniamo

$$\frac{1}{t} = u \quad , \quad \varphi_1(u) = \frac{1}{u}\,\varphi(u),$$

sarà

$$dt = -\frac{1}{u^2}\,du,$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 27 settembre 1934.

si ha

$$(4) \qquad f(x) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{c_1} F(\alpha, \beta, \gamma, ux)\, \varphi_1(u)\, du;$$

e cambiando segno alla funzione integranda ed il verso del percorso alla curva c_1 e sia $c_1 = c_1'$, si avrà:

$$(5) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1'} F(\alpha, \beta, \gamma, ux)\, \varphi_1(u)\, du,$$

ove la curva c_1' racchiude i punti singolari $\frac{1}{x}$ ed ∞ della $F(\alpha, \beta, \gamma, ux)$ e lascia all'esterno quelli della funzione $\varphi_1(u)$ che è regolare all'infinito essendo la φ regolare nell'origine, cioè la (5) è il residuo integrale all'infinito, della funzione

$$F(\alpha, \beta, \gamma, ux)\, \varphi_1(u)$$

e la $F(\alpha, \beta, \gamma, ux)$ è l'indicatrice simmetrica del funzionale $H_{\gamma, 1}^{\alpha, \beta} v$.

In particolare la trasformazione ottenuta per la funzione indicatrice e^{ux} sarà

$$(6) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} e^{ux}\, \varphi_1(u)\, du,$$

che differisce dalla inversa della trasformazione di Laplace-Abel soltanto per il cammino c' perchè nella (2) il cammino passa proprio per il punto singolare dell'esponenziale mentre nella (6) la funzione integranda si mantiene sempre regolare lungo il cammino di integrazione.

Quanto abbiamo detto è sufficiente a dare i rapporti che intercedono tra i funzionali H di qualunque ordine e classe e la teoria delle funzioni determinanti e generatrici.

2. Desideriamo subito mostrare il legame che intercede fra i funzionali H e l'operazione di integrazione.

Indichiamo con I il funzionale che trasforma una funzione $f(x)$ nella primitiva e con I^n l'iterazione ennesima di questa operazione:

Sia la serie:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

si avrà

$$Iy = \frac{x}{2\pi i} \int_{0}^{1} F\left(1, 1, 2, \frac{x}{t}\right) y(t)\, dt = xH_2' y$$

ed in generale

$$I_y^n = \frac{x^n}{n!} H_{n+1}^1 y,$$

ove la curva c lascia all'esterno le singolarità di $y(t)$ e racchiude il punto o ed il punto x.

3. Gli operatori H rientrano nella classe degli operatori U di Pincherle, cioè degli operatori normali e sono precisamente particolari operatori U di ordine zero. Questi operatori U hanno la proprietà di essere commutabili con l'operazione xD, si ha ad esempio, per $H_{\gamma,1}^{\alpha,\beta} y$

$$xDH_{\gamma,1}^{\alpha,\beta} = H_{\gamma,1}^{\alpha,\beta}(tD)$$

valevole per tutti gli operatori U, relazione che assume forma interessante per gli operatori H.

Infatti si ha essendo

$$xF_x'(\alpha, 1, \gamma, x) = \alpha(F(\alpha+1) - F(\alpha)), \tag{7}$$

ove abbiamo indicato con $F(\alpha+1)$ la funzione $F(\alpha+1, \beta, \gamma, x)$ e con $F(\alpha)$ la funzione $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ che

$$xDH_{\gamma,1}^{\alpha,\beta} y = \alpha\left(H_{\gamma,1}^{\alpha+1,\beta} - H_{\gamma,1}^{\alpha,\beta}\right) y, \tag{8}$$

Indicando con $\Delta H_{\gamma,1}^{\alpha,\beta}$ la differenza

$$H_{\gamma,\beta}^{\alpha+1,\beta} - H_{\gamma,1}^{\alpha,\beta} y$$

possiamo scrivere la (8) così

$$xDH_{\gamma,1}^{\alpha,\beta} y = \alpha\Delta_\alpha H_{\gamma,1}^{\alpha,\beta} y.$$

Come caso particolare avremo

$$Dy = \frac{1}{x}(H_1^2 - H_1^1) y.$$

Così la derivazione, oltre alla integrazione, è rappresentata da un funzionale H.

In generale si avrà

$$D_y^n = \frac{n!}{x^n} \Delta_1^{(n)} H_1^1 y.$$

4. Sia ora l'equazione alle differenze finite

$$g(\lambda+1) = \frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)} g(\lambda) \tag{9}$$

ove

$$\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)} = c\,\frac{(\lambda-\alpha_1)^{r_1}(\lambda-\alpha_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\alpha_m)^{r_m}}{(\lambda-\gamma_1)^{s_1}(\lambda-\gamma_2)^{s_2}\cdots(\lambda-\gamma_p)^{s_n}}$$

supponendo $r_1+r_2+\cdots+r_m \leq s_1+s_2+\cdots+s_p$, ed $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$, e $\gamma_1,\cdots,\lambda_p$ diversi da zero e da interi positivi.

Avremo facilmente che un operatore ipergeometrico H che opera su una funzione

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$$

può rappresentarsi con

$$Hy = g(xD)\,y = \sum_{n=0}^{\infty} g(n)\,a_n\,x^n,$$

ove $g(n)$ è una soluzione della equazione alle differenze finite (9).

5. Pincherle ha studiato un funzionale che ha chiamato logaritmo funzionale rappresentato dall'integrale

$$\Lambda\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int_c \log\frac{t}{t-x}\,\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt, \tag{10}$$

ove φ è regolare nell'origine e la curva c è una linea chiusa circondante l'origine e tutta contenuta nel campo di regolarità della $\varphi(t)$.

Si ha anche la rappresentazione

$$\Lambda\varphi = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{1}{n\cdot n!}\,x^n\,D^n\varphi.$$

Avremo essendo

$$\log(1+x) = xF(1,1,2;-x)$$

che

$$\Lambda\varphi = \frac{x}{2\pi i}\int_c \frac{1}{(t-x)^2}\,F\left(1,1,2,\frac{1}{t-x}\right)\varphi(t)\,dt$$

il derivato funzionale secondo Λ''_φ sarà

$$\Lambda''_\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int_c F\left(1,1,2,\frac{-x}{t-x}\right)\varphi(t)\,dt.$$

Avremo dunque che

$$\Lambda''_\varphi = xH\left[t\varphi(t);1,1,2,\frac{-x}{1-x}\right].$$

Mediante i funzionali ipergeometrici possiamo esprimere oltre ai funzionali I e D ed i loro iterati, i funzionali xD, $x^n D^n$, $(xD)^n$, le serie ordinate per le potenze di xD, il logaritmo funzionale ecc.

Qui ci siamo limitati a richiamare la relazione tra i funzionali H con i suddetti classici funzionali.

In altri lavori tratteremo di altri funzionali ed in special modo dei funzionali normali di Pincherle di ordine diverso da zero, in relazione con i funzionali ipergeometrici ora introdotti.

Matematica (Geometria). — *Sull'applicabilità proiettiva di due superficie.* Nota[1] di G. Palozzi, presentata dal Socio G. Fubini.

1. G. Fubini[2], nell'estendere alla geometria proiettiva la nozione di applicabilità di due superficie, ha osservato che gli analoghi dei due casi della geometria metrica (applicabilità effettiva e applicabilità o corrispondenza conforme) conducono ad una stessa corrispondenza, caratterizzata dall'uguaglianza degli elementi lineari proiettivi delle due superficie.

Rimaneva quindi da studiare, ed anzi aumentava d'interesse, il problema di determinare i caratteri delle corrispondenze fra due date superficie aventi elementi lineari proiettivi proporzionali.

A questo studio è dedicata la presente Nota. Il risultato, estremamente semplice, a cui si perviene è il seguente:

Ogni corrispondenza biunivoca fra i punti di due superficie S *e* $\overline{S}$, *i cui elementi lineari proiettivi siano (in punti omologhi e per direzioni omologhe) fra loro proporzionali, si può definire come una corrispondenza, che conserva le asintotiche, la quale gode di questa proprietà caratteristica: per ogni coppia di punti omologhi* O, $\overline{O}$ *esiste una proiettività che porta* O *in* $\overline{O}$ *e muta* S *in una superficie* $\overline{\overline{S}}$ *tale che* $\overline{S}$ *e* $\overline{\overline{S}}$ *hanno in* $\overline{O}$ *un contatto del primo ordine (almeno) lungo ogni coppia di curve omologhe, e ne hanno uno del secondo ordine lungo le asintotiche.*

2. Supponendo le superficie S e $\overline{S}$ rappresentate da equazioni parametriche ed i parametri scelti in modo che le coordinate proiettive omogenee $x\,(=x_i)$ e $\overline{x}\,(=\overline{x}_i)$ $(i=1,2,3,4)$ di due punti omologhi corrispondano agli stessi valori dei parametri, si avrà

$$x = x(u,v) \quad , \quad \overline{x} = \overline{x}(u,v);$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 ottobre 1934.

(2) Ved. p. es. Fubini e Čech, *Geometria proiettiva differenziale*, Bologna, Zanichelli, to. I, § 20.

siccome poi le asintotiche si corrispondono, si può supporre che le linee parametriche u, v siano asintotiche tanto su S quanto su $\overline{S}$. Allora gli elementi lineari proiettivi di S e $\overline{S}$ si possono rappresentare con

$$\frac{\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3}{2\, du\, dv} \quad , \quad \frac{\bar{\beta}\, du^3 + \bar{\gamma}\, dv^3}{2\, du\, dv}$$

e le x e le $\bar{x}$ soddisfano a sistemi del tipo

$$(1)\quad \begin{cases} x_{uu} = a x_u + \beta x_v + c x \\ x_{vv} = a' x_v + \gamma x_u + c' x \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} \bar{x}_{uu} = \bar{a} \bar{x}_u + \bar{\beta} \bar{x}_v + \bar{c} \bar{x} \\ \bar{x}_{vv} = \bar{a}' x_v + \bar{\gamma} \bar{x}_u + \bar{c}' \bar{x} \end{cases}$$

ove i coefficienti a, c, a', c' e $\bar{a}, \bar{c}, \bar{a}', \bar{c}'$ (e questi soltanto) dipendono dal fattore di proporzionalità insito nelle coordinate omogenee. In particolare quindi le coordinate non omogenee

$$X = \frac{x^1}{x^4} \quad , \quad Y = \frac{x^2}{x^4} \quad , \quad Z = \frac{x^3}{x^4} \quad \text{e} \quad \overline{X} = \frac{\bar{x}^1}{\bar{x}^4} \quad , \quad \overline{Y} = \frac{\bar{x}^2}{\bar{x}^4} \quad , \quad \overline{Z} = \frac{\bar{x}^3}{\bar{x}^4}$$

soddisfano a sistemi (1) e (2) con $c = c' = 0$ e $\bar{c} = \bar{c}' = 0$.

Trasformare la superficie S mediante una proiettività P equivale a sottoporre le x ad una sostituzione lineare omogenea a coefficienti costanti. Come risultato di questa sostituzione, si otterranno le

$$\bar{\bar{x}} = \bar{\bar{x}}(u, v)$$

che rappresenteranno la superficie $\bar{\bar{S}}$ trasformata di S mediante P; ed in questa rappresentazione due punti di $\bar{\bar{S}}$ e di S omologhi l'uno dell'altro nella proiettività P corrisponderanno agli stessi valori dei parametri, e le linee parametriche u, v saranno le asintotiche di $\bar{\bar{S}}$; e le

$$\overline{\overline{X}} = \frac{\bar{\bar{x}}^1}{\bar{\bar{x}}^4} \quad , \quad \overline{\overline{Y}} = \frac{\bar{\bar{x}}^2}{\bar{\bar{x}}^4} \quad , \quad \overline{\overline{Z}} = \frac{\bar{\bar{x}}^3}{\bar{\bar{x}}^4}$$

soddisferanno, per una conveniente determinazione di a e a' e per $c = c' = 0$, al sistema (1).

Considerati due punti omologhi O e $\overline{O}$ di S e $\overline{S}$, cioè fissata una coppia di valori u_0, v_0 di u, v, affinchè P porti O in $\overline{O}$ e sia tale che la trasformata $\bar{\bar{S}}$ di S mediante P abbia in $\overline{O}$ con $\overline{S}$ un contatto del primo ordine lungo ogni coppia di curve omologhe, occorre e basta che nel punto u_0, v_0 valgano le

$$(3)\qquad \overline{\overline{X}} = \overline{X} \quad , \quad \overline{\overline{X}}_u = \lambda \overline{X}_u \quad , \quad \overline{\overline{X}}_v = \lambda \overline{X}_v \qquad (\lambda \text{ cost. arbitraria})$$

e le uguaglianze analoghe che da queste si ottengono sostituendo successivamente X con Y e Z.

Ciò posto, si supponga che P realizzi un contatto del secondo ordine in $\overline{O}$ fra le asintotiche di $\overline{\overline{S}}$ e quelle di $\overline{S}$. Sarà in $\overline{O}$

$$(4) \qquad \frac{d^2\overline{\overline{Y}}}{d\overline{\overline{X}}^2} = \frac{d^2\overline{Y}}{d\overline{X}^2} \quad , \quad \frac{d^2\overline{\overline{Z}}}{d\overline{\overline{X}}^2} = \frac{d^2\overline{Z}}{d\overline{X}^2}$$

tanto per le linee u che per le v; cioè si avrà per $u = u_0 , v = v_0$

$$\frac{\overline{\overline{Y}}_{uu}\,\overline{\overline{X}}_u - \overline{\overline{Y}}_u\,\overline{\overline{X}}_{uu}}{\overline{\overline{X}}_u^3} = \frac{\overline{Y}_{uu}\,\overline{X}_u - \overline{Y}_u\,\overline{X}_{uu}}{\overline{X}_u^3} ,$$

l'uguaglianza analoga con Z al posto di Y, e poi le altre due analoghe a queste con v al posto di u. Tenendo conto delle (3) e ricordando che le $\overline{\overline{X}}, \cdots$ soddisfano ad un sistema (1) con $c = c' = 0$ e le $\overline{X}, \cdots$ ad un sistema (2) con $\bar{c} = \bar{c}' = 0$, la precedente dà per $u = u_0 , v = v_0$

$$\frac{\beta}{\overline{\beta}} = \lambda .$$

Analogamente si trova

$$\frac{\gamma}{\overline{\gamma}} = \lambda ;$$

sicchè

$$\frac{\beta}{\overline{\beta}} = \frac{\gamma}{\overline{\gamma}} .$$

Viceversa, se nel punto u_0 , v_0 è soddisfatta questa relazione, si indichi con λ il comune valore per $u = u_0 , v = v_0$ dei suoi due membri, e si trasformi la superficie S in una $\overline{\overline{S}}$ mediante una qualunque delle infinite proiettività per cui valgono le (3), con λ scelto nel modo suddetto. Da quanto precede risulta che in $\overline{O}$ valgono anche le (4), e quindi $\overline{\overline{S}}$ ha con $\overline{S}$ in $\overline{O}$ non solo un contatto del primo ordine (almeno) lungo ogni coppia di curve omologhe, ma ne ha uno del secondo lungo le asintotiche.

L'enunciato del n. 1 è così dimostrato.

3. L'analogia fra le proprietà delle corrispondenze fra due superficie aventi elementi lineari proiettivi proporzionali e le proprietà che per definizione hanno due superficie proiettivamente applicabili è manifesta. Se con-

veniamo di chiamare *applicabilità proiettiva impropria* [1] una corrispondenza biunivoca fra i punti di due superficie S e $\overline{S}$ quando conserva le asintotiche ed è tale che, per ogni coppia di punti omologhi O, $\overline{O}$, esista una proiettività che porti O in $\overline{O}$ e S in una superficie $\overline{\overline{S}}$ avente con $\overline{S}$ in $\overline{O}$ un contatto del primo ordine (almeno) lungo ogni coppia di curve omologhe e uno del secondo lungo le asintotiche, il precedente risultato si può esprimere dicendo:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una corrispondenza biunivoca fra due superficie sia un'applicabilità proiettiva impropria è che le due superficie abbiano elementi lineari proiettivi proporzionali.

4. L'applicabilità proiettiva impropria sembrerebbe quindi che si potesse considerare quasi come un'estensione alla geometria proiettiva della corrispondenza conforme.

Questo modo di considerarla sembra tanto più giustificato in quanto che, come nella geometria metrica la corrispondenza conforme differisce dall'applicabilità effettiva perchè nell'una si parla di contatto geometrico e nell'altra di contatto analitico, così *se nella corrispondenza sopra definita si suppone il contatto (non geometrico, ma) analitico, si ottiene proprio l'applicabilità proiettiva di Fubini.*

Basta osservare che, se il contatto è analitico, debbono valere le (3) ma con $\lambda = 1$, onde $\beta = \overline{\beta}$ e $\gamma = \overline{\gamma}$; il che prova intanto che una corrispondenza la quale soddisfi alle condizioni della definizione del numero precedente, ma supponendo il contatto analitico, è un'applicabilità proiettiva secondo Fubini. Che valga poi anche l'inverso risulta dalla definizione stessa di Fubini, quando si tenga presente che in essa è lecito supporre il contatto analitico.

Se poi si osserva che il contatto analitico del secondo ordine lungo le asintotiche porta di conseguenza il contatto analitico del primo ordine (almeno) lungo ogni coppia di curve omologhe, si può affermare:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una corrispondenza biunivoca fra due superficie S *e* $\overline{S}$ *che conservi le asintotiche sia un'applicabilità proiettiva secondo Fubini è che, per ogni coppia di punti omologhi* O, $\overline{O}$, *esista una proiettività che porti* O *in* $\overline{O}$ *e* S *in una superficie* $\overline{\overline{S}}$ *le cui asintotiche abbiano in* $\overline{O}$ *un contatto analitico del secondo ordine con le asintotiche di* $\overline{S}$.

5. Terminerò con una proprietà caratteristica per le applicabilità proiettive improprie.

Siano S e $\overline{S}$ due superficie fra i cui punti interceda una corrispondenza biunivoca, la quale conservi le asintotiche; O e $\overline{O}$ due punti omologhi, e

(1) Riservando la denominazione di *applicabilità proiettiva propria* all'applicabilità proiettiva di Fubini.

π e $\overline{\pi}$ due piani *omologhi* delle stelle di centri O e $\overline{O}$, cioè osculatori in O e $\overline{O}$ a due curve omologhe C e $\overline{C}$ di S e $\overline{S}$. In corrispondenza di uno di questi piani, p. es. di π, si può considerare il birapporto $(P\,P_0\,P_1\,P_2)$ dei punti che corrispondono a π nella corrispondenza di Segre e nelle polarità rispetto alla quadrica di Lie e alle quadriche asintotiche osculatrici alla C. Si trova [1]

$$(P\,P_0\,P_1\,P_2) = \frac{\gamma\,dv^3}{\beta\,du^3}\,.$$

Perciò: *condizione necessaria e sufficiente affinchè una corrispondenza biunivoca fra due superficie* S e $\overline{S}$ *che conservi le asintotiche sia un'applicabilità proiettiva impropria è che, per ogni coppia di punti omologhi* O, $\overline{O}$, *i birapporti* $(P\,P_0\,P_1\,P_2)$ *e* $(\overline{P}\,\overline{P}_0\,\overline{P}_1\,\overline{P}_2)$ *corrispondenti a due piani omologhi qualunque delle stelle di centri* O *e* $\overline{O}$ *siano uguali.*

Matematica. — *Sulle quaterne di Salmon nelle cubiche piane di genere I.* Nota di J. Pastor Rey, presentata dal Socio F. Enriques.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Se P_1 (P_2) è il polo rispetto alla quadrica individuata dalle tangenti asintotiche alle linee u (v) uscenti da O e dai due punti di C infinitamente vicini. Ved. la mia Nota: *Corrispondenze proiettivamente associate, in un punto, ad una superficie,* «Rend. Lincei», 1931.

Meccanica (Idromeccanica). — *Formule generali per il calcolo delle azioni dinamiche esercitate da una corrente piana non stazionaria su un ostacolo mobile.* Nota [1] di A. Consiglio, presentata dal Corrisp. U. Cisotti.

Un moto liquido sia prodotto da una corrente piana omogenea traslocircolatoria non necessariamente stazionaria anche all'infinito che investa un ostacolo (sezione con il piano del moto di un cilindro indefinito con le generatrici ortogonali al piano del moto) mobile nel detto piano di moto rototraslatorio ed avente per contorno una curva C affatto arbitraria salvo condizioni di regolarità molto late. Detti: p la pressione specifica, ρ la densità (costante) del liquido, U il potenziale specifico delle forze di massa agenti sul liquido, $\boldsymbol{n}$ il versore della normale a C rivolta verso l'interno e ds un elemento di C, come è noto, la risultante $\boldsymbol{R}$ delle azioni dinamiche esercitate dal liquido su l'ostacolo, la quale coincide con l'azione totale diminuita di quella archimedea, è data dal vettore

$$\boldsymbol{R} = \int_C (p - \rho U)\, \boldsymbol{n}\, ds \tag{1}$$

mentre se P è un punto generico di C il momento risultante, rispetto ad un punto O dell'ostacolo, di dette azioni dinamiche è il vettore con l'unica componente sinistrorsa secondo la normale all'ostacolo:

$$M = \boldsymbol{k} \times \int_C (p - \rho U)\, (\mathrm{P} - \mathrm{O}) \wedge \boldsymbol{n}\, ds, \tag{2}$$

essendo $\boldsymbol{k}$ il versore della normale al piano del moto assunta come positiva.

Il calcolo effettivo delle azioni dinamiche destate da una tale corrente su un tale ostacolo, che è stato oggetto di numerosi lavori in altrettanti casi particolari, si è effettuato, per quanto mi risulta, caso per caso apportando nelle (1) e (2) le semplificazioni caratterizzanti il particolare problema considerato. Per agevolare tale calcolo sono state assegnate delle formule valide per certe classi di particolari problemi per esempio dal Cisotti [2] e

(1) Pervenuta all'Accademia il 10 settembre 1934.

(2) U. Cisotti, *Ancora su di una eccezione del teorema di Kutta-Joukowski. (Una estensione delle formule di Blasius).* Questi « Rendiconti », vol. VII, fasc. 1, pp. 17-19, 1928.

dal Masotti [1] o addirittura formule valide per il caso generale per esempio dal Masotti [2]; che nella pratica applicazione possono talvolta presentare degli inconvenienti. Si noti per esempio che mentre tali formule sono trovate con l'ausilio delle funzioni di variabile complessa nel piano del moto, esse, nel caso dei moti non stazionari, contengono termini non calcolabili mediante applicazione del teorema di Cauchy su i residui. Inoltre dette formule contengono esplicitamente termini non necessari, quali per esempio quelli dipendenti dal baricentro geometrico dell'ostacolo o dai suoi elementi cinetici.

Introducendo una particolare operazione di derivazione rispetto al tempo, nella presente Nota sono assegnate per gli integrali (1) e (2) delle forme che oltre a non presentare gli accennati inconvenienti, sono dotate di notevole semplicità ed eleganza.

Successivamente saranno fatte applicazioni a casi concreti.

1. *Posizione del problema.* – Consideriamo un generico problema della specie indicata. Fissiamo nel piano del moto un sistema cartesiano ortogonale *fisso* xQy, con l'origine in Q, e posto $z = x + iy$, diciamo $z_0 = x_0 + iy_0$ l'affissa di un punto determinato O dell'ostacolo. Siano inoltre $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ i versori degli assi, in modo che risulti $\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$.

In ogni problema si cerca di realizzare una trasformazione conforme che porti il cóntorno C (mobile) dell'ostacolo nel cerchio γ di raggio unitario con il centro dell'origine Ω di un piano ζ. Dopo di che si risolve il problema idrocinematico sul piano ζ determinandone il potenziale complesso corrispondente.

È chiaro che, tanto la trasformazione conforme quanto questo potenziale dipenderanno dal tempo oltre che per il tramite della ζ, per il tramite di un gruppo di quantità, che diremo $\delta_1, \delta_2, \cdots$ le quali possono essere, ad esempio, gli elementi caratterizzanti la posizione istantanea dell'ostacolo, le caratteristiche cinetiche dell'ostacolo e quelle della corrente, che si suppone in generale variabile.

Supporremo perciò determinata la trasformazione

$$z = z(\zeta, \delta_1, \delta_2, \cdots) \quad , \quad |\zeta| \geq 1 \, , \tag{3}$$

ed il potenziale complesso $f(\zeta, \delta_1, \delta_2, \cdots)$ con $\delta_i = \delta_i(t)$, e dove una delle δ_i potrà eventualmente coincidere con la variabile tempo t.

(1) A. Masotti, *a*) *Una estensione delle formule del Blasius.* Questi «Rendiconti», vol. III, fasc. 8, pp. 472-476, 1926; *b*) *Azione dinamica esercitata da un liquido su un cilindro rotondo mobile in esso.* «Rend. del R. Ist. Lombardo», vol. LX, fasc. I-V, 1927.

(2) A. Masotti, *Azione dinamica che un liquido perfetto esercita su un solido cilindrico, di sezione qualunque, mobile in esso.* Questi «Rendiconti», vol. V, fasc. 11, pp. 872-876, 1927.

La velocità complessa w del moto liquido è fornita, come è noto, dalla $\frac{df}{dz}$ che, con riferimento al piano ζ e sotto l'ipotesi $\frac{\partial z}{\partial \zeta} \neq 0$ (1), si può scrivere

$$w = \frac{\partial f}{\partial \zeta} : \frac{\partial z}{\partial \zeta}. \tag{4}$$

2. *L'operazione* $\frac{\partial'}{\partial t}$. – Per realizzare una certa semplicità di sviluppi formali giova tener distinte le due derivazioni parziali rispetto al tempo fatte a z oppure a ζ costante. Indicheremo la prima al solito con $\frac{\partial}{\partial t}$, mentre per la seconda adotteremo il simbolo $\frac{\partial'}{\partial t}$. Avendo dunque una Φ espressa per la ζ e per i parametri δ_i dipendenti dal tempo, segue la relazione

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial' \Phi}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \tag{5}$$

dove, atteso il modo come Φ dipende da t:

$$\frac{\partial' \Phi}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial \delta_i} \frac{d\delta_i}{dt}.$$

Applicando la (5) alla (3) e tenendo presente che z è costante rispetto a t, si ha l'identità

$$0 = \frac{\partial' z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t};$$

mentre, per t costante, la relazione tra i differenziali dz e $d\zeta$ è:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \zeta} d\zeta, \tag{6}$$

che associata con la precedente dà:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} dz = -\frac{\partial' z}{\partial t} d\zeta. \tag{7}$$

È chiaro poi che l'operazione $\frac{\partial'}{\partial t}$ è invertibile con quella di coniugio su γ; cioè che (indicando al solito con $\overline{\Phi}$ i valori coniugati della Φ)

$$\overline{\frac{\partial' \Phi}{\partial t}} = \frac{\partial' \overline{\Phi}}{\partial t} \quad , \quad su\ \gamma; \tag{8}$$

(1) Questa ipotesi equivale a quella di essere la velocità finita dappertutto su C. Se C possiede punti cuspidali salienti (nei quali la velocità è infinita) la detta ipotesi va abbandonata e la (4) continua a sussistere.

ed inoltre che $\frac{\partial'}{\partial t}$ è pure invertibile con l'integrazione lungo γ. Anzi dopo effettuata una tale integrazione, $\frac{\partial'}{\partial t}$ diviene l'ordinaria derivazione $\frac{d}{dt}$; cioè

$$\int_\gamma \frac{\partial' \Phi}{\partial t}\, d\zeta = \frac{d}{dt} \int_\gamma \Phi\, d\zeta . \tag{9}$$

3. *Le azioni dinamiche della corrente.* - Per il teorema di Bernoulli generalizzato, si ha

$$p - \rho U = -\frac{\rho}{2} w^2 - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

con φ potenziale cinetico (parte reale di f). Poichè è [1] $\boldsymbol{n}\, ds = \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{t}\, ds = i(dx + i dy)\, \boldsymbol{i}$, il vettore $\boldsymbol{n}\, ds$ sotto forma complessa si scrive $i dz$, perciò, posto

$$F = w^2 + 2 \frac{\partial \varphi}{dt}, \tag{10}$$

la (1), sotto forma complessa si scrive

$$R_x + i R_y = -\frac{1}{2} i \rho \int_C F dz, \tag{11}$$

dove, si noti, lá F è reale.

Per le (4) e (6) si ha

$$|w|^2 dz = w \bar{w}\, dz = \frac{\partial f}{\partial \zeta} \left(\frac{\overline{\partial f}}{\partial \zeta} \right) d\zeta : \left(\frac{\overline{\partial z}}{\partial \zeta} \right),$$

mentre, per la (5), possiamo scrivere

$$2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{\overline{\partial f}}{\partial t} \right) = \frac{\partial' (f + \bar{f})}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \left(\frac{\overline{\partial f}}{\partial \zeta} \right) \left(\frac{\overline{\partial \zeta}}{\partial t} \right).$$

Moltiplichiamo per dz i due membri di questa relazione, ed osserviamo che per la (6),

$$\frac{\partial' (f + \bar{f})}{\partial t}\, dz = \frac{\partial' (f + \bar{f})}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial \zeta}\, d\zeta = \left\{ \frac{\partial'}{\partial t} \left[(f + \bar{f}) \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right] - (f + \bar{f}) \frac{\partial'}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right\} d\zeta ;$$

mentre per la (7) e la (6) gli altri due termini si scrivono ordinatamente

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t}\, dz = -\frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial' z}{\partial t}\, d\zeta ;$$

$$\frac{\overline{\partial f}}{\partial \zeta} \frac{\overline{\partial \zeta}}{\partial t}\, dz = \frac{\overline{\partial f}}{\partial \zeta} \frac{\overline{\partial \zeta}}{\partial t} \frac{\overline{\partial z}}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \zeta}\, d\zeta : \frac{\overline{\partial z}}{\partial \zeta} = -\frac{\overline{\partial f}}{\partial \zeta} \frac{\overline{\partial' z}}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial \zeta}\, d\zeta : \frac{\overline{\partial z}}{\partial \zeta} .$$

(1) Il vettore $\boldsymbol{t}$ e quelli $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{k}$ costituiscono il triedro principale della curva C in P.

La (11) allora in base alla (10) diviene

$$(12)\qquad R_x + iR_y = -\frac{1}{2} i\rho \frac{d}{dt}\int_\gamma (f+\bar f)\frac{\partial z}{\partial \zeta}\,d\zeta +$$

$$+\frac{1}{2} i\rho \int_\gamma \left\{(f+\bar f)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial \zeta} + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\frac{\partial z}{\partial t}\right\} d\zeta - \frac{1}{2} i\rho \int_\gamma \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} - \frac{\overline{\partial z}}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right)\frac{\overline{\partial f}}{\partial \zeta}\,d\zeta : \frac{\overline{\partial z}}{\partial \zeta},$$

nella quale sono stati tolti gli apici al segno di $\frac{\partial'}{\partial t}$, non essendovi ora motivo di ambiguità, dato che la z è certamente espressa in termini di ζ e t. Si può inoltre osservare che la somma $f+\bar f$ può anche essere costruita con la f a cui siano sottratti (se ne esistono) i termini indipendenti dal tempo, cioè dagli eventuali parametri δ_i. Ciò risulta dal corso dei calcoli precedenti.

Passiamo ora al calcolo del momento.

Analogamente per il prodotto misto $\boldsymbol{k}\times(\mathrm{P}-\mathrm{O})\wedge \boldsymbol{n}\,ds = (\mathrm{P}-\mathrm{O})\times \boldsymbol{t}\,ds = (x-x_0)\,dx + (y-y_0)\,dy$, si ha la forma complessa $\frac{1}{2} d|z-z_0|^2 = \frac{1}{2}\{(\bar z - \bar z_0)\,dz + (z-z_0)\,d\bar z\}$; quindi posto

$$G = (\bar z - \bar z_0)\,F$$

per essere reale la funzione F data dalla (10), ne segue che la funzione integranda del secondo membro della (2) può scriversi

$$-\frac{1}{4}\rho\,(G\,dz + \overline{G}\,d\bar z) = -\frac{1}{2}\rho\,\mathscr{R}\,(G\,dz),$$

dove $\mathscr{R}$ sottintende la locuzione « parte reale di ».

Effettuando nella funzione $G\,dz$ trasformazioni analoghe a quelle effettuate nella $F\,dz$ per ottenere la (12), alla (2) si può dare la forma

$$(13)\qquad M = -\frac{1}{2}\rho\frac{d}{dt}\,\mathscr{R}\int_\gamma (\bar z - \bar z_0)(f+\bar f)\frac{\partial z}{\partial \zeta}\,d\zeta +$$

$$+\frac{1}{2}\rho\,\mathscr{R}\int_\gamma \left\{(f+\bar f)\frac{\partial}{\partial t}\left[(\bar z-\bar z_0)\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right] + (\bar z-\bar z_0)\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial \zeta}\right\} d\zeta -$$

$$-\frac{1}{2}\rho\,\mathscr{R}\int_\gamma \left\{\frac{\partial f}{\partial \zeta} - \frac{\overline{\partial z}}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right\}(\bar z-\bar z_0)\frac{\overline{\partial f}}{\partial \zeta}\,d\zeta : \frac{\overline{\partial z}}{\partial \zeta}.$$

Le (12) e (13) risolvono il problema propostoci, nella sua più ampia generalità. Come si vede, in esse gli integrali indicati sono completamente [1] calcolabili mediante applicazione del teorema di Cauchy su i residui; la risultante $\boldsymbol{R}$ è data direttamente sotto forma complessa ed essa assieme al momento M è espressa mediante gli elementi caratteristici del moto liquido e del moto rigido.

(1) Si noti che su γ la coniugata di ζ è $\frac{1}{\zeta}$.

Meccanica (Idromeccanica). — *Ostacolo ellittico mobile investito da una corrente piana irrotazionale.* Nota [1] di A. Consiglio, presentata dal Corrisp. U. Cisotti.

Ho già studiato [2] il caso particolare di una corrente piana irrotazionale stazionaria all'infinito che investe un ostacolo ellittico girevole attorno al centro dell'ostacolo stesso.

Nella presente mi occupo del problema più generale in cui, lo stesso ostacolo (rigido) è mobile comunque di moto rototraslatorio nel piano del moto e la corrente traslocircolatoria investitrice regolare dappertutto non è necessariamente stazionaria all'infinito.

Caratterizzo il moto liquido valutandone il potenziale complesso e la velocità. Applicando formule generali assegnate altrove [3] calcolo con riferimento ad un sistema cartesiano fisso e rispetto ad uno speciale sistema cartesiano mobile la risultante **R** delle azioni dinamiche esercitate dalla corrente su l'ostacolo ed il momento **M** di esse rispetto al centro dell'ostacolo; i quali risultano completamente individuati dalle caratteristiche cinetiche del disco e da quelle della corrente all'infinito. Considero alcuni casi speciali notevoli e ritrovo alcuni particolari risultati già noti. Infine do una impostazione analitica del problema della determinazione del moto dell'ostacolo per assegnati elementi dinamici o cinetici.

Successivamente mi occuperò della risoluzione del problema impostato in qualche caso che possa destare interesse con particolare riguardo alle raffiche (variazione brusca ma finita di velocità all'infinito durante un tempo piccolissimo).

1. *Il potenziale complesso e la velocità della corrente.* – Con riferimento a quanto è stabilito al n. 1 della mia Nota citata seconda, il punto O sia il centro dell'ostacolo ellittico. La rappresentazione conforme che porta nel-

(1) Pervenuta all'Accademia il 10 settembre 1934.

(2) A. Consiglio, *Ostacolo ellittico girevole investito da una corrente piana irrotazionale.* Questi «Rendiconti», vol. XV, fasc. 9, pp. 724–729, 1932. Colgo qui l'occasione per avvertire che nella (4) di questa Nota al posto di $\frac{T\omega}{2}$ devesi leggere $-\frac{\omega}{2}$.

(3) A. Consiglio, *Formule generali per il calcolo delle azioni dinamiche esercitate da una corrente piana non stazionaria su un ostacolo mobile.* Questi «Rendiconti», questo fascicolo, p. 310.

l'istante generico t il piano ζ forato dall'ellisse, contorno dell'ostacolo, in un piano ζ forato dal cerchio γ di raggio unitario e centro nell'origine Ω è:

$$(1) \qquad \zeta = \zeta_0 + \lambda\zeta + \mu e^{2i\alpha}\frac{1}{\zeta}, \quad |\zeta| \geqq 1,$$

con il significato delle costanti λ, μ [1] e dell'angolo α già noto; e si ottiene osservando che nel piano del moto per un punto generico P si ha

$$P - Q = (O - Q) + (P - O),$$

e quindi tenendo presente la (1) della mia Nota citata prima.

Sotto forma complessa denoto con w_0 la velocità $\boldsymbol{v}_0$ di O, con w_∞ quella $\boldsymbol{v}_\infty$ all'infinito della corrente, essendo w_0, w_∞ funzioni del tempo soltanto. Rappresento con $\dot{\alpha}$ la derivata di α rispetto al tempo e denoto con $\omega = \dot{\alpha}$ il valore della velocità di rotazione dell'ostacolo.

Il potenziale complesso $f(\zeta, t)$ del moto considerato sarà una funzione del tipo [2]

$$f(\zeta, t) = w_0\zeta + f_1(\zeta, t)$$

dove $f_1(\zeta, t)$ è il potenziale complesso di un moto liquido di velocità eguale alla differenza tra la velocità della corrente *relativa* all'ostacolo ed il vettore $\boldsymbol{\omega} \wedge (P - O)$ con P punto dell'ellisse. La funzione f_1 che può pure riguardarsi come il potenziale complesso del moto liquido in presenza dell'ostacolo con il centro fisso come è stato considerato nella mia Nota citata prima, ci è fornita dalla (5) di detta Nota modificandovi, per la eventuale variabilità della corrente all'infinito, il primo termine (che corrisponde ad una corrente traslocircolatoria) in:

$$\lambda\left(w_1\zeta + \bar{w}_1\frac{1}{\zeta}\right),$$

dove w_1 è la velocità assintotica di detta ipotetica corrente ed è funzione del tempo soltanto e dove $\bar{w}_1$ denota il coniugato di w_1. Il potenziale f risulta pertanto in virtù della (1) e con riferimento al piano ζ:

$$(2) \qquad f(\zeta, t) = w_0\zeta_0 + \lambda(w_0 + w_1)\zeta + (\mu e^{2i\alpha}w_0 + \lambda\bar{w}_1)\frac{1}{\zeta} + \\ + \frac{C}{2\pi i}\log\zeta - i\omega\lambda\mu e^{2i\alpha}\frac{1}{\zeta^2}.$$

(1) Rammentiamo che se a, b sono i semiassi dell'ellisse, si ha

$$\lambda = \frac{a+b}{2}; \qquad \mu = \frac{a-b}{2}.$$

(2) B. Caldonazzo, *Moti piani irrotazionali di liquidi perfetti in presenza di ostacoli mobili.* Questi « Rendiconti », vol. XI, fasc. 4, pp. 400-404, 1930.

Esso sodisfa certo la condizione di impenetrabilità sul contorno dell'ostacolo e fornisce per la velocità complessa del moto liquido (con riferimento al piano ζ) l'espressione $w = w_0 + \frac{\partial f}{\partial \zeta} : \frac{\partial \chi}{\partial \zeta}$, cioè

$$(3) \qquad w = w_0 + \left\{ \lambda w_1 + \frac{C}{2\pi i} \frac{1}{\zeta} - \lambda \bar{w}_1 \frac{1}{\zeta^2} + 2 i \omega \lambda \mu e^{2i\alpha} \frac{1}{\zeta^3} \right\} \frac{\zeta^2}{\lambda \zeta^2 - \mu e^{2i\alpha}}.$$

Facendovi tendere ζ all'infinito, segue

$$(4) \qquad w_\infty = w_0 + w_1 .$$

Questa relazione definisce la velocità w_1 già introdotta e fornisce la sua espressione mediante la velocità w_0 e quella da supporre assegnata w_∞.

2. *Le azioni dinamiche della corrente.* – In base alla (1), la risoluzione del problema idrocinematico essendo fornita dalle (2) e (3), per calcolare la risultante delle azioni dinamiche destate dalla corrente su l'ostacolo ed il momento risultante rispetto ad O, basta sostituire questi risultati nelle (12) e (13) della mia Nota citata seconda ed effettuare le integrazioni indicate.

Ciò facendo nella detta (12), si trova che il primo termine dà

$$\pi\rho \frac{d}{dt} \{ (\lambda^2 - \mu^2) \bar{w}_0 + 2\lambda (\lambda \bar{w}_1 - \mu e^{2i\alpha} w_1) \}$$

mentre la somma degli altri due termini [1] dà $-i\rho \bar{w}_1 C$.

Risulta quindi:

$$(5) \qquad R_x + i R_y = -i\rho \bar{w}_1 C + \pi\rho \frac{d}{dt} \{ (\lambda^2 - \mu^2) \bar{w}_0 + 2\lambda (\lambda \bar{w}_1 - \mu e^{2i\alpha} w_1) \}.$$

Posto $w_0 = v_0 e^{-i\alpha_0}$; $w_1 = v_1 e^{-i\alpha_1}$ possiamo scrivere le componenti di **R** secondo gli assi fissi:

$$(5') \qquad \begin{cases} R_x = \rho v_1 \operatorname{sen} \alpha_1 C + \pi\rho \frac{d}{dt} \{ (\lambda^2 - \mu^2) v_0 \cos \alpha_0 + \\ \qquad + 2\lambda v_1 [\lambda \cos \alpha_1 - \mu \cos (2\alpha - \alpha_1)] \} \\ R_y = -\rho v_1 \cos \alpha_1 C + \pi\rho \frac{d}{dt} \{ (\lambda^2 - \mu^2) v_0 \operatorname{sen} \alpha_0 + \\ \qquad + 2\lambda v_1 [\lambda \operatorname{sen} \alpha_1 - \mu \operatorname{sen} (2\alpha - \alpha_1)] \}. \end{cases}$$

(1) Poichè è

$$1 : \frac{\overline{\partial \chi}}{\partial \zeta} = -\frac{1}{2\mu} \sqrt{\mu : \lambda}\, e^{i\alpha} \left(\frac{1}{\zeta - \zeta_1} - \frac{1}{\zeta + \zeta_1} \right)$$

con $\zeta_1 = \sqrt{\lambda : \mu}\, e^{i\alpha}$ esterno al cerchio γ di integrazione, l'ultimo degli integrali da calco-

Analogamente, per calcolare il momento M, mediante integrazione lungo γ nella (13) già citata, si trova che il primo termine dà $-2\pi\rho\lambda^2\mu^2\dot{\omega}$ mentre la somma degli altri due termini dà $2\pi\rho\lambda\mu\,\mathscr{R}\,(ie^{-2i\alpha}\overline{w_1^2})$.

Perciò, risulta

$$M = \pi\rho\lambda\mu\{i(e^{-2i\alpha}\overline{w_1^2} - e^{2i\alpha}w_1^2) - 2\lambda\mu\dot{\omega}\},$$

che si può pure scrivere:

$$M = 2\pi\rho\lambda\mu\{v_1^2 \operatorname{sen} 2(\alpha - \alpha_1) - \lambda\mu\dot{\omega}\}. \tag{6}$$

3. *La* **R** *ed* M *riferiti ad un sistema mobile.* – Possono essere utili le espressioni delle componenti di **R** e quella di M mediante elementi riferiti al sistema mobile XOY con origine nel centro O dell'ellisse, con l'asse delle X contenente il semiasse maggiore e l'asse delle Y contenente il semiasse minore del disco. Poichè α è l'angolo del semiasse (fisso) delle x positive con il semiasse (mobile) delle X positive, le relazioni che esprimono le componenti u_X, u_Y di un vettore $\boldsymbol{u}$ rispetto al sistema mobile, mediante quelle u_x, u_y rispetto al sistema fisso, sono:

$$u_X = u_x\cos\alpha + u_y\operatorname{sen}\alpha \quad ; \quad u_Y = -u_x\operatorname{sen}\alpha + u_y\cos\alpha,$$

quindi per essere

$$\alpha - \alpha_0 = \operatorname{ang}(\boldsymbol{v}_0, X) \quad ; \quad \alpha - \alpha_1 = \operatorname{ang}(\boldsymbol{v}_1, X),$$

e tenute presenti le relazioni che legano i semiassi a, b dell'ellisse con i due numeri λ, μ richiamate in nota al n. 1, dalle (5′) si ricavano le componenti di **R** secondo i detti assi mobili:

$$\begin{cases} R_X = -\rho v_{1Y} C + \pi\rho b \dfrac{d}{dt}\{a v_{0X} + (a+b) v_{1X}\} \\ R_Y = -\rho v_{1X} C - \pi\rho a \dfrac{d}{dt}\{b v_{0Y} + (a+b) v_{1Y}\}. \end{cases} \tag{5″}$$

Analogamente, introducendo nella (6) le componenti di $\boldsymbol{v}_1$, secondo gli assi mobili, l'espressione del momento si scrive:

$$M = 2\pi\rho\lambda\mu(2 v_{1X} v_{1Y} - \lambda\mu\dot{\omega}). \tag{6′}$$

4. *Alcuni casi particolari.* – 1°) Se $\boldsymbol{v}_0 = 0$, cioè se il disco ruota attorno al suo centro, le espressioni (5′) trovate per le componenti di **R** divengono

lare è la somma di integrali ciascuno del tipo da me considerato più generalmente nell'es. n. 12 di *Esercitazioni matematiche*, vol. VII, seconda Serie, fasc. 9-10, pp. 190-193, Edit. il «Circolo Matematico di Catania», 1934.

$$\begin{cases} R_x = \rho v_1 \operatorname{sen} \alpha_1 C + 2\pi\rho\lambda \dfrac{d}{dt}\{v_1[\lambda \cos \alpha_1 - \mu \cos(2\alpha - \alpha_1)]\} \\ R_y = -\rho v_1 \cos \alpha_1 C + 2\pi\rho\lambda \dfrac{d}{dt}\{v_1[\lambda \operatorname{sen} \alpha_1 - \mu \operatorname{sen}(2\alpha - \alpha_1)]\}. \end{cases}$$

Quella (6) di M rimane invariata, come del resto è evidente.

In queste condizioni, dalla (4) segue che la velocità w_1 è quella w_∞ all'infinito della corrente.

Se, più particolarmente ancora, questa velocità w_1 è costante e parallela all'asse delle x ($\alpha_1 = 0$) le formule precedenti divengono quelle trovate, sotto altra forma perchè ottenute seguendo altra via nei calcoli, nella mia Nota citata prima.

2°) Se il disco anzichè ellittico è circolare, ($\lambda = a = b = r$; $\mu = 0$) con r raggio del cerchio, i risultati conseguiti, per quanto riguarda la sola $\mathbf{R}$, divengono quelli trovati dal Caldonazzo [1].

3°) Osserviamo in fine che i risultati conseguiti, nei casi particolari considerati dal Lamb [2] coincidono con quelli trovati da questo Autore.

5. *Il caso della lamina rettilinea.* – Facendo tendere con continuità b a *zero*, cioè λ a μ, l'ostacolo ellittico mobile considerato diviene la lamina rettilinea mobile di lunghezza $2a$ e per essa le (5′) e (6) dànno:

$$\begin{cases} R_x = \rho v_1 \operatorname{sen} \alpha_1 C + \pi\rho a^2 \dfrac{d}{dt}\{v_1 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\alpha - \alpha_1)\} \\ R_y = -\rho v_1 \cos \alpha_1 C - \pi\rho a^2 \dfrac{d}{dt}\{v_1 \cos \alpha \operatorname{sen}(\alpha - \alpha_1)\} \end{cases}$$

$$M = \frac{\pi}{8}\rho a^2 \{4 v_1^2 \operatorname{sen} 2(\alpha - \alpha_1) - a^2 \dot{\omega}\}.$$

Questi risultati, per quanto riguarda la risultante $\mathbf{R}$, non comprendono come casi particolari quelli trovati direttamente dal Cisotti [3] perchè qui non è tenuto conto di nessuno dei punti cuspidali salienti che presenta la lamina; e nemmeno quelli da me trovati altrove [4], dove è tenuto conto di uno solo dei detti due punti cuspidali. Per quanto riguarda il momento M, invece i presenti risultati contengono come casi particolari quelli accennati. Si ha così una conferma, almeno per il problema considerato, del fatto che

(1) B. Caldonazzo, *Moti piani irrotazionali di liquidi perfetti in presenza di un disco mobile*. Questi «Rendiconti», vol. XI, fasc. 9, pp. 807–813, 1930.

(2) H. Lamb., *Hydrodynamics*. Ch. IV, Art. 68 e seg. (Cambridge, 1924).

(3) U. Cisotti, *Una notevole eccezione del teorema di Kutta–Joukowski*. Questi «Rendiconti», vol. V, fasc. 1, pp. 16–21, 1927.

(4) A. Consiglio, *Ancora una eccezione del teorema di Kutta–Joukowski*. Questi «Rendiconti», vol. XI, fasc. 9, pp. 813–818, n. 6, 1930.

nel calcolo del momento M non influiscono gli eventuali punti cuspidali salienti che può contenere il contorno dell'ostacolo. Si ricavano invece immediatamente i risultati del Caldonazzo [1] relativi alla lastra piana uniformemente rotante, che furono recentemente [2] modificati dallo stesso Autore adottando il punto di vista del Cisotti per il calcolo delle azioni dinamiche in presenza di punti cuspidali. È chiaro perciò che la primitiva impostazione data dal Caldonazzo a questo problema equivale a considerare la lamina come limite di un'ellisse.

6. *Le equazioni del moto del cilindro.* - Diciamo P_0 il centro di massa dell'ostacolo ellittico Γ e supponiamo che in presenza del moto liquido, oltre le azioni idrodinamiche agisca su Γ un sistema di forze di somma $\mathscr{R}$ e di momento $\mathscr{M}^{(0)}$ rispetto a P_0. Detto inoltre $\mathbf{M}^{(0)}$ il momento rispetto a P_0 delle azioni idrodinamiche agenti su Γ; questo ostacolo ellittico, e con esso il cilindro indefinito di cui esso è la sezione normale, sotto l'azione del sistema complessivo di forze di somma $\mathbf{R} + \mathscr{R}$ e di momento $\mathbf{M}^{(0)} + \mathscr{M}^{(0)}$ rispetto a P_0, si muoverà di moto rototraslatorio. Se $\boldsymbol{v}^{(0)}$ è la velocità di P_0, tale moto sarà caratterizzato dalla traslazione $\boldsymbol{v}^{(0)}$ e dalla rotazione $\boldsymbol{\omega} = \dot{\alpha}\boldsymbol{k}$. Se poi $\dot{\mathbf{K}}$ è la derivata rispetto al tempo del momento $\mathbf{K}$ delle quantità di moto relative al baricentro P_0, ed m è la massa di Γ, le equazioni del moto dell'ostacolo riferite a P_0 si scrivono:

$$\begin{cases} m\dot{\boldsymbol{v}}^{(0)} = \mathbf{R} + \mathscr{R} \\ \dot{\mathbf{K}} = \mathbf{M}^{(0)} + \mathscr{M}^{(0)} \end{cases}$$

Poniamo che con $q > 0$ il centro di massa P_0 sia il punto di coordinate $X = -q$; $Y = 0$ rispetto al sistema mobile. Allora risulterà

$$P_0 - O = -q(\cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\alpha\,\boldsymbol{j}) \quad ; \quad \mathbf{M}^{(0)} = \mathbf{M} - (P_0 - O) \wedge \mathbf{R},$$

e ne segue che l'unica componente di $\mathbf{M}^{(0)}$ (secondo $\boldsymbol{k}$) è

$$M^{(0)} = M + q(R_y \cos\alpha - R_x \operatorname{sen}\alpha)$$

dove M è dato dalla (6) ed R_x, R_y dalle (5').

(1) B. Caldonazzo, *Ueber die gleichförmige Rotation eines festen Körpers in einer unbegrenzten Flüssigkeit.* « Vorträge aus dem Gebiete der Hydro-und Aerodynamik », pp. 175-185 (Innsbruck, 1922).

(2) B. Caldonazzo, *Lamina rettilinea in una corrente piana traslocircolatoria.* « Act. P. Acad. Sc. Nov. Lync. », anno LXXXVII, IV sess., pp. 273-322 (1934).

Inoltre si ha:

$$\boldsymbol{v}^{(o)} = \boldsymbol{v}_o + q\,\omega\,(\operatorname{sen}\alpha\,\boldsymbol{i} - \cos\alpha\,\boldsymbol{j}) \quad ; \qquad \dot{\mathbf{K}} = \mathrm{I}\,\dot{\omega}\,\boldsymbol{k}\,;$$

$$\boldsymbol{a}^{(o)} = \dot{\boldsymbol{v}}^{(o)} = \boldsymbol{a}_o + q\,\{(\omega^2\cos\alpha + \dot{\omega}\operatorname{sen}\alpha)\,\boldsymbol{i} + (\omega^2\operatorname{sen}\alpha - \dot{\omega}\cos\alpha)\,\boldsymbol{j}\}\,,$$

con I momento d'inerzia dell'ostacolo rispetto all'asse per P_o ortogonale al piano del moto.

In base a quanto precede, mediante proiezione su gli assi fissi del sistema vettoriale già scritto, si hanno le seguenti equazioni scalari del moto dell'ostacolo:

$$(7) \qquad \begin{cases} m\,[a_{ox} + q\,(\omega^2\cos\alpha + \dot{\omega}\operatorname{sen}\alpha)] = \mathrm{R}_x + \mathscr{R}_x \\ m\,[a_{oy} + q\,(\omega^2\operatorname{sen}\alpha - \dot{\omega}\cos\alpha)] = \mathrm{R}_y + \mathscr{R}_y \\ \mathrm{I}\dot{\omega} = M + \mathscr{M}^{(o)} - q\,(\mathrm{R}_x\operatorname{sen}\alpha - \mathrm{R}_y\cos\alpha)\,. \end{cases}$$

Della integrazione di questo sistema in casi che possano destare qualche interesse mi occuperò in sèguito, assumendo come incognite le coordinate x_o, y_o di O con l'angolo α e ritenendo assegnate tutte le altre quantità.

Meccanica. — *Sulle curve definite da un sistema di equazioni differenziali di secondo ordine.* - IV. *Di alcune proprietà delle traiettorie nel problema del moto centrale di un punto riferito ad un sistema di assi rotanti.* Nota [1] di N. Moisseiev, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Nella precedente Nota: *A proposito d'un metodo di studio delle curve integrali nel sistema di tre equazioni differenziali di secondo ordine* [2] abbiamo esaminato un metodo generale di analisi qualitativa delle proprietà delle traiettorie nel problema dinamico del punto dello spazio di tre dimensioni. Lo scopo della presente Nota è l'analisi d'un semplice esempio dell'uso del suddetto metodo.

Questo esempio, nonostante tutta la sua semplicità ed il suo carattere elementare possiede, secondo la nostra opinione, due notevoli prerogative:

1° In primo luogo esso manifesta in forma molto visibile certe singolarità specifiche del problema dinamico riferito ad assi rotanti, cioè le singolarità per le quali il suddetto problema si differenzia dall'analogo riferito ad

(1) Pervenuta all'Accademia il 29 agosto 1934.

(2) Cfr. pp. 261 di questo stesso volume dei « Rendiconti ».

assi fissi. Da questo punto di vista il nostro esempio è utile come un aiuto metodico per lo studio della Meccanica Celeste e della Dinamica, almeno per mentalità non dissimili da quella dell'autore della presente Nota.

2° In secondo luogo, – come lo dimostrano i ragionamenti semplicissimi, – una serie di caratteristiche qualitative delle traiettorie in questo esempio può essere riportata direttamente ad alcuni casi limiti di moto, e in particolare al problema ristretto dei tre corpi. Da questo punto di vista si può considerare il nostro esempio anche non privo di una certa importanza scientifica.

Il problema che abbiamo in vista è lo studio delle proprietà del moto di un punto materiale sotto l'azione di una forza centrale, coll'avvertenza però, che il sistema di riferimento sia animato da moto rotatorio con velocità angolare costante intorno ad un'asse, passante per il centro d'attrazione o di ripulsione.

Le equazioni differenziali del moto in un tale problema possono essere scritte sotto la forma

$$(4.1)\qquad \begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} = w'_x, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} = w'_y, \\ \ddot{z} \qquad\quad = w'_z, \end{cases}$$

dove

$$(4.2)\qquad w = \frac{n^2}{2}\rho^2 + U(r)$$

mentre

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \quad ; \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 ;$$

n è la velocità angolare della rotazione degli assi, e finalmente, $U(r)$ è una funzione ancora arbitraria di r.

L'integrale di Jacobi per le equazioni (4.1) sarà:

$$(4.3)\qquad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2w + 2h .$$

La superficie delle velocità zero avrà quindi l'equazione seguente:

$$(4.4)\qquad w + h = 0 .$$

Esaminiamo adesso la famiglia delle sfere:

$$(4.5)\qquad x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 .$$

Profittando delle indicazioni della Nota citata e supponendo la quantità θ esaminata in essa, uguale a $\dot{z}^2$, possiamo poi formare per la reazione della sfera (4.5) – più precisamente per la sua componente radiale verso l'esterno – l'espressione seguente:

$$(4.6) \qquad R = -\frac{1}{r}\left[2(w+h) \pm 2n\sqrt{2(w+h)\rho^2 - r^2\dot{z}^2} + \right.$$

$$\left. + (xw'_x + yw'_y + zw'_z)\right]$$

nella quale il segno superiore (cioè il segno +) davanti l'espressione:

$$2n\sqrt{2(w+h)\rho^2 - r^2\dot{z}^2}$$

deve essere usato per l'analisi del moto diretto, cioè avente la direzione della rotazione del sistema di coordinate [1], mentre il segno inferiore (cioè il segno —) deve essere adoperato nell'esame delle traiettorie con direzione retrograda di moto.

La quantità $\dot{z}^2$, che si trova nell'espressione della reazione, generalmente parlando, può assumere vari valori, tutavia, come lo dimostra l'equazione (4.3) la regione dei valori possibili per $\dot{z}^2$, per dati x, y, z e h sarà sempre limitata dalla disuguaglianza:

$$(4.7) \qquad 0 \leq \dot{z}^2 \leq 2(w+h).$$

Scriviamo poi l'equazione seguente:

$$(4.8) \qquad R = 0$$

o

$$(4.9) \qquad 2(w+h) \pm 2n\sqrt{2(w+h)\rho^2 - r^2\dot{z}^2} + (xw'_x + yw'_y + zw'_z) = 0$$

o, finalmente, in forma risoluta rispetto a $\dot{z}^2$:

$$(4.10) \qquad \dot{z}^2 = 2(w+h)\frac{\rho^2}{r^2} - \frac{1}{4n^2r^2}[2(w+h) + (xw'_x + yw'_y + zw'_z)]^2.$$

Per definizione la regione della possibilità delle reazioni zero corrisponde a tutti i valori x, y, z e h per i quali il valore di $\dot{z}^2$ definito dall'equazione (4.10) soddisfa alla disuguaglianza: (4.7).

Perciò il valore (4.10) di $\dot{z}^2$ verifica senz'altro la disuguaglianza $\dot{z}^2 \leq 2(w+h)$.

In tal modo ci manca solo la determinazione dell'insieme x, y, z e h per cui (4.10) dà un valore positivo per $\dot{z}^2$. Questo insieme sarà appunto la regione cercata $R\bar{Z}$. L'insieme dei valori x, y, z e h per i quali (4.10) dà $\dot{z}^2 < 0$ potrà appartenere o alla regione delle reazioni positive RP, oppure alla regione di quelle negative RN, dipendendo da ciò se il valore

(1) Cioè nella direzione inversa al moto della lancetta dell'orologio, guardando dalla direzione positiva dell'asse z.

di R, corrispondente a quell'insieme x, y, z e h e presentato dalla formola (4.6) sia positivo o negativo.

Quindi, la regione $\overline{RZ}$ nel nostro problema è una regione dello spazio di quattro dimensioni (x, y, z, h) la quale è limitata dall'insieme di tre dimensioni, definito dall'equazione

$$(4.11) \quad 8(w+h)\rho^2 \cdot n^2 - [2(w+h) + (xw'_x + yw'_y + zw'_z)]^2 = 0 .$$

La sezione dell'insieme con un iper-piano

$$h = \text{const.}$$

nello spazio ordinario di tre dimensioni rappresenta una certa superficie, la quale appunto dividerà quella parte dello spazio nella quale, per il dato h sono possibili reazioni zero, da quelle altre parti dello spazio nelle quali la reazione appare come funzione definita (positiva o negativa) delle coordinate di Descartes x, y, z.

Per ragione di (4.2) questa superficie sarà una superficie di rotazione intorno all'asse z.

Lasciando per ora da parte il caso generale, scriveremo qui un'equazione della superficie limite per la regione della possibilità delle reazioni zero per il caso dell'attrazione di Newton, cioè per

$$(4.12) \qquad U(r) = \frac{1}{r} .$$

Si può altresì disporre dell'unità di tempo in modo che risulti $n = 1$. Allora l'equazione (4.11) assumerà l'aspetto:

$$(4.13) \qquad \frac{\rho^2}{r} - \frac{h}{r} - \frac{1}{4r^2} - h^2 = 0 .$$

Le figure qui aggiunte dimostrano l'aspetto approssimativo delle curve meridiane della superficie limite (4.13). La figura 1 corrisponde al caso di una costante di Jacobi grande in valore assoluto e negativa. Su quel diagramma è rappresentata anche la curva meridiana della superficie della velocità zero, corrispondente allo stesso valore h. Questa superficie nel nostro problema sarà anch'essa una superficie di rotazione come segue dalla sua equazione (4.4). La figura 2 corrisponde al caso di un grande valore positivo di h. I simboli RP, RN, $\overline{RZ}$ e « $v^2 < 0$ » disposti in regioni differenti hanno significato abbastanza chiaro in base al suesposto.

In quanto alle regioni dello spazio di tre dimensioni corrispondenti alle regioni RP e RN delle nostre figure, – saranno (ognuna di esse separatamente) – regioni acicliche nel senso largo, o « anepicicliche ». (Si confronti la Nota citata: *A proposito d'un metodo*, ecc.).

Senza fermarci sulla interpretazione dei risultati ottenuti, ed anche lasciando da parte i risultati i quali possono essere ottenuti sostituendo alla famiglia di sfere (4.5), un'altra famiglia di superficie, chiuderemo la presente comunicazione con una breve analisi di un caso di degenerazione non privo di un certo interesse. Alludiamo al caso $n = 0$ (assi immobili).

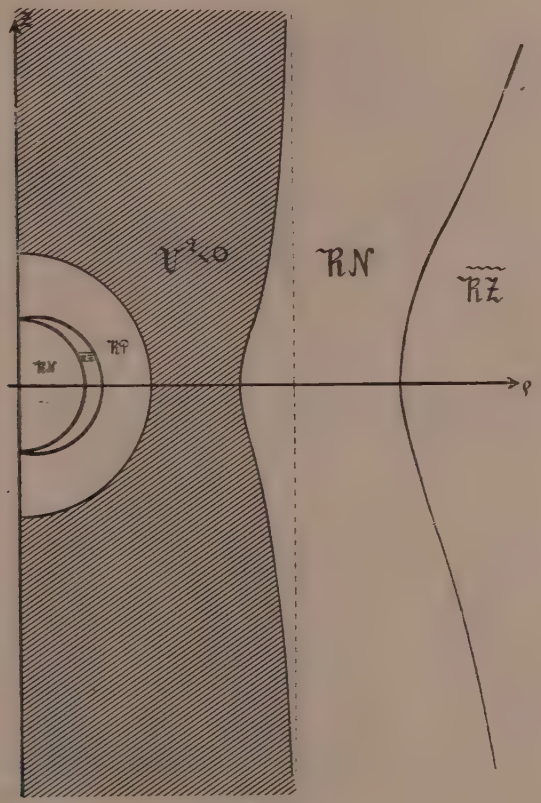


Fig. 1.

Come mostra l'equazione (4.6), la reazione, per $n = 0$, risulta indipendente dal parametro arbitrario ζ^2. In causa di cio, all'equazione (4.9), la quale definisce l'insieme di valori tali x, y, z, h, coi quali la reazione può essere uguale a zero, corrisponderà non una parte dello spazio di quattro dimensioni (come questo avveniva nel caso di $n = 0$) ma una certa iper–superficie dentro questo spazio definita dall'equazione:

$$2(w + h) + (xw'_x + yw'_y + zw'_z) = 0 . \tag{4.14}$$

La sezione di questa iper-superficie con uno iper-piano $h = \text{const.}$ ci condurrà ad una superficie nello spazio ordinario di tre dimensioni, la quale appunto rappresenterà l'insieme di tutti quei punti x, y, z, nei quali per un dato h la reazione può essere uguale a zero. Questa superficie sarà appunto la regione $\overline{RZ}$ stessa.

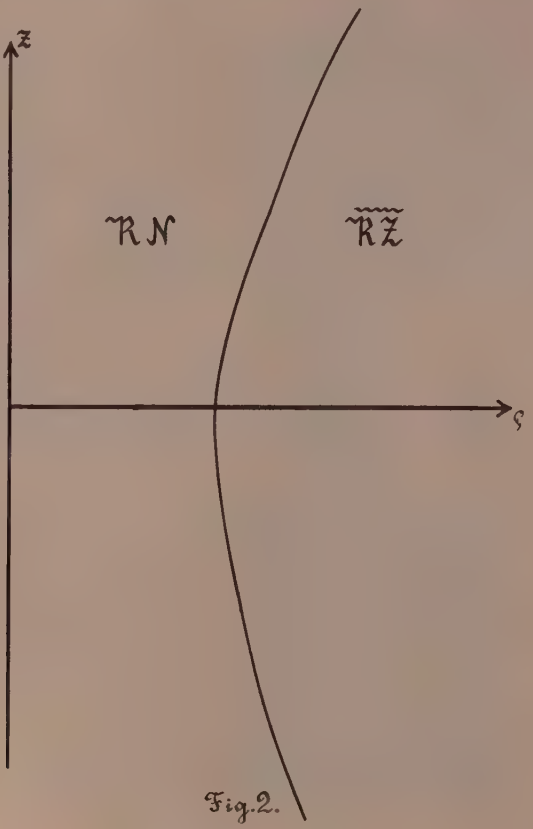


Fig. 2.

Così che nel caso dell'assenza di rotazione la regione di tre dimensioni della possibilità delle reazioni zero $\overline{RZ}$ degenera in una superficie nello spazio di tre dimensioni. Notiamo qui senza trattenerci ulteriormente su ciò che questo varrà per qualsiasi problema conservativo « naturale » (o, se si vuole, reversibile) della dinamica del punto.

Per il nostro caso particolare di un centro d'attrazione abbiamo per $\overline{RZ}$ l'equazione

$$\frac{1}{r} + 2h = 0 \tag{4.15}$$

ciò è l'equazione della famiglia di sfere coi raggi metà di quelli delle « sfere di velocità zero » corrispondenti.

Dentro la sfera (4.15) si trova la regione RN (cioè la regione dei « perieli ») mentre fuori di essa si trova la regione RP (cioè quella degli « afeli »).

Fisica. — *Definizione assoluta e significato fisico delle costanti gravitazionali di Newton, Einstein, Keplero e della curvatura dello spazio.* Nota di L. Laboccetta, presentata [1] dal Corrisp. G. A. Crocco.

1. *Costanti gravitazionali della sfera atomica.* – Come definizione assoluta della densità δ di una sfera omogenea costituita da Q atomi elementari (intendendo per atomo elementare l'atomo la cui massa μ è 1/16 di quella dell'atomo di ossigeno normale O_{16}) ho, in una precedente ricerca [2] ottenuto l'espressione

$$\delta = 48\,\pi^5\,k^{-3}\,(N/Q)^2\,(t/T)^6\,c^6 \tag{1}$$

nella quale t è il *tempo radiale* che la luce impiega a percorrere il raggio della sfera e T il tempo *periodico* che un satellite infinitamente piccolo impiega a percorrere intorno alla sfera un'orbita circolare girando a contatto della superficie di essa.

In questa relazione generale ponendo $Q = 1$, $T = 2\pi t$ si viene a far corrispondere δ alla densità di una sfera avente la massa μ dell'atomo elementare e un raggio λ tale che una particella infinitamente piccola girando intorno ad essa a contatto con la sua superficie ne compie il giro in un tempo $2\pi\tau$ con la velocità c della luce. Tenendo presente che la massa μ dell'atomo elementare, espressa in grammi, è data da 1/N (N, numero di Avogadro), si trova che alla *sfera atomica* di massa μ così definita corrispondono una lunghezza λ, un tempo τ, una densità δ e una forza φ, la forza con la quale essa attirerebbe un corpo di eguale massa alla distanza λ,

$$(A)\quad \begin{cases} \lambda = k\,\mu\,c^{-2} = 1{,}222 \times 10^{-52}\ \text{cm.} & (2) \\ \tau = k\,\mu\,c^{-3} = 0{,}407 \times 10^{-62}\ \text{sec.} & (3) \\ \delta = c^6\,(4\,\pi k^3\,\mu^2)^{-1} = 8{,}19 \times 10^{132}\ \text{gm. cm.}^{-3} & (4) \\ \varphi = c^4\,k^{-1} = 1{,}238 \times 10^{49}\ \text{dinc} & (5) \end{cases}$$

(con $\mu = 1{,}65 \times 10^{-24}$, $c = 2{,}998 \times 10^{10}$, $k = 6{,}66 \times 10^{-8}$). Queste

(1) Nella seduta del 4 novembre 1934.

(2) L. Laboccetta, *Una definizione assoluta della densità.* « Atti Soc. It. Progr. Sc.», Riun. di Bari, 1933, vol. II, p. 203.

quattro grandezze così definite hanno carattere di costanti universali, e, insieme con la massa μ, costituiscono le cinque costanti gravitazionali caratteristiche della sfera atomica.

Assumendo μ, λ, τ come unità fondamentali di massa, di lunghezza e di tempo si ottiene un sistema naturale assoluto di unità di misure gravitazionali nel quale la φ vale contemporaneamente come unità di forza cinetica e come unità di forza ponderale e la velocità della luce ha anche il valore uno.

È da osservare, e l'osservazione ci servirà in seguito, che alla sfera di raggio λ è strettamente associata una seconda sfera di raggio 2λ ad essa concentrica sulla cui superficie viene a spegnersi la velocità, e ad arrestarsi il moto, delle particelle proiettate esternamente in direzione radiale con la velocità della luce dalla superficie della prima sfera. Questa seconda sfera, potrebbe denominarsi la *sfera limite di Laplace* dal nome di chi per primo ebbe l'idea di essa [1].

2. *Costante di Newton.* – Impropriamente viene spesso annoverato fra le costanti universali e chiamato *costante della gravitazione* il coefficiente k che apparisce nella legge di Newton

$$F = k\,(m_1\, m_2)\, r^{-2} \tag{6}$$

mentre non solo il suo valore numerico ma anche quello *reale* dipende dal sistema di misure usate per esprimerlo, e non esiste una grandezza fisica *naturalmente* definita che ad esso corrisponda. Si tratta dunque di una grandezza convenzionale arbitrariamente assegnata; di essa è però possibile, come ho già mostrato altrove [2], dare una definizione assoluta applicando uno dei metodi generali esposti in un precedente mio scritto [3]. Qui procederò più direttamente esprimendone il valore mediante le costanti universali innanzi trovate. Si ottiene infatti dalla prima delle (A)

$$k = c^2\,(\lambda\mu)^{-1} = \lambda^3\,(\mu\tau^2)^{-1} \tag{7}$$

e così k cessa di essere un numero empirico e vengono messi in evidenza gli elementi dai quali dipende. Introducendo questo valore nella (6), ed esprimendo tutte le altre grandezze nel sistema assoluto (A), ponendo cioè $m_1 = \mu n_1$, $m_2 = \mu n_2$, $r = \lambda d$, $F = \varphi f$ si ottiene

$$f\varphi = \lambda\mu\tau^{-2}\,(n_1/a)\,(n_2/d) \tag{8}$$

(1) Ved. p. 6 di A. S. Eddington, *The international Constitution of the Stars*. Cambridge, 1930 (2nd Ed.).

(2) L. Laboccetta, *Una nuova enunciazione della legge di Newton sull'attrazione dei corpi materiali*. « Atti Pont. Acc. delle Sc.: Nuovi Lincei », anno LXXXV, sess. VI del 15 maggio 1932.

(3) L. Laboccetta, *Sulla costruzione di costanti fisiche di grandezza arbitraria*. « Atti del Congr. Intern. dei Matematici », Zurigo, 1932, vol. II, p. 324.

la quale mostra che l'unità assoluta ponderale di forza $\varphi = \lambda\mu\tau^{-2}$ innanzi trovata è proprio la costante universale della gravitazione il cui valore reale è indipendente dalle unità adoperate per esprimerlo e che è quella che propriamente può esser detta la *costante di Newton*. Tenendo presente la relazione $\varphi = \lambda\mu\tau^{-2}$ e chiamando δ_1, δ_2 le densità lineari che risultano distribuendo uniformemente sulla distanza d che li separa gli n_1, n_2 atomi elementari costituenti i due corpi la (8) diventa

$$f = \delta_1 \delta_2 . \tag{9}$$

3. *Costante di Keplero.* – Nella relazione che esprime la terza legge di Keplero

$$(kM)/(4\pi^2) = a^3/T^2 \tag{10}$$

sostituendo al tempo periodico T il tempo radiale T_r (ved. § 1) col porre $T = 2\pi T_r$ e poi, detto N il numero di atomi elementari costituenti la massa M del sole, esprimendo tutte le grandezze della formola così modificata con le unità (A) ponendo $M = N\mu$, $a = r\lambda$, $T_r = t\tau$ e sostituendo a k il suo valore (7) viene

$$N = r^3 t^{-2} = \beta^3 t . \tag{11}$$

Dunque la *costante di Keplero* è un *numero intiero*: il numero di atomi elementari costituenti la massa del sole; e questo numero è anche dato dal prodotto del cubo della costante di aberrazione β di ogni pianeta per il tempo radiale che gli corrisponde (misurato in unità τ).

Si ha nella (11) un metodo semplicissimo per ottenere la massa del sole. Nel caso della terra per la quale il tempo periodico è $T = 365^d$; $6^h.9^m.9'',5$, corrispondente ad un tempo radiale, in unità τ, $t = 12{,}34 = 10^{68}$, e per il cubo della costante di aberrazione si ha $\beta^3 = 987 \times 10^{-15}$ si ottiene

$$N = 12{,}179 \times 10^{56}$$

mentre, come è noto, si assegna al sole la massa, in grammi, di $1{,}984 \times 10^{33}$ alla quale corrisponde un numero di atomi elementari $N = 12{,}031 + 10^{56}$.

4. *La sfera normale.* – Una sfera omogenea, di densità costante, costituita da N atomi elementari, dico che trovasi in *condizioni normali* o più brevemente che è una *sfera normale* quando il suo raggio è uguale alla somma, $N\lambda$, dei raggi delle sfere atomiche degli atomi elementari che la costituiscono. Tenendo presenti le (A), per la massa M, il raggio L, il tempo radiale T di tale sfera si ha evidentemente

$$
(12)\qquad (13)\qquad (14)\qquad (B)\quad \begin{cases} M_N = N\mu \\ L_N = kN\mu c^{-2} \\ T_N = kN\mu c^{-3}\,. \end{cases}
$$

Si scorge quindi che se per misurare queste grandezze caratteristiche della sfera normale si prendono come unità di misura le corrispondenti grandezze caratteristiche μ, λ, τ della sfera atomica, si ottengono per i valori (B) le espressioni semplicissime

$$
(15)\qquad L_N = N \quad , \quad T_N = N \quad , \quad M_N = N
$$

che dànno il raggio, il tempo radiale e la massa della sfera normale in funzione del numero N di atomi elementari in essa contenuti.

Se il numero N degli atomi costituenti la sfera normale corrisponde alla totalità degli atomi esistenti nell'universo la sfera normale con essi formata si dirà brevemente la *sfera dell' universo* e si scorge quindi che dato il numero totale N di atomi elementari esistenti nell'universo questo numero, nel sistema di unità (A), esprime oltre alla massa totale anche il raggio e il tempo radiale della sfera dell'universo.

E reciprocamente assumendo come unità di massa, di lunghezza e di tempo la massa, il raggio e il tempo radiale della sfera nell'universo, per le corrispondenti grandezze della sfera atomica si trova

$$
(16)\qquad \mu = 1/N \quad , \quad \lambda = 1/N \quad , \quad \tau = 1/N\,.
$$

5. *Le nuove dimensioni delle grandezze fisiche.* – Uno sguardo alla (15) mostra che tutte le sfere normali che si ottengono attribuendo ad N valori intieri, positivi, diversi da zero, costituiscono un insieme soddisfacente ad una particolare condizione di similitudine meccanica, consistente in ciò che al variare delle dimensioni lunghezze, tempi e masse variano tutti linearmente secondo lo stesso rapporto. Si tratta di una quarta specie di similitudine meccanica da aggiungere alle altre tre delle quali ho indicato i caratteri in un precedente scritto [1]; ma qui non posso che rilevare l'esistenza di questa singolare similitudine, senza diffondermi sulle conseguenze.

È da osservare tuttavia che, nel sistema di unità L, T, M della sfera normale, le tre grandezze fondamentali essendo espresse da uno stesso numero N ne segue che una grandezza fisica le cui dimensioni sono L^l, T^t, M^m espressa con le unità (15) diventa $N^l N^t N^m$ ossia N^{l+t+m}, il che equivale a dire che una grandezza qualsiasi prende la forma N^s essendo

$$
(17)\qquad s = l + t + m
$$

(1) L. Laboccetta, *La similitudine meccanica di Galileo e la relatività dello spazio.* « L'Elettrotecnica », 5-15-25 agosto 1932.

e cioè la dimensione è data semplicemente dalla somma degli esponenti delle tre unità fondamentali del sistema di misure ordinario. Vengono così ravvicinate e rese dimensionalmente equivalenti delle grandezze fisiche che coi sistemi usuali di misure appaiono di natura assai diversa.

Segno a titolo di esempio alcune grandezze, in questo senso equivalenti, le cui dimensioni sono rispettivamente N^0, N^1, N^{-1}, N^2, N^{-2}.

N^0 - Velocità LT^{-1}; densità lineare ML^{-1} e temporale MT^{-1} della materia; forza ponderale M^2L^{-2} e cinetica MLT^{-2}; potenza ML^2T^{-3}.

N^1 – Oltre le grandezze fondamentali, massa M, lunghezza L e tempo T, la quantità di moto e l'impulso MLT^{-1}, l'energia cinetica ML^2T^{-2} e quella potenziale M^2L^1; il lavoro ML^2T^{-2}.

N^{-1} - La frequenza T^{-1}; l'accelerazione LT^{-2}, l'intensità del campo gravitazionale ML^{-2}.

N^2 – Il volume specifico $M^{-1}L^3$, il momento della quantità di moto e l'azione ML^2T^{-1}.

N^{-2} – La curvatura totale L^{-2}; la densità ML^{-3} e la tensione o pressione $ML^{-1}T^{-2}$.

Tenendo presenti queste nuove equivalenze, e la relazione generale (17), riescono giustificate alcune espressioni che altrimenti apparirebbero dimensionalmente errate.

Così ad esempio per la costante di Keplero (11) dove il rapporto al secondo membro prendendo la forma N^3N^2 si riduce a N identico cioè al primo membro.

Un'analoga considerazione potrebbe farsi per l'espressione (9) della forza di attrazione che, in conformità al già detto, è di dimensione zero, e può essere interpretata nel modo seguente.

I due numeri n_1, n_2 oltre a indicare il numero degli atomi costituenti le due sfere ne indicano anche, in unità λ, le lunghezze dei raggi. Se quindi la distanza d si misura anch'essa in unità λ, come infatti nella formola è supposto, i rapporti n_1/d e n_2/d oltre a indicare le densità lineari materiali corrispondenti alle due masse indicano anche le lunghezze dei due raggi r_1, r_2 delle sfere normali corrispondenti ottenute assumendo come unità di lunghezza la distanza d fra i due centri.

E perciò si può dire che date due sfere costituite da n_1 e da n_2 atomi elementari i cui centri si trovano alla distanza d, quando si siano determinati i raggi r_1 e r_2 ($n_1\lambda$ e $n_2\lambda$) delle sfere normali corrispondenti *la forza attraente*, che si esercita fra le due sfere, *è data dal prodotto dei loro due raggi assumendo la distanza fra i centri come unità di lunghezza per misurarli.*

In tal modo il valore di una forza è ottenuto in funzione dei rapporti fra elementi geometrici omogenei del sistema che la definisce, e la legge di Newton assume la forma strettamente geometrica senza coefficienti empirici di aggiustamento

(18) $$F = r_1 r_2.$$

Per la densità, della sfera normale, si ha la notevolissima relazione

$$N^2 \Delta_N = 1 \tag{19}$$

che la lega al numero degli atomi costituenti la sfera, ovvero, poichè il raggio L_N della sfera è proprio N

$$\Delta_N = 1 / L_N^2 \tag{20}$$

il che significa che data la densità della materia è immediatamente data la curvatura e quindi il raggio della sfera normale da essa formata

$$L_N = \sqrt{\Delta^{-1}} = N . \tag{21}$$

Si può domandare a questo punto se e di quanto l'universo reale differisca dalla sfera normale ad esso corrispondente. Si può tentare cioè di verificare se il raggio, stimato, nell'universo, corrisponde alla somma dei raggi degli atomi in esso esistenti, che è la condizione di normalità della sfera.

Assumendo, con Eddington [1] che il numero degli atomi esistenti nell'universo sia 1.29×10^{79} si trova per il raggio della sfera normale corrispondente, cioè per $R = N\lambda$,

$$R = 1.29 \times 10^{79} \cdot 1.222 \times 10^{-52} = 2.479 \times 10^{27}$$

in buon accordo con l'ordine di grandezza dei valori ordinariamente accettati per il raggio dell'universo, cosicchè il valore della curvatura della sfera normale dell'universo coincide con il valore di quella che dicesi curvatura dello spazio.

6. *Costante di Einstein e raggio gravitazionale della massa.* – La costante $\varkappa$ di Einstein [2]

$$\varkappa = 8 \pi k c^{-2} \tag{22}$$

ha, nel sistema di misure usuali, le dimensioni di una lunghezza divisa per una massa (ed è perciò come la costante φ di Newton di dimensione zero nel sistema MLT), come si vede subito sostituendo a k il suo valore (7) con che si ottiene

$$\varkappa = 8 \pi \lambda \mu^{-1} \tag{23}$$

e si scorge che la massa e la lunghezza da cui dipende sono la massa e il raggio della sfera atomica. Moltiplicandola per una massa $M = n\mu$ essa deve dare una lunghezza α

$$\alpha = (\varkappa M) / 4 \pi = 2 M \lambda \mu^{-1} = 2 \lambda n \tag{24}$$

(1) A. S. Eddington, *The expanding Universe*, p. 68. Cambridge 1933.
(2) Seguo le notazioni di Einstein.

che è appunto quella lunghezza che è stata chiamata « raggio gravitazionale » della massa M [1], ed appare quindi che il raggio gravitazionale di una massa altro non è che il doppio del raggio della sfera normale con essa formata, ossia il raggio della sfera limite di Laplace.

Poichè misurato in unità λ il raggio gravitazionale diventa $\alpha = 2n$, esso, al pari della costante di Keplero, è un numero intiero e come la costante di Keplero indica il numero di atomi del sistema solare, così il raggio gravitazionale indica il numero degli atomi della sfera normale alla quale si riferisce.

Nel mio scritto sulla definizione assoluta della densità avevo osservato che la relazione fra la densità ponderale e il tempo

$$\Delta\tau^2 = 1 \tag{25}$$

che può anche essere identicamente scritta fra la densità dell'elettricità e il tempo, è una relazione fondamentale fra le grandezze caratteristiche dello spazio fisico. Confrontando ora con la (21) si scorge che, nel caso della sfera normale, a motivo delle equivalenze dimensionali rilevate

$$\Delta T^2 \equiv (L/M)^2 \equiv \varkappa^2 \tag{26}$$

quindi

$$\varkappa = \tau\sqrt{\Delta} = 1 \tag{27}$$

cioè la costante di Einstein è uguale al prodotto della radice quadrata della densità per il tempo radiale ed ha per tutte le sfere normali il valore 1.

Fisica. — *Sulla unificazione delle funzioni espresse da serie che convergono in intervalli fra loro complementari.* Nota di L. Laboccetta, pres. dal Corrisp. G. A. Crocco.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) A. S. Eddington, *The mathematical Theory of Relativity*, p. 87, 2nd. Ed., Cambridge, 1924.

Chimica. — *Dealogenazione elettrolitica di sostanze organiche semplici* [1]. Nota I [2] di C. Sandonnini e V. N. Borghello, presentata dal Socio N. Parravano.

La riduzione chimica ed elettrochimica dei derivati alogenati del metano porta sempre e con diversi rendimenti, secondo le condizioni, alla semplice sostituzione più o meno completa degli atomi di alogeno con atomi di idrogeno. Stove [3] e Kelber [4] per trattamento del tetracloruro di carbonio con idrogeno attivato sul palladio finamente diviso ottennero metano e prodotti di dealogenazione parziale, Coupin [5] e Gheuter [6] per trattamento con zinco ed acido solforico ottennero essenzialmente cloroformio; in seguito Byers e van Arsdel [7] brevettarono la preparazione di questo per riduzione elettrolitica dello stesso tetracloruro disciolto in solventi diversi, poi Richter e van Arsdel [8] ne migliorarono i rendimenti usando sue emulsioni in soluzioni di cloruro di zinco.

La dealogenazione di sostanze alogenate aventi almeno una concatenazione tra atomi di carbonio conduce al contrario a risultati che non erano del tutto attendibili. Gheuter [6] trattando l'esacloroetano con zinco ed acido solforico ottenne tetracloroetilene anzichè tetracloroetano simmetrico o pentacloroetano, come ci si poteva attendere.

Dal tetracloroetano simmetrico in soluzione alcoolica Sabanajew [9] per azione dello zinco ottenne acetilene, secondo Berthelot e Jungfleisc [10] si otterebbe invece tricloroetilene. Sabatier a Mailhe [11] tentando l'idrogenazione catalitica del tetracloroetilene con idrogeno gassoso in presenza di nichel fortemente diviso, ottennero soltanto carbone ed acido cloridrico. Askenasy [12] elettrolizzando un'emulsione di tetracloroetano simmetrico con una soluzione di cloruro di zinco, usando catodi di rame ottenne dicloroetilene con altissimi rendimenti.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Padova.
(2) Pervenuta all'Accademia il 22 ottobre 1934.
(3) « Ber. », *49*, 162.
(4) « Ber. », *50*, 308.
(5) « Pharm. Zeitschr. », *11*, 225.
(6) « Ann. », *107*, 214.
(7) « ZBl. », 1925, II, 91.
(8) « ZBl. », 1925, II, 1223.
(9) « Ann. », *216*, 251.
(10) « Ann. Chim. », *7*, 225.
(11) « Compt. Rend. », *138*, 409.
(12) « Z. f. Elektroch. », *15*, 773.

Dal fatto che anche in presenza di idrogeno fortemente attivato si ottengono dai derivati alogenati dell'etano composti a legami multipli più facilmente dei prodotti di idrogenazione o di sostituzione di idrogeno all'alogeno, risulterebbe, almeno nelle condizioni sopraccennate, una maggior energia di legame tra atomi di carbonio che non tra atomi di carbonio ed idrogeno. Noi abbiamo pertanto ritenuto necessario completare il quadro dei fatti già noti con nuove esperienze per accumulare maggior copia di materiale sperimentale, dal quale poi trarre conclusioni il più possibile fondate su materiale sperimentale.

Abbiamo quindi tentata la riduzione elettrolitica in condizioni pressochè eguali dei derivati alogenati del metano e di un buon numero di derivati dell'etano con metodo elettrolitico, come quello dal quale si sarebbero poi potuti ottenere risultati più facilmente interpretabili e fruttuosi.

Il dispositivo usato nelle esperienze era costituito da una cella porosa della capacità di circa 250 cc., chiusa da un tappo a più fori attraverso i quali venivano introdotti un agitatore meccanico, il catodo cilindrico di vari metalli e della superficie di un dmq., un imbuto a robinetto ed un tubo per la raccolta dei gas al quale poteva all'occorrenza venir congiunto anche un refrigerante a ricadere, e che costituiva l'ambiente catodico. L'ambiente anodico era costituito da un bicchiere da pila contenente la cella porosa ed una lamina di platino che funzionava da anodo. La cella elettrolitica così costituita era a sua volta introdotta in un altro bicchiere circondato da un serpentino di piombo attraverso il quale scorreva acqua fredda per mantenere all'incirca costante la temperatura durante l'elettrolisi.

Il liquido anodico era sempre una soluzione di acido solforico al 10 %; quello catodico o una semplice soluzione acquosa della sostanza da dealogenare come nel caso degli acidi cloracetici, o quando questa non aveva carattere elettrolitico una sua soluzione in acido solforico al 10 %, al quale veniva aggiunta una certa percentuale di alcool etilico quando la solubilità in acqua della sostanza stessa era molto piccola. Con gli elettrodi usati l'alcool non portava alcun disturbo: elettrolizzando anche a lungo sue miscele con acido solforico diluito non si è mai notato un consumo apprezzabile di idrogeno al catodo. Veniva sempre usato un volume costante di 200 cc. di liquido catodico.

Nel circuito elettrolitico, oltre ad una resistenza ed un amperometro, era inserito anche un voltametro a gas tonante. L'andamento delle esperienze venne seguìto anzitutto confrontando la quantità di idrogeno sviluppato dall'ambiente catodico dell'elettrolizzatore colla quantità di gas tonante sviluppata dal voltametro ed in generale le esperienze venivano interrotte quando le due quantità divenivano corrispondenti. Quando nelle esperienze preliminari veniva accertato che una quantità di idrogeno veniva consumata al catodo veniva determinata anche la quantità di cloro ionizzata, per controllare se tutto l'idrogeno non sviluppato andava realmente speso nella dealogenazione. Natu-

ralmente determinazioni di questo tipo sono attendibili soltanto per elettrolisi di breve durata, per le quali si può ritenere che le perdite di cloro ionizzato per migrazione anodica non siano tali da alterare profondamente i risultati. In generale l'accordo tra le quantità di idrogeno consumato e la quantità di acido cloridrico formato non risulta mai perfetto, anche in causa dei metodi relativamente grossolani di misura ma le differenze non sono tali da ritenere che notevoli quantità di idrogeno possano essere usate in processi diversi da quello della dealogenazione.

Inoltre l'andamento delle esperienze venne seguìto coll'analisi dei gas catodici e coll'identificazione dei prodotti finali.

I gas vennero analizzati secondo Hempel. Quando si ritenne che in essi vi fossero sostanze clorurate difficilmente condensabili o solubili in acqua come il cloruro di metile, il gas veniva analizzato solo dopo averlo privato di esse sbattendolo lungamente in una pipetta di Hempel contenente una sospensione di ossido di argento precipitato di recente.

Per l'identificazione dei prodotti finali si ritenne sufficiente la determinazione delle costanti fisiche più salienti.

Nelle tabelle che raccolgono i risultati ottenuti, nella colonna 1 è dato il numero progressivo dell'esperienza, nella 2 la quantità di sostanza da dealogenare usata, nella 3 la quantità totale di cloro contenuta in essa, nella 4 la quantità di idrogeno in cc. teoricamente necessaria per la sostituzione totale del cloro, nella 5 la durata in ore dell'elettrolisi, nella 6 il materiale che costituiva i catodi, nella 7 l'intensità di corrente, nella 8 la quantità totale di idrogeno prodotto, nella 9 la quantità di idrogeno usato e non sviluppato, nella 10 la quantità di cloro ionizzato, ed infine nella 11 le quantità di idrogeno necessarie per la sostituzione a questa quantità di cloro.

Tetracloruro di carbonio. – Usando catodi di platino in forma di rete sottile alla temperatura ordinaria (Tab. I, esp. 1) non si nota alcuna traccia di riduzione anche proseguendo molto a lungo l'esperienza.

Byers e van Arsdel, come si è visto, usando catodi di piombo ottennero la riduzione del tetracloruro a cloroformio. Questi sperimentatori interrompevano tuttavia la riduzione quando soltanto il 10-15 % del tetracloruro usato era stato ridotto, forse per non avere prodotti di riduzione ulteriore. Dalle nostre esperienze infatti risulta (Tab. I, esp. 2) che usando questi catodi il tetracloruro viene rapidamente ridotto, ma che la riduzione va oltre a cloroformio, poichè la quantità di cloro ionizzato supera la quantità che dovrebbe corrispondere a questa trasformazione. Aumentando la quantità iniziale di tetracloruro e proseguendo più a lungo l'elettrolisi dai prodotti finali si è potuto separare (Tab. I, esp. 3) una discreta quantità di cloruro di metilene (gr. 14) e soltanto tracce di cloroformio e di tetracloruro.

Tabella I.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	3.188	2.939	1857	1	Pt	2	840	tracce	tracce	—
2	3.188	2.939	1857	4.15	Pb	2	3570	1065	1.49	945
3	47.920	—	—	8	Pb	3.5	11660	9460	—	—
4	47.920	—	—	3.50	Cu	2.4	5980	5780	—	—

Con catodi di piombo (Tab. I, esp. 4) il tetracloruro viene ridotto soltanto a cloroformio e con discreto rendimento di corrente. Ottenuta la riduzione a cloroformio, con questi elettrodi non si ha ulteriore declorurazione come dimostrano esperienze fatte proseguendo a lungo la elettrolisi, quando cioè lo sviluppo di idrogeno al catodo dell'elettrolizzatore era divenuto da lungo tempo praticamente corrispondente allo sviluppo del gas tonante nel voltametro, e come lo dimostrano anche le seguenti esperienze fatte usando come sostanza da declorurare lo stesso cloroformio. Per controllo vennero appunto fatte esperienze partendo dal cloroformio e dal cloruro di metilene.

Cloroformio. – Come era da attendersi dopo i risultati ottenuti col tetracloruro, usando catodi di platino non si è avuta alcuna traccia di declorurazione. (Tab. II, esp. 1).

Tabella II.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	29.76	26.58	1683	2.35	Pt	2	2170	—	—	—
2	29.76	26.58	1683	2.35	Pb	2	2170	540	0.89	555
3	59.92	53.16	3366	5	Cu	3.4	5500	n. d.	—	—
4	59.92	53.16	3366	7.45	Pb	3.4	6225	n. d.	—	—

Già dai risultati dell'esperienza 2 si può dedurre che con catodi di piombo si ha dealogenazione del cloroformio benchè con rendimenti di molto inferiori a quelli avuti per la riduzione del tetracloruro. Usando una maggiore quantità di cloroformio e proseguendo a lungo l'elettrolisi (esp. 4) anche in questo caso dai prodotti finali si è potuto isolare una piccola quantità di cloruro di metilene (gr. 5) sufficiente per riconoscerlo con certezza.

Con catodi di rame invece (Tab. II, esp. 3) non si hanno tracce di declorurazione ed alla fine dell'esperienza si ritrova tutto il cloroformio inalterato.

Cloruro di metilene. – Per vedere fin dove poteva essere spinta la declorurazione vennero fatti alcuni tentativi di dealogenazione col cloruro di metilene usando solamente elettrodi di piombo, che servirono a dimostrare che realmente si ha una lentissima dealogenazione. Nei gas catodici sviluppati in queste esperienze si trovarono sempre piccole quantità di gas clorurati accanto a piccole quantità di metano. La presenza di questi veniva stabilita o bruciando il gas, lavato preventivamente con acqua, e raccogliendo i prodotti della combustione di notevoli quantità in tubi di assorbimento dove si ricercava poi il ione cloridrico, o facendo l'analisi dei gas prima e dopo trattamento degli stessi con ossido d'argento in sospensione. Molto probabilmente si tratta di piccole quantità di cloruro di metile, ma il suo controllo non fu possibile. Oltre all'idrogeno e a questi prodotti clorurati nei gas catodici si riscontrò sempre quantità variabili, ma non molto rilevanti, di metano (4–6 %).

Come si è visto dalle esperienze fatte si deduce che con catodi di rame il tetracloruro si riduce soltanto a cloroformio e con discreti rendimenti. Abbiamo fatto quindi esperienze a parte per calcolare con maggior esattezza i rendimenti e confrontarli con quelli ottenuti da altri in condizioni diverse. I risultati ottenuti furono i seguenti.

Partendo per esempio da gr. 63.4 di tetracloruro alla fine della reazione si sono potuti ottenere gr. 40 di cloroformio in luogo della quantità teorica che sarebbe stata di gr. 49.0. Oltre al cloroformio non si è potuto raccogliere che una piccola quantità di metano corrispondente a gr. 0.25 e a gr. 2.32 di tetracloruro.

Nel corso della reazione furono prodotti 9300 cc. di idrogeno e ne vennero consumati 8450 e cioè circa il 90 % di quello prodotto.

Siccome per ottenere gr. 40 di cloroformio occorrono gr. 51.4 di tetracloruro per i quali necessitano 7550 cc. di idrogeno, si ha perciò che nella formazione di cloroformio venne utilizzato 89 % dell'idrogeno consumato e 81 % di quello prodotto.

Questi risultati ci inducono a ritenere che in un'eventuale preparazione del cloroformio dal tetracloruro per via elettrolitica siano assai più convenienti catodi di rame che non catodi di piombo, come usarono Byers e van Arsdel (loc. cit.). Infatti questi ricercatori erano costretti ad interrompere la riduzione quando solo una parte del tetracloruro era trasformata in cloroformio rendendo così assai più difficile la separazione dei due che, come risulta dalla nostre esperienze avviene tanto più difficilmente quanto più tetracloruro è presente.

In definitiva da queste esperienze risulta che la declorurazione avviene per gradi ed in accordo alle sopratensioni dei catodi usati.

Derivati alogenati dell'etano. – Come si è già visto Askenasy riducendo elettroliticamente con catodi di rame il tetracloretano simmetrico ottenne dicloroetilene con rendimenti tali da proporne la preparazione industriale con

questo metodo. Abbiamo ritenuto estendere le ricerche ad altri derivati alogenati dell'etano per confermarne anzitutto il diverso comportamento, per cui il distacco di un atomo di alogeno non è accompagnato dalla sostituzione con un atomo di idrogeno, come sempre avviene per i derivati del metano, ma dalla formazione di legami multipli.

Dato che nelle esperienze precedenti i migliori risultati si ebbero con catodi di piombo, nelle esperienze seguenti venne usato esclusivamente questo elettrodo, poichè le sostanze usate si dimostrano assai più difficilmente dealogenabili dei derivati del metano.

Sottoponendo alla riduzione il bromuro di etilene si ottenne soltanto formazione di etilene con un rendimento di circa il 70 % dell'idrogeno prodotto. Non ci riescì di constatare la presenza di alcun altro prodotto liquido o gassoso di riduzione intermedia, ma soltanto tracce, non sempre rilevabili, di idrocarburi saturi.

Coll'esacloroetano si incontrano difficoltà sperimentali in causa della sua poca solubilità, ma anzichè variare il dispositivo delle esperienze si preferì elettrolizzare a più riprese soluzioni idroalcooliche diluite ed analizzare poi insieme i prodotti di varie esperienze. La riduzione è molto lenta e soltanto una piccola parte dell'idrogeno prodotto viene usato. Nei gas catodici oltre a questo non si è mai potuta constatare alcuna altra sostanza. Dalla lavorazione dei liquidi catodici si è potuta isolare una piccola quantità di tetracloretilene (gr. 3 circa) p. eb. 121°.

Dal pentacloretano si è potuto ottenere una discreta quantità di tricloretilene (p. eb. 87). Anche in questo caso non si è potuto riscontrare alcun altra sostanza liquida o gassosa.

Anche il tetracloretano in queste condizioni si riduce molto difficilmente, dai prodotti finali si è potuto separare una piccola quantità di liquido con p. eb. 57°, probabilmente costituito da una miscela dei due isomeri del dicloretilene.

Il metilcloroformio in queste condizioni non viene praticamente dealogenato.

La dealogenazione dei derivati dell'etano procede dunque in modo assai diverso da quella dei derivati del metano. Mentre in questi si ha sostituzione graduale di atomi di alogeno con atomi di idrogeno im modo abbastanza netto da poter ritenere che usando al catodo sopra tensioni adatte si potrebbero ottenere gradualmente tutti i prodotti sino al metano, per i derivati dell'etano invece la dealogenazione avviene per paia di atomi senza sostituzione. Dai prodotti ottenuti si deve dedurre che i due atomi di alogeno appartengono sempre a due atomi diversi di carbonio e che si tratta sempre di derivati dell'etilene.

Nei composti simmetrici come l'esacloro ed il tetracloretano in ognuno dei composti gli atomi di carbonio possono essere considerati allo stesso grado di ossidazione; il distacco contemporaneo dei due atomi di alogeno

verrebbe spiegato senz'altro. Per i composti assimetrici, come il pentacloretano, la dealogenazione avviene ancora per paia di atomi: ciò potrebbe essere spiegato ammettendo che dei due atomi di carbonio ceda per primo cloro quello come più clorurato, il quale, diminuendo così in valenza principale, assumerebbe una coordinazione superiore formando un legame doppio coll'altro atomo di carbonio, che a sua volta, assumendo così una somma di valenze superiore a quattro, cederebbe anch'esso facilmente un atomo di cloro.

Chimica (Chimica biologica). — *Il pigmento respiratorio dell'«Aspergillus Niger»* [1]. Nota di M. Giordani, presentata [2] dal Socio N. Parravano.

In una Nota, comunicata all'ultimo Congresso Internazionale di Chimica a Madrid, sulla preparazione biologica dell'acido citrico con *Aspergillus Niger*, ho fatto osservare che la preventiva asfissia in acqua delle spore, adoperate per l'insemenzamento dei terreni liquidi, porta ad un migliore sviluppo del tessuto miceliare ed impedisce la sporificazione aumentando la resa in acido citrico.

Evidentemente la prolungata permanenza in acqua, altera la capacità respiratoria della muffa, per qualche modifica o passaggio in soluzione di un pigmento respiratorio eventualmente contenuto nelle spore.

Linossier [3] ha descritta, per primo, l'Aspergillina (pigmento nero delle spore di *Aspergillus Niger*) come una sostanza facilmente solubile in alcali diluiti, poco in alcool acidificato con acido acetico. Le soluzioni hanno colore bruno-verde o bruno-rosso, secondo la concentrazione. Essa avrebbe notevoli analogie di funzioni con l'ematina del sangue, e cioè: la proprietà di fissare l'ossigeno dell'aria per cederlo alle sostanze riducenti del substrato; la presenza nelle due sostanze di una quantità notevole di ferro; infine la proprietà comune di fornire con un riducente energico un prodotto di riduzione ossidabile all'aria rigenerando così la sostanza primitiva.

Nelle culture vecchie non sporificate, sarebbe contenuto un pigmento giallo oro solubile in etere [4] ed il Frey [5] avrebbe anche isolata una materia cromogena. Questa sostanza si riconosce per un viraggio al giallo intenso quando si alcalinizza il liquido. Neutralizzando la colorazione scompare. La materia cromogena sarebbe quindi un indicatore, di cui la forma acida è incolore e quella alcalina giallo-scura; non si riesce però a precisare bene il suo campo di viraggio perchè è una sostanza molto instabile.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.
(2) Nella seduta del 4 novembre 1934.
(3) «C. R. Ac. Sc.», *112*, 489, 1891.
(4) Milbrun, «Centr. f. Bakt.», *129*, 257, 1904.
(5) «C. R. Ac. Sc.», *182*, 552, 1926.

Quilico e di Capua [1] in base ad alcune considerazioni sul comportamento chimico dell'estratto alcalino delle spore nere, hanno sostenuto che l'Aspergillina sia una sostanza del tipo dell'acido umico analogo a quello che si può estrarre dalla torba, dalla lignite e dal suolo. Sarebbe questo il primo caso di formazione di una sostanza umica in un organismo vegetale da un carboidrato come il saccarosio, e rappresenterebbe un contributo interessante al problema della genesi delle sostanze umiche.

Questi AA., tra l'altro, trovano che in alcool etilico o metilico, le spore dànno una soluzione fluorescente dovuta a quantità variabili di una sostanza che essi ritengono un pigmento accessorio.

L'analogia prospettata dal Linossier [2] fra Aspergillina ed Ematina e la possibilità di avere buoni indizi in questo campo con indagini spettrografiche e d'altra parte la presenza nelle spore del pigmento giallo di Frey [3] che potrebbe essere identificato con i fermenti gialli trasportatori di ossigeno del Warburg [4], i quali presentano anch'essi una banda di assorbimento caratteristica nel giallo [5], mi hanno indotto a procedere ad un esame spettrografico dell'estratto di spore dell'*Aspergillus Niger*.

Il ceppo della muffa e le modalità di allevamento sono identiche a quelle riportate nella Nota citata sulla *Fermentazione citrica*. Il dispositivo spettrografico è lo stesso adoperato in altre mie indagini sulla chinina [6].

La fig. 1 mostra la curva di assorbimento di un'estratto di spore in una soluzione di idrato sodico al 0.5 %. Il valore della concentrazione molecolare, necessario per il calcolo del coefficiente ε è arbitrario; la curva ha solo valore qualitativo.

I massimi di assorbimento corrispondono a valori di λ di 2840, 4300 e 4500 unità Angstrom.

L'andamento della curva, come il comportamento della sostanza, mi lasciano supporre che nelle spore vi sia un pigmento respiratorio del tipo delle flavine del Kuhn. Risulta infatti evidente l'analogia della curva di assorbimento ottenuta con quelle della lattoflavina e dell'ovoflavina.

Inoltre Warburg [7] ritiene che i suoi fermenti gialli siano costituiti da una sostanza portatrice colloidale ed una materia colorante gialla. Questa per fissazione di due atomi di idrogeno diventa incolore; riossidata con ossigeno riappare il colore. Il fermento trattato con alcool metilico manda in soluzione il colorante con fluorescenza verde.

(1) «Rend. Acc. Lincei», *17*, 93 e 177, 1933.
(2) Loc. cit.
(3) Loc. cit.
(4) «Naturwiss.», *441*, 1934.
(5) «Biochem. Zeit.», *262*, I, 1933.
(6) «Ann. Chim. Appl.», 1928.
(7) Loc. cit.

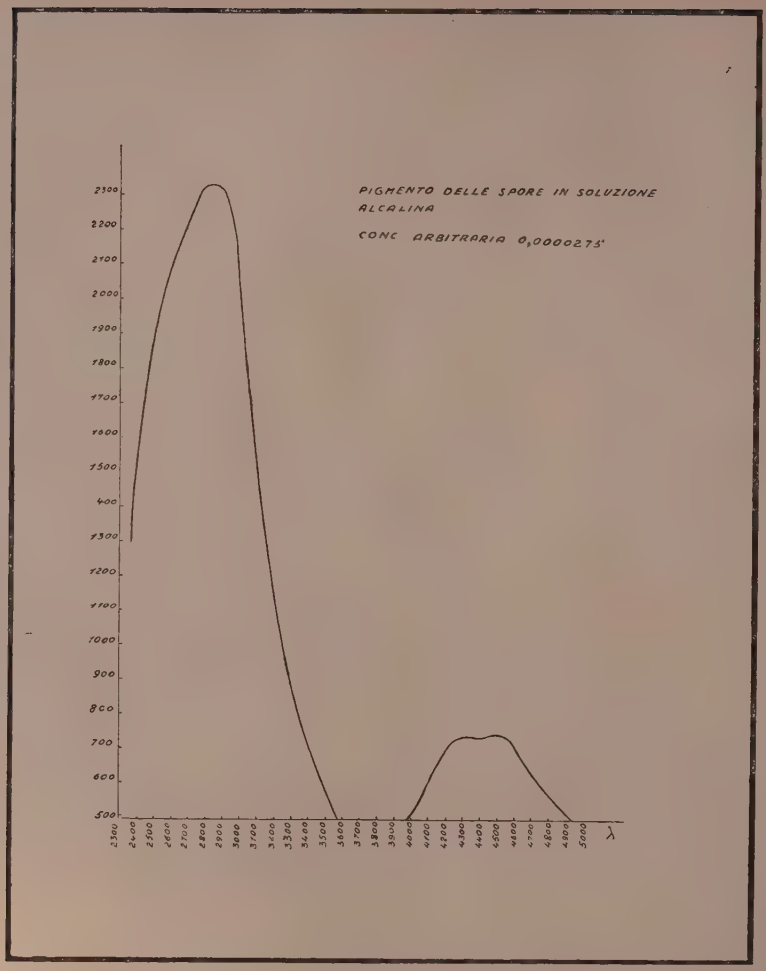


Fig. 1.

L'estratto metilico, ottenuto direttamente dalle spore nere, presenta un comportamento perfettamente analogo a questo fermento giallo ed ai caratteri delle flavine del Kuhn (1).

Attualmente proseguono le indagini per definire esattamente la costituzione della sostanza.

(1) «Ber.», 1933 e 1934.

Biologia. — *Ricerche citologiche sulla germinazione delle clamidospore di « Urocystis tritici » Koern* [1]. Nota di A. Biraghi, presentata [2] dal Corrisp. L. Petri.

Le prime osservazioni sulle modalità del processo germinativo presentate dalle clamidospore di *Urocystis tritici* Koern. Sono state rese note da Mc Alpine nel 1910 [3] e poi più compiutamente da Noble [4]; in seguito lo stesso A. [5] ha continuato le sue ricerche studiando il comportamento citologico di questo fungo nei suoi primi stadi di sviluppo.

Prendendo in attento esame le osservazioni che egli ha rese note e le conclusioni a cui è giunto, si è portati a constatare come la conoscenza di questi fenomeni potrebbe essere avvantaggiata da ulteriori studi e ciò mi ha indotto a ripetere le ultime ricerche di Noble nell'intento di approfondire e chiarire meglio alcuni punti lasciati in sospeso da questo A.

Come materiale di studio mi sono servito di clamidospore raccolte nel maggio 1933 e consevate fino all'autunno in laboratorio in condizioni ordinarie.

Le clamidospore furono fatte germinare in decotto di giovani foglie di grano dopo essere state preventivamente tenute in acqua per quattro giorni. Dopo circa 24 ore dalla semina in decotto le clamidospore dànno una germinazione discretamente abbondante.

Il processo si inizia con la fuoriuscita, attraverso una lacerazione dell'episporio, di un grosso promicelio che può raggiungere una lunghezza variabile, che ho potuto constatare essere in rapporto con la concentrazione del liquido nutritivo.

Generalmente nel promicelio non si osserva la formazione di setti trasversali; ciò avviene solo quando, per un notevole allungamento del promicelio, il contenuto di esso si porta verso l'apice lasciando vuota la porzione basale, in questo caso si ha l'apparizione di una parete divisoria che separa le due porzioni.

(1) Lavoro eseguito nella R. Stazione di Patologia vegetale con incoraggiamento sui fondi Treccani conferito il 20 marzo 1934-XII.

(2) Nella seduta del 4 novembre 1934.

(3) Mc Alpine, *The smuts of Australia, their structure, life history, treatment and classification*, Melbourne, 1910.

(4) Noble R. J., *Studies on « Urocystis tritici » Koern., the organism causing flag smut of wheat*, « Phytopath. », XIII, 127-139, 1923.

(5) Id., *Studies on the parasitism of « Urocystis tritici » Koern., the organism causing flag smut of wheat*, « Journ. Agr. Res. », XXVII, 451-489, 1924.

Poco dopo la comparsa del promicelio o anche dopo che esso ha raggiunto un certo sviluppo, vi si osserva un nucleo con un grosso nucleolo; esso ben presto si divide dando origine, nella maggioranza dei casi, a quattro nuclei anch'essi forniti di nucleolo visibilissimo.

Quando il promicelio ha raggiunto lo stadio quadrinucleato si osserva alla sua estremità la formazione di piccole escrescenze dalle quali si sviluppano gli sporidi di forma affusolata.

Nell'80 °/₀ dei casi si hanno promiceli con tre sporidi, ad essi come frequenza seguono quelli a quattro sporidi, mentre rari sono i casi di promiceli con due o cinque sporidi.

In ciascuno degli sporidi migra uno dei nuclei del promicelio; e, quando i nuclei sono in numero superiore agli sporidi, quelli in soprannumero rimangono nel promicelio.

Compiutasi la migrazione dei nuclei si comincia a rendere visibile una serie di manifestazioni preparatorie alla coniugazione.

Nel caso più frequente si può osservare, poco al disopra del punto di attacco dello sporidio col promicelio, l'apparizione di una protuberanza che va man mano allungandosi fino ad incontrare la parete di un altro sporidio o l'apice di una protuberanza analoga prodotta da quest'altro sporidio.

Nel punto di contatto le pareti si dissolvono ed i due sporidi vengono così ad essere collegati da un ponte.

Durante questo processo non si osserva alcuna modificazione nè nella posizione nè nella struttura dei nuclei. La visibile partecipazione di essi al processo è sempre preceduta da una evidente modificazione del citoplasma dei due sporidi in coniugazione, che si manifesta con una marcata affinità con i coloranti nucleari.

In questo periodo la visibilità del nucleo diventa molto poco evidente e solo si riesce a seguire il comportamento del nucleolo.

Poco dopo che si è stabilito il ponte di unione tra i due sporidi il nucleolo di uno di essi si spezzetta in piccole sferule, spesso collegate tra loro da esili filamenti, molto sensibili anch'essi ai coloranti nucleari, e migra, in queste condizioni, attraverso il ponte di unione, nell'altro sporidio ove il corrispondente nucleolo, che ha subìto nel frattempo le stesse modificazioni, si trova ancora nella fase di frammentazione o si è già ricostituito.

In breve entrambi i nuclei riappaiono, disposti verso l'apice dello sporidio ricevente ed a breve distanza l'uno dall'altro: ognuno contiene un nucleolo ben visibile, però il volume dei nuclei e dei nucleoli si è ridotto a quasi la metà di quello dei nuclei e nucleoli originari.

Lo sporidio ricevente inizia ad allungarsi producendo un filamento di aspetto micelico, mentre in esso migra, sempre attraverso il canale di comunicazione, anche il citoplasma dell'altro sporidio che in questo modo si svuota e degenera.

Nello sporidio in accrescimento il citoplasma, seguendo sempre l'allungarsi del filamento, abbandona la porzione basale ed allora si ha la formazione di pareti divisorie, analogamente a quanto avviene nei promiceli fortemente sviluppati.

Man mano che il filamento micelico si accresce si forma un nuovo setto e questo processo si ripete fino a quando il filamento si disarticola. Nel frattempo la coppia di nuclei può dividersi ed allora si possono osservare dei filamenti con quattro nuclei divisi in due gruppi.

Considerando il caso più frequente di un promicelio con tre sporidi si osserva che due di essi si coniugano fra loro nel modo suddescritto, mentre il terzo riceve il nucleo rimasto nel promicelio. Questo passaggio non avviene mai attraverso l'istmo che unisce lo sporidio col promicelio, ma attraverso un canale di coniugazione che si forma in modo analogo a quello che si osserva formarsi tra due sporidi.

Nella porzione apicale del promicelio si ha la comparsa di una protuberanza a becco simile a quelle già descritte per gli sporidi ed il cui contenuto rivela le stesse affinità per i colori nucleari.

Questo becco si allunga, l'apice di esso si porta verso il terzo sporidio e viene a contatto o direttamente con la parete di esso o, più raramente, con un'analoga formazione prodotta dallo sporidio. Nel punto di unione le pareti si dissolvono ed il processo di coniugazione tra il promicelio e lo sporidio avviene allo stesso modo di quello diretto tra due sporidi.

In questo caso è importante notare come sia sempre il nucleo del promicelio a passare nello sporidio e mai avvenga il fatto opposto.

In un caso in cui il promicelio aveva prodotto solo due sporidi la coniugazione è avvenuta per entrambi attraverso due distinti canali che li hanno uniti al promicelio.

In base a quanto ho potuto osservare nel corso delle mie ricerche posso concludere che la fusione tra sporidi e tra promicelio e sporidio è un fenomeno generale che precede l'apparizione del tubo germinativo binucleato e non un fatto sporadico come ebbe a rendere noto Noble e che inoltre si deve ritenere che la fase binucleata derivi dall'intervento di due nuclei di provenienza diversa e non sia la conseguenza della divisione di un unico nucleo.

Le modificazioni nucleari e nucleolari nonchè l'affinità ai coloranti nucleari che il citoplasma acquista allorchè si stabilisce la comunicazione tra due sporidi e la presenza varie volte osservata di sferule cromatiche nel canale di coniugazione mostrano chiaramente come in quell'istante avvengano nell'interno delle cellule dei fenomeni nei quali la sostanza nucleare è parte attiva.

Al termine del processo i due elementi che sono entrati in comunicazione acquistano una conformazione nettamente differente in quanto in uno non si riscontra più traccia del nucleo ed il citoplasma va ritirandosi

mentre nell'altro si ha l'aumento in numero dei nuclei ed il progressivo accrescimento di tutto l'elemento.

E' da ritenersi perciò che anche *Urocystis tritici* segua il tipo di germinazione descritto da Kniep per *Ur. Anemones* [1] e da Rawitscher per *Ur. Violae* [2].

Biologia (Embriologia sperimentale). — *Prime ricerche sulle compatibilità ed incompatibilità embrionali negli Anfibi studiate col metodo degli espianti* [3]. Nota [4] di G. Cotronei e T. Perri, presentata dal Socio F. Silvestri.

Le ricerche che G. Cotronei ed i suoi allievi (A. Spirito, C. Guareschi, T. Perri, O. Marcucci, E. Ruzza) hanno condotto mediante trapianti embrionali e larvali di molti organi – tra Anuri e Urodeli – hanno permesso di mettere in luce ed illustrare fatti, che crediamo interessanti, sui processi di compatibilità ed incompatibilità verificantisi durante lo sviluppo. In questo stesso periodico, dal '29 in poi, sono riportati tutti i risultati analitici. Tra questi è da rilevarsi la grande importanza della perfetta conoscenza della posizione sistematica dell'ospite, per lo studio dei processi embrionali che si verificano nelle condizioni di trapianto. Forme molto vicine di Anfibi anuri mostrano un comportamento molto diverso, quando su essi vengano trapiantati abbozzi di una medesima forma di Urodelo. Infatti, abbozzi embrionali di *Triton taeniatus* o di altri Urodeli, trapiantati su embrioni di *Rana esculenta*, vanno rapidamente distrutti; si differenziano invece su embrioni di *Hyla arborea*. Risultati differenti si ottengono pure trapiantando uno stesso abbozzo di Urodelo su specie diverse dello stesso genere *Rana*. I trapianti embrionali inversi, cioè di *Rana esculenta* su *Triton* o altri Urodeli, si differenziano; però si distruggono al termine dell'assorbimento vitellino: e ciò rappresenta il solo tipo di distruzione che si verifica negli abbozzi di Anuri da noi trapiantati negli Urodeli.

Tenendo presente la prevalente importanza del metabolismo vitellino nello sviluppo embrionale, il differente comportamento dei trapianti embrionali di Urodeli su specie diverse di Anuri, ed infine il comportamento dei trapianti di Anuri sugli Urodeli, Cotronei fu indotto a sospettare che tanto

(1) Kniep H., *Ueber Urocystis Anemones* (*Pers.*) *Wint.*, « Zeitschr. f. Bot. », *13*, 289-311, 1921.

(2) Rawitscher F., *Beiträge zur Kenntnis der Ustilagineen.* II, « Zeitschr. f. Bot. », *14*, 273-296, 1922.

(3) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia ed Embriologia comparate della R. Università di Roma.

(4) Pervenuta all'Accademia il 22 ottobre 1934.

i fenomeni di compatibilità quanto quelli di incompatibilità embrionale fossero appunto in dipendenza del metabolismo vitellino [1]. Una serie di esperienze, tra cui ricordiamo quelle estesamente analitiche di A. Spirito [2] e le altre di T. Perri [3], presentavano un valido appoggio a tale concezione di Cotronei. È da rilevare che Spirito per il primo ottenne il differenziamento della vescicola ottica primaria di *Triton* trapiantata su parti isolate di embrioni di *Rana esculenta* non contenenti vitello di riserva.

Le ricerche finora eseguite con il metodo dei trapianti hanno già dato molto di quello che era possibile attendersene. Tuttavia tale metodo non è ancora completamente sfruttato, tanto che altre ricerche con i trapianti sono inedite o in elaborazione.

Nel corso del complesso lavoro, è apparso ancora che una nuova verifica diretta dell'importanza del vitello delle uova degli Anfibi, come fattore di compatibilità o incompatibilità nello sviluppo, si potesse avere con lo studio degli espianti, perchè con tali procedimenti tecnici, meglio ancora che con i trapianti, si possono discriminare i possibili fattori che intervengono nel corso dei processi che noi studiamo. D'altra parte, però, per una adeguata valutazione critica dei risultati, bisogna tener conto essenzialmente delle peggiori condizioni di sviluppo negli espianti in confronto con i trapianti, intendendole in senso molto largo.

Le ricerche di espianto negli Anfibi sono in questi ultimi anni molto progredite, ed hanno permesso in breve tempo di giungere a conclusioni molto interessanti; basterebbe accennare alle ultime ricerche in rapporto agli organizzatori. I metodi più semplici, rispetto a quelli praticati negli omotermi, con l'uso sopratutto di soluzioni di Ringer più o meno modificate, ne hanno facilitato il lavoro (Born, Ekman, Görttler, Filatow, Holtfreter, Erdmann, Mangold ed altri).

Nel nostro Istituto, T. Perri [4] ha già condotto ricerche con tali procedimenti sullo sviluppo dell'abbozzo dell'occhio; già nelle relative pubblicazioni fu chiaramente detto che servivano anche di preparazione a quelle che Cotronei si proponeva di compiere in rapporto ai già accennati problemi di compatibilità e incompatibilità embrionali.

Per quanto si riferisce all'espianto della vescicola ottica, abbozzo che noi abbiamo saggiato in queste esperienze, ricordiamo che in questi ultimi

(1) Vedi G. Cotronei, Nota IX in questi «Rendiconti», vol. XV, 1932.

(2) Questi «Rendiconti» Nota I, vol. XII, 1930, pp. 183-186; Nota II, vol. XIV, 1931, pp. 154-159; Nota III, vol. XIV, 1931, pp. 361-365; «Arch. f. Entw. mech.», *127*, 1932.

(3) Questi «Rendiconti», Nota I, vol. XII, 1930; Nota II, vol. XIV, 1931; «Arch. f. Entw. mech.», *126*, 1932.

(4) Questi «Rendiconti», Nota I, vol. XVI, 1932; Nota II, vol. XVII, 1933; «La Ricerca Scientifica», vol. II, 1933; «Arch. f. Entw. mech.», *131*, 1934.

anni si sono ottenuti risultati positivi tanto per gli Anuri (Filatow, von Ubisch, Bautzmann, Perri) quanto per gli Urodeli (Filatow, Bautzmann) [1]. Conviene ricordare sopratutto le osservazioni di Bautzmann [2]. Questo Autore è l'unico che abbia pubblicato (1929) alcuni dati riguardanti esperienze di espianto di abbozzi di Urodeli avvolti in tegumento di Anuri (per lo più di *Bombinator*, qualche volta di *Rana esculenta*). Per queste combinazioni xenoplastiche riferisce casi singoli, tra cui lo sviluppo di una vescicola ottica primaria di *Triton teniatus*, senza chiarire se il tegumento sia di *Bombinator* o di *Rana esculenta*. È superfluo aggiungere che Bautzman non ha nemmeno sfiorato i problemi della compatibilità ed incompatibilità tra Anuri e Urodeli.

Le esperienze da noi compiute si riferiscono ad espianti di vescicola ottica primaria di *Triton taeniatus* in *Rana esculenta*. La tecnica operatoria è quella già usata da Perri per gli espianti di *Rana esculenta*. Si esegue prima il trapianto della vescicola ottica di *Triton* su varie zone ventrali di embrione di *Rana esculenta*, e appena avvenuto l'attecchimento si procede all'isolamento secondo due tipi di operazioni: 1) Asportazione della vescicola ottica di *Triton* con ectoderma e relativo mesenchima, e vitello di *Rana esculenta*; 2) asportazione della vescicola ottica di *Triton* con solo ectoderma e relativo mesenchima di *Rana esculenta*. Nell'un tipo e nell'altro si è cercato di includere, in alcuni casi, e di escludere in altri, l'abbozzo del sangue, per vedere l'eventuale sua influenza nei processi di compatibilità o incompatibilità [3]. Come controllo a queste esperienze di espianti xenoplastici, si sono pure eseguiti espianti autoplastici con vitello di *Triton* su *Triton* seguendo la stessa tecnica, per l'analisi dei fattori inerenti alle condizioni meccaniche delle operazioni. Servirono pure come controllo le già dette esperienze di Perri, sull'espianto dell'abbozzo dell'occhio in *Rana esculenta*.

Come mezzo abbiamo usato una soluzione di Ringer [4]; e quella di

(1) Per la letteratura sugli espianti, specie della vescicola ottica, rimandiamo il lettore al già citato lavoro di Perri (1934).

(2) «Gesellschaft f. Morph. u. Physiol. München», XXXIX, 1929.

(3) Su questo punto dobbiamo dire che, per ora, le esperienze non ci hanno permesso di discriminare un contegno differenziale nei riguardi della presenza o meno dell'abbozzo del sangue (abbozzo di Federici). Naturalmente questo non ha nulla a vedere con l'influenza ormai accertata dalle esperienze di trapianto sul fattore circolazione.

(4) Soluzione di Ringer usata:

NaCl	gr.	18
KCl	»	0,42
$CaCl_2$	»	0,36
NaH_2PO_4	»	0,030
$NaHCO_3$	»	0,60
Acqua distillata	»	1000

Sterilizzata per ebullizione e poi aggiunta di $NaHCO_3$ nella quantità detta. Al momento dell'uso si diluisce in acqua distillata 1 : 10.

Ringer–Holtfreter [1] in asepsi. Possiamo dire che i due mezzi non ci hanno dato sensibili differenze.

In molti casi gli espianti sono vissuti troppo poco perchè si fosse potuto avere qualche risultato apprezzabile, in altri purtroppo si sono disfatti impedendoci di fissarli in buone condizioni.

Lo studio delle esperienze portate a termine ci hanno permesso di giungere ai risultati che ora riferiamo. Nelle esperienze del primo tipo, ogni volta che l'occhio è venuto a trovarsi immerso nel vitello (cioè in 10 casi), si è avuta rapida distruzione dell'abbozzo. Detriti cellulari riescono ancora a trovarsi fino a 2–3 giorni dall'operazione (esperienze eseguite in luglio). In alcuni dei 10 casi la vescicola al momento del trapianto era all'inizio dell'introflessione; anche qui distruzione e talora qualche residuo (dopo 3 giorni, in giugno). Queste esperienze, controllate istologicamente, corrispondono in tutto ai risultati comunicati nei vari lavori della nostra Scuola, circa la distruzione di abbozzi embrionali di Urodeli trapiantati su embrioni di *Rana esculenta*. Permettono inoltre di approfondire le nostre conoscenze, avendoci fatto risultare la possibilità che il solo vitello, con ectoderma e relativo mesenchima, di *Rana esculenta* porta a processi distruttivi la vescicola ottica di *Triton*.

Nelle esperienze del secondo tipo, di espianto senza vitello di *Rana*, si sono avuti in tutti i 10 casi, come è stato riconfermato all'esame istologico, le volute condizioni. Gli espianti sono stati tutti in vita 7 giorni (in giugno) o da 2 a 5 giorni (in luglio). Di questi 10 casi, in 8 lo stadio è stato di vescicola ottica primaria, e in 2 d'inizio di introflessione. Abbiamo trovato che lo sviluppo dell'occhio è proseguito più o meno, sempre però con netto contegno differenziale con le esperienze dell'altro tipo. (L'annessa figura ce ne dà un esempio). In qualcuno di questi casi insieme con l'ectoderma e relativo mesenchima è stata inclusa qualche traccia di vitello, però trattasi di quantità così piccole che non potevano spostare le condizioni. In questa diversità di risultati, a seconda della presenza od assenza di vitello, v'è la verifica che esiste proprio nel vitello un fattore indispensabile ai processi distruttivi tra le forme in esame (Urodelo su Anuro).

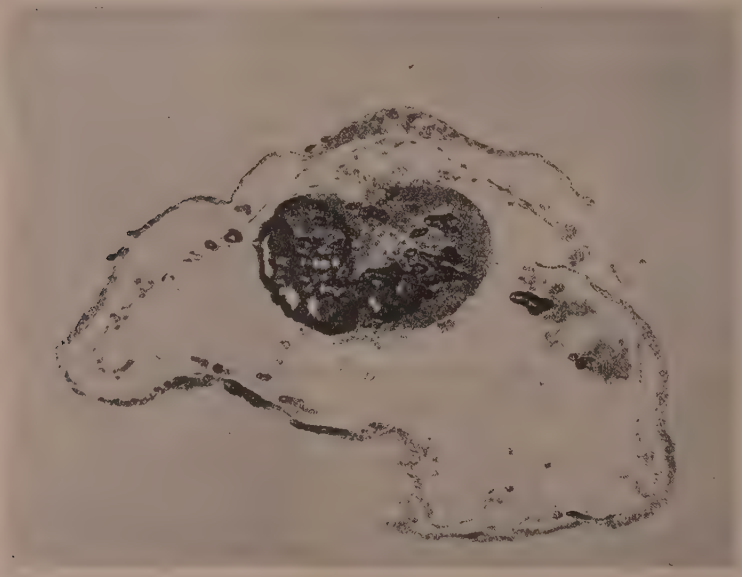
Vi sono dei casi in cui le condizioni che ci proponevamo si sono svolte con circostanze speciali, com'è risultato dall'esame istologico, e che meritano di essere considerate separatamente.

(1) Soluzione Ringer–Holtfreter:

NaCl	gr.	3,5
KCl	»	0,05
$CaCl_2$	»	0,1
Acqua distillata	»	100

Sterilizzata per ebullizione.

In due casi di espianti del primo tipo, cioè in presenza di vitello, la vescicola ottica (primaria) è venuta a trovarsi separata dal vitello mediante mesotelio che ha formato come una sacca intorno all'occhio; tra la parete della sacca e l'occhio v'è inoltre uno spazio vuoto più o meno ampio. Du-



Espianto proveniente dalla vescicola ottica primaria di *Triton taeniatus* su ectoderma e relativo mesenchima di embrione di *Rana esculenta*. Fissato 3 giorni dopo l'operazione (in luglio). Microfotografia: obb. 6 Koristka.

rante i 3 giorni (in luglio) che gli espianti sono stati tenuti in vita, l'abbozzo è resistito.

Questi ultimi risultati non sono in contraddizione nè con quelli precedenti già esposti, nè con i lavori finora da noi compiuti, perchè è stata sempre messa in risalto l'influenza che condizioni facilitanti la diffusione dei prodotti del metabolismo delle sostanze vitelline esercitano sulla rapidità dell'azione citolitica. Infatti quando le sostanze citolitiche di *Rana esculenta* sono ostacolate nel venire a contatto diretto con i tessuti embrionali degli Urodeli (vedere in proposito le relative ricerche di Perri), questi tessuti proseguono nel loro sviluppo. Negli espianti già per sè stessi si hanno condizioni che certamente non facilitano la rapida diffusione di tali sostanze, anche perchè il vitello può trovarsi ad una certa distanza della vescicola ottica, o comunque da essa separato, condizioni che si sono entrambe verificate nei due casi ora accennati.

Una verifica di tale veduta è data da un altro caso in cui solo una zona della vescicola ottica si trovava a contatto con un ammasso di vitello, mentre il resto ne era separato: è proprio nella zona di contatto che sono molto evidenti i processi distruttivi.

In conclusione, i risultati ottenuti ci fanno ritenere che queste esperienze di espianto – di abbozzo di vescicola ottica di *Triton* su tessuti embrionali di *Rana esculenta* – confermano i risultati già raggiunti da Cotronei ed allievi, sull'influenza del vitello di alcuni Anuri per i processi distruttivi embrionali di abbozzi di Urodelo.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio O. M. Corbino nell'assumere, per incarico avutone dal R. Commissario, la presidenza delle sedute della Classe di Scienze fisiche, invia al Socio E. Marchiafava, che ha chiesto d'essere esonerato da quell'ufficio per la sua grave età, un caldo saluto cui si associa tutta l'Assemblea.

Rileva quindi che l'Accademia inizia la sua attività accademica proprio nel giorno commemorativo della Vittoria e propone che si inviino telegrammi augurali a S. M. il Re e al Duce.

L'Assemblea approva per acclamazione.

Annuncia infine la morte del Socio Alessandro Martelli, e del Socio straniero Santiago Ramon y Cajal e rievoca l'attività scientifica, politica e industriale del compianto Socio A. Martelli, che dette così grande incremento alle indagini scientifiche sui petroli, e i grandi meriti scientifici dell'illustre biologo spagnuolo che ebbe l'onore di dividere col nostro Golgi il premio Nobel per la medicina.

PRESENTAZIONE DI PLICHI SUGGELLATI

Vengono presentati all'Accademia due plichi suggellati del sig. Guido Cremonese e del sig. Gastone Frediani perchè vengano conservati negli archivi dell'Accademia.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'Accademico Segretario Parravano presenta i libri giunti in dono all'Accademia segnalando opuscoli e volumi inviati dai Soci Guidi, Ginori-Conti, Le Chatelier, Quagliariello; gli scritti in occasione delle feste celebrative per Pacinotti; altri quattro volumi della Spedizione De Filippi, a cura dei Soci Dainelli e Gortani; un volume sui « Progressi dell'agricoltura italiana sotto il regime fascista ».

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci Crocco, Parravano, Petri, Severi.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 4 novembre 1934

Battaglia Mario. — «Eumices tubercolosis» ed il suo vaccino selezionato e stabilizzato. (Estr. dal «Morgagni». N. 21, 1934). Milano. 1934. 8°, pp. 1-9.

Becchini G. — Vedi Quagliariello G.

Belling W. M. — Vedi Mathews A. P.

Bellio G. — Le tavole dosimetriche nella fumigazione cianidrica degli agrumi. (Estr. dagli «Annali del R. Istituto Superiore Agrario di Portici». Serie III, Vol. VI, pp. 154-252). Spoleto, 1934. 8°.

Bogitch B. — Vedi Le Chatelier H.

Bottazzi F. — Vedi Quagliariello G.

Boudonard O. — Vedi Le Chathelier H.

Broniewski W. — Vedi Le Chatelier H.

Célébration du Cinquantenaire de la Société Française des Electriciciens constituée le 15 novembre 1883. 1883-1933. Paris, 1933. 8°, pp. 1-157.

Chiarugi Alberto. — La cariologia nelle sue applicazioni a problemi di botanica. (Estr. dagli «Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze» XXI. Riunione, Roma, ottobre 1932. Vol. III). Pavia, 1933. 8°, pp. 1-38.

Chiarugi Alberto. — Una talliofita arborea silicizzata del Deserto Libico: «Nematophyton saharianum n. sp.». (Estr. dall'opera «Missione della R. Accademia d'Italia a Cufra»). Roma. 1934. 8°, pp. 1-29, tav. XXVII-XXIX.

Colonnetti G. — Vedi Guidi C.

Comptes Rendus du septième Congrès des Mathématiciens Scandinaves tenu a Oslo 19-22 août 1929. Oslo, 1930. 8°, pp. I-XIX, 1-197.

Craifaleanu A. — Vedi Quagliariello G.

D'Agostino E. — Vedi Quagliariello G.

Dainelli Giotto. — La esplorazione della regione fra l'Himàlaja Occidentale e il Caracorûm (Spedizione Italiana De Filippi nell'Himàlaja, Caracorûm e Turchestàn Cinese (1913-1914). Serie II, vol. I). Bologna, Editore Nicola Zanichelli, 1934. 4°, pp. I-XI, 1-428, tavole XXIV-XLVI.

Dainelli Giotto. — La serie dei terreni. (Spedizione Italiana De Filippi nell'Himàlaja, Caracorûm e Turchestàn Cinese (1913-1914). Serie II, vol. II, parte I, II. Bologna. Editore Nicola Zanichelli, 1933. 4°, pp. I-VII, 1-458, 459-1099, t. I-XXXIX.

De Lucia P. — Vedi Quagliariello G.

Dupuy E. L. — Vedi Le Chatelier H.

Ente Autonomo per l'Acquedotto Pugliese. Relazione al Parlamento sull'andamento dell'azienda dal 1° luglio 1932-X al 30 giugno 1933-XI. Bari, 1934. 8°, pp. 1-145.

Fantoli Gaudenzio. — La data del 15 aprile 1919 nella rievocazione del 15 aprile anno XII. Per i Littoriali dell'anno XII. Milano, 1934. 8°, pp. 1-19.

Forjaz Pereira. — Influência das ondas electromagnéticas na marcha das reacções quimica. Comunição apresentada ao IX Congresso Internacional de Quimica pura e aplicada reünido em Madrid, de 5 a 11 de abril de 1934. Lisboa, 1934. 4°, pp. 1-5.

Gigli Duilio. — In memoria del Professor D. Gigli. Necrologio. Pisa, 1934. 8°, pp. 1-38.

Ginori Conti Piero. — Il nuovo Istituto del Boro-Silicio di Firenze. Firenze, 1934. 4° pp. 1-15.

Ginori Conti Piero. — Il vetro di ottica. Discorso tenuto alla 1ª Riunione dell'Associazione ottica italiana. (Estr. dall'«Annuario dell'A. O. I. 1934». Atti della 1ª Riunione dell'Associazione). Firenze, 1934. 8°, pp. 1-12.

Gortani M. e Merla G. — Fossili del Pa-

leozoico. (Spedizione Italiana De Filippi nell'Himàlaja, Carocorúm e Turchèstan Cinese (1913-1914). Serie II, vol. V). Bologna, Editore Nicola Zanichelli, 1934. 4°, pp. 1-323, to. I-XXVII.

Guidi Camillo. — Sulla determinazione grafica delle forze interne nelle travi omogenee e nelle travi reticolari appoggiate agli estremi e soggette ad un sopraccarico mobile. (Estr. dalle « Memorie della R. Accademia dei Lincei ». Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. V, 1879). Roma, 1880. 4°, pp. 1-28.

Guidi Camillo. — Delle travi reticolari paraboliche e parallele. (Estr. dal « Giornale del Genio Civile ». Anno 1881). Roma, 1881. 8°, pp. 1-27.

Guidi Camillo. — Sul calcolo delle travi armate. (Estr. dal « Giornale del Genio Civile ». Anno 1881). Roma, 1881. 8°, pp. 1-25.

Guidi Camillo. — Sulla determinazione grafica dello sforzo di taglio e del momento flettente nelle travi sollecitate da carichi fissi e mobili. (Estr. dal « Giornale del Genio Civile ». Anno 1883). Roma, 1883). 8° pp. 1-26.

Guidi Camillo. — Calcoli di stabilità delle scale matalliche aeree Viarengo. Torino, 1928. 8°, pp. 1-30.

Guidi Camillo. — L'arco elastico senza cerniere Recensione di Panetti M. (Estr. da « L'Ingegneria civile e le arti industriali ». Vol. XXIII). Torino, 1903 8°, pp. 1-7.

Guidi Camillo. — Giacinto Berruti. Commemorazione letta alle Classi unite della R. Accademia delle Scienze di Torino, 22 maggio 1904. (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ». Vol. XXXIX). Torino, 1904. 8°, pp. 1-11.

Guidi Camillo. — Sull'attendibilità di certi calcoli statici. (Estr. dal « Giornale del Genio Civile ». Anno 1913). Roma, 1913. 8°, pp. 1-8.

Guidi Camillo e Gustavo Colonnetti. — Notizia su alcune esperienze istituite sopra una travata continua in cemento armato. (Estr. dal « Giornale del Genio Civile ». Anno 1914). Roma, 1914. 8°, pp. 1-12.

Guidi Camillo. — Sulla trave continua solidale coi piedritti. (Estr. dal « Giornale del Genio Civile ». Anno 1916). Roma, 1916. 8°, pp. 1-13.

Guidi Camillo. — Sul calcolo delle dighe a volta. (Estr. dalla Rivista « l'Industria ». Vol. XXXIV). Varese, 1920. 8°, pp. 1-8.

Guidi Camillo. — Sulle dighe a gravità. (Estr. dagli « Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino ». Volume LVI, pp. 41-46). Torino, 1921. 8°.

Guidi Camillo. — Appendice alla statica delle dighe per laghi artificiali. Torino, s. d. 8°, pp. 1-7.

Guidi Camillo. — Sulla statica delle dighe di sbarramento per laghi artificiali (Estr. dagli « Annali del Consiglio superiore delle Acque ». Vol. IV, 1922. Roma, 1923. 8°, pp. 1-6.

Guidi Camillo. — Una questione di priorità. (Estr. dagli « Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino ». Volume LXI, pp. 21-22). Torino, 1925. 8°.

Guidi Camillo. — Associazione italiana per gli studi sui materiali da costruzione (S. I. M.). (Estr. da « L'Ingegnere ». Vol. IV). Roma, 1930. 4°, pp. 1-5.

Guidi Camillo. — Circa il nuovo ponte sul Tevere a monte di Ponte Milvio. (Estr. da « L'Ingegnere ». Vol. V). Roma, 1931. 4°, pp. 1-6.

Guidi Camillo. — La sorveglianza sulle costruzioni in beton armato. (Estr. dalla Rivista « L'Ingegnere ». Vol. VI). Roma, 1932. 8°, pp. 1-5.

Guidi Camilli. — L'audacia di certe moderne costruzioni. (Estr. dalla Rivista « L'Ingegnere ». Vol. VII). Roma, 1933. 4°.

Hida Tetsutara. — Ueber die Stärkebildung von Schimmelpilzen. (Separate print « The Journal of the Shanghai Science Institute ». Section IV, vol. I, pp. 85-116). Sanghai, 1934. 8°.

Istituto di Patologia medica della R. Università di Milano. Padiglione « Bruno Granelli ». Milano, 1934. 8°, pp. 1-109.

Jannone Giuseppe. — Osservazioni ecologiche e biologiche sul « Dociostaurus Ma-

roccanus Thunb.», «Calliptamus Italicus L.» e loro parassiti in provincia di Napoli. (Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria» del R. Istituto superiore agrario di Portici. Vol. XXVIII, pp. 75-151). Spoleto, 1934. 8°.

Knox-Shaw H. and Scott Barretti H. G. — The Radcliffe Catalogue of proper Motions in the selected Areas i. to. 115. Oxford, 1934. 4°, pp. I-XLVIII, 1-351.

Le Chatelier Henry. — Introduction a l'étude de la métallurgie. Le chauffage industriel. Édition III. Paris, Éditeur Dunod, 1925. 8°, pp. 1-555.

Le Chatelier Henry. — La silice et les silicates. Paris. Editeurs A. Hermann et Fils, 1914. 8°, pp. 1-574.

Le Chatelier Henry. — Leçons sur le carbone, la combustion, les lois chimiques. Edition II. Paris, Librairie Scientifique J. Hermann, 1926. 8°, pp. I-XIV, 1-456.

Le Chatelier Henry. — Recherches expérimentales sur la costitution des mortiers hydrauliques., Paris. Éditeurs Vve Ch. Dunod, 1904. 8° pp. I-IV, 1-196.

Le Chatelier Henry. — Rationalisation et chomage. Paris, s. d. 8°, pp. 1-47.

Le Chatelier Henry. — Les alliages par superposition. (Extr. de la «Association Internationale pour l'essai des Matériaux». VIe Congres. New Jork 1912), s. l. 1912. 8°, pp. 1-8.

Le Chatelier Henry. — On the theory of heat. (Reprinted from the «Transactions of the American Society for Steel Treating», pp. 555-602).

Le Chatelier Henry. — Biography. (Reprinted from «The Metallographist» for October 1901). Boston, 1901. 8°, pp. 1-8.

Le Chatelier Henry. — Osservation préliminaires au suyet de la décomposition des ciments a la mer. (Extr. des «Annales des Mines» 1904. Paris, 1904. 8°, pp. 1-82.

Le Chatelier Henry. — La loi des tensions fixes de dissociation. (Sonderdruck aus «Zeitschrift für physikalische Chemie». LXIX, pp. 90-95). Leipzig, 1909. 8°.

Le Chatelier Henry. — Floris Osmond (1849-1912). (Extr. de la «Revue Générale des Sciences». N. du 30 septembre 1912). Paris, 1912. 8°, pp. 1-16.

Le Chatelier Henry. — Frédéric Winslow Taylor (1856-1915). (Extr. de la «Revue Générale des Sciences». N. du 30 juin 1915). Paris, 1915. 8°, pp. 1-19.

Le Chatelier Henry and Bogitch B. — The Manufacture of Silica Brick. (Reprinted from the «Transactions of the American Institute of Mining Engineers», 1818, pp. 1435-1462), s. d. t. 8°.

Le Chatelier Henry. — Du rôle de la Science dans l'Industrie. (Extr. de «La Technique Moderne». Tome X). Paris, 1918. 8°.

Le Chatelier Henry. — Les laboratoires de recherche scientifique dans l'industrie. (Extrait de la «Revue Universelle des Mines». Tome V, pp. 355-384). Liège, 1920. 8°.

Le Chatelier Henry. — Cinquantenaire scientifique de Henry Le Chatelier. Paris 1922. 8°, pp. 1-85.

Le Chatelier Henry. — La rèforme de l'enseignement secondaire. Culture classique et travail manuel. Paris, 1923. 8°. pp. 1-63.

Le Chatelier Henry. — L'enseignement à l'Ecole Polytechnique. Discours. (Extr. du N. 9 de «X Information» du 25 février 1924). Paris, 1924. 16°, pp. 1-22.

Le Chatelier Henry. — La Philosophie du Taylorisme. Discours prononcé a l'ouverture du Congrès de l'«Organisation Française» le 26 juin 1924). Paris, 1924. 16°, pp. 1-16.

Le Chatelier Henry. — L'enseignement de l'organisation. Discours. (Extr. du n. 6 de «X Information» du 25 novembre 1925). Paris, 1925. 16°, pp. 1-24.

Le Chatelier Henry. — La formation des élites. Conference. (Extr. des n. 8 (25 janvier 1928) et 9 (25 fevrier 1928) de «X Information»). Paris, 1928. 16°. pp. 1-23.

Le Chatelier Henry. — Le Taylorisme. Paris. Éditeur Dunad. 1928. 8°, pp. 1-152.

Le Chatelier Henry. — Le rôle du bon sens dans l'organisation du travail. (Extr. de la «Revue Economique Internatio-

nale ». Juin 1928). Bruxelles, 1928. 8°, pp. 1–24.

Le Chatelier Henry. — Hvorledes Fremragende Maend Uddannes. Kobenhavn, 1929. 16°, pp. 1-24.

Le Chatelier Henry. — La nouvelle orientation de l'industrie américaine doit être pour nous un enseignement. (Extr. du n. 2 (25 juillet 1929) de « X Information »). Paris, 1929. 16°, pp. 1-10.

Le Chatelier Henry. — La science et l'industrie. (Extr. du « N. du Cinquantenaire du Génie Civil », novembre 1930). Paris, 8°, pp. 1-14.

Le Chatelier Henry. — La 3me qualité du chef: la science. Conference. (Extr. du n. 10 (25 mars 1930) de « X Information ». Paris, 1930. 16°, pp. 1-16.

Le Chatelier Henry. — L'economie politique et la science, s. l. 1930. 8°, pp. 1–12.

Le Chatelier Henry. — The scientific Career of Henry Louis Le Chatelier. (Reprinted from « Journal of Chemical Education». Vol. VIII, 1931, pp. 441–461), s. d. t. 8°.

Le Chatelier Henry. — Science et Industrie. Paris, Editeur Ernest Flammarion, 1932. 8°, pp. 1-279.

Le Chatelier Henry. — Extintion et silotage des chaux et ciments. (Societé d'Encouragement pour l'industrie nationale). Paris, s. d. 4°, pp. 1-11.

Le Chatelier Henry. — Sur une énoncé géneral des lois équilibres chimiques. Paris, s. d. 4°, pp. 1-3.

Le Chatelier Henry. — Sur ler barates métalliques. Paris, s. d. 4°, pp. 1-4.

Le Chatelier Henry. — Sur la fusion du carbonate de chaux. Paris, s. d. 4°, pp. 1-4.

Le Chatelier Henry. — Sur l'emploi du chlorate de potasse dans les explosifs au nitrate d'ammoniaque. Paris, s. d. 4°, pp. 1–3.

Le Chatelier Henry. — Sur la fusibilité des mélanges isomorphes de quelques carbonates doubles. Paris, s. d. 4°, pp. 1-4.

Le Chatelier Henry. — Sur la fusibilité des mélanges salins isomorphes. Paris, s. d. 4°, pp. 1-4.

Le Chatelier Henry. — Sur la loi générale de solubilité des corps normaux. Paris, s. d. 4°, pp. 1–4.

Le Chatelier Henry. — Sur la solubilité mutuelle des sels. Paris, s. d. 4°, pp. 1-4.

Le Chatelier Henry. — Sur la fusibilité des mélanges de sels. Paris, s. d. 4°, pp. 1-4.

Le Chatelier Henry. — Sur quelques cas anormaux de solubilité. Paris, s. d. 4°, pp. 1–4.

Le Chatelier Henry. — Sur quelques cas anormaux. Paris, s. d. 4°, pp. 1–4.

Le Chatelier Henry et Boudouard O. — Sur les limites d'inflammabilité des vapeurs combustibles. Paris, s. d. 4°, pp. 1–3.

Le Chatelier Henry. — Application de la loi des phases aux alliages et aux roches. Paris, s. d. 4°, pp. 1-3.

Le Chatelier Henry et Wologdine. — Sur la densité du graphite. (Extrait des « Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences ». Tome CXLVI). Paris, 1908. 4°, pp. 1–5.

Le Chatelier Henry. — La science pure orientée vers les applications et la science industrielle. (Extr. de la « Revue de Métallurgie »). Angers, s. d. 4°, pp. 1–23.

Le Chatelier Henry. — De la discontinuité dans les essais de fragilité. Paris, s. d. 4°, pp. 1-10.

Le Chatelier Henry. — Le ciment alumineux. Paris, s. d. f. 4°.

Le Chatelier Henry. — Sur la propagation des ondes condensées dans les gaz chauds. Paris, 1900. 4°, pp. 1–4.

Le Chatelier Henry. — Le controle scientifique de la marche des fours industriels. Conference faite devant les eleves des Ecoles speciales de l'Université de Liege. (Extr. de la « Revue de Métallurgie ». Vol. III, pp. 235–252), s. l. 1906. 4°.

Le Chatelier Henry. — Sir William Siemens souvenirs personnels et correspondances. (Extr. de la « Revue de Métallurgie ». Vol. IV, pp. 212–231), s. l., 1907. 4°.

Le Chatelier Henry. — L'industrie des ciments et des chaux hydrauliques devant les consommateurs. (Extr. de la « Revue de Métallurgie ». Vol. IV, pp. 965-977), s. l. 1907. 4°.

Le Chatelier Henry. — Sur l'essai des

métaux par amortissement des mouvements vibratoires. (Extr. de la « Revue de Métallurgie ». Vol. VI, pp. 887-889), s. l. 1909. 4°.

Le Chatelier Henry. — Quelques réflexions sur l'essai des matériaux. (Extr. de la « Revue de Métallurgie ». Vol. VI, pp. 1218-1220), s. l. 1909. 4°.

Le Chatelier Henry et Walogdine S. — Sur les phosphures de fer (Extr. des « Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences ». Tome 149). Paris, 1909. 4°, pp. 1-6.

Le Chatelier Henry. — De l'origine de l'hydrogène dans le gaz de hauts-fourneaux. (Extr. de la « Revue de Métallurgie ». Vol. VII, pp. 845-847), s. l. 1910. 4°.

Le Chatelier Henry. — Pour la science. (Extr. du volume publié en souvenir de Louis Olivier). Paris, 1911. 4°, pp. 1-11.

Le Chatelier Henry. — La science pure orientée vers les applications et la science industrielle. La reduction de l'oxyde de fer et les gazogènes. (Extr. de la « Revue de Métallurgie ». Vol. IX, pp. 1-23), s. l. 1912. 4°.

Le Chatelier Henry. — De la Science, sa nature, son utilité et son enseignement. (Extr. de la « Revue Scientifique (Revue Rose) », 1912, n. 15, pp. 450-458). Paris, 1912. 8°.

Le Chatelier Henry et Broniéwski Witolo. Sur un enregistreur photographique. (Extr. de la « Revue de Métallurgie ». Vol. IX), s. l. 1912. 4°, pp. 1-12.

Le Chatelier Henry. — Le système Taylor (Extr. du « Bulletin de la Société d'Encouragement pour l'Industrie nationale ». 1914). Paris, 1914. 4°, pp. 1-32.

Le Chatelier Henry. — Ce qu'on peut attendre des inventeurs. (Extr. de « La Guerre Scientifique ». Ier année, n. 8. 1915). Paris.

Le Chatelier Henry. — Le principe d'organisation. (In « La Nature » 4 dicembre 1915, pp. 359-362). Paris, 1915. 4°.

Le Chatelier Henry. — La métallographie microscopique. Conference. (Extr. de la « Revue de Métallurgie ». 1915). Paris, 1915. 4°, pp. 1-36.

Le Chatelier Henry et Lemoine Jules. — Sur l'hétérogéneité des aciers. (Extr. des « Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences ». Tome 161). Paris, 1915. 4°, pp. 1-6.

Le Chatelier Henry. — La Science dans ses rapports avec le devoloppement économique du pays. (Extr. des « Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences ». Tome 162). Paris, 1916. 4°, pp. 1-4.

Le Chatelier Henry. — Rapport de la Commission d'action extérieure de l'Académie sur les Laboratoires nationaux de Recherches Scientifiques, presenté dans les Séances de 13 et 27 novembre 1916. (Extr. de « Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences ». T. 163). Paris, 1916. 4°, pp. 1-8.

Le Chatelier Henry et Bogitch B. — La décapage au bisulfate de soude. (Extr. de la « Revue de Métallurgie ». Vol. XII, 949-960). Angers, 1915. 4°.

Chatelier Henry. — La mesure des températures élevées. S. l. e d. pp. 19-24.

Le Chatelier Henry. — Quelques problèmes scientifiques à resoudre. (Extr. des séances de l'Académie des Sciences ». Tome 164). Paris, 1917. 4°, pp. 1-6.

Le Chatelier Henry. — Les briques de silice. I. partie: Cristobalite et tridymite. (Extr. de la « Revue de Métallurgie ». Vol. XV). Paris, 1917. 4°, pp. 1-11.

Le Chatelier Henry et Bogitch B. — De l'action de l'oxide de fer sur la silice. (Extr. des « Comptes rendus des seances de l'Académie des Sciences ». T. 166). Paris, 1918. 4°, pp. 1-6.

Le Chatelier Henry et Bogitch B. — Sur l'hétérogéneité de l'acier. (Extr. des « Comptes rendus de séances de l'Académie des Sciences », T. 167). Paris, 1918. 4°, pp. 1-5.

Le Chatelier Henry et Dupuy E. L. — Sur l'hétérogéneité des aciers. (Extr. de la « Revue de Metallurgie ». Vol. XVII). Angers, 1918. 4°, pp. 1-5.

Le Chatelier Henry et Bogitch B. — Essai de corrosion (Extr. de la « Revue de Métallurgie ». Vol. XVI). Paris, 1919, 4°, pp. 1-10.

Le Chatelier Henry. — Retour aux études techniques. Programme de Physique. Programmes de Mathématiques, Mécanique rationelle, Resistence des Matériaux, Thermodynamique. (Extr. du « Bulletin de la Société d'Encouragement pour l'Industrie Nationale ». Mai-juin 1918). Paris, 1918. 4°, pp. 1-36.

Le Chatelier Henry et Bogitch B. — Sur l'emploi de la bille Brinell pour l'essai des matériaux de construction. (Extr. des « Comptes rendus des sénaces de l'Académie des Sciences ». T. 166). Paris, 1918. 4°, pp. 1-4.

Le Chatelier Henry et Bogitch. — Propriétés réfractaires des produits alumineux. (Extr. des « Comptes rendus de l'Académie des Sciences ». T. 169). Paris, 1919, 4° pp. 1-6.

Le Chatelier Henry. — Sur les propriétés mécaniques des corps plastiques. Importance de la réactivité. (Extr. des « Comptes rendus de l'Académie des Sciences ». T. 171). Paris, 1920. 4°, pp. 1-4.

Le Chatelier Henry. — La méthode scientifique et son application a la chimie analitique. (Extr. de « Chimie et Industrie ». Vol. VI). Paris, 1921. 4°, pp. 1-7.

Le Chatelier Henry. — La loi des phases, son application aux doubles décompositions salines. Représentation géométrique. Angers, 1921. 4°, pp. 1-10.

Le Chatelier Henry. — Fondation Henry Le Chatelier. Rapport sur les subventions attribuées en 1922. (Extr. de la « Revue de Métallurgie », pp. 67-69). s. d. t. 4°.

Le Chatelier Henry. — Sur la fabrication de la soude à l'ammoniaque. (Extr. des « Comptes rendus des séances de l'Acadédémie des Sciences ». T. 174). Paris, 1922. 8°, pp. 1-8.

Le Chatelier Henry. — Sur la viscosité du verre. (Extr. des « Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences ». T. 179). Paris, 1924. 4°, pp. 1-5.

Le Chatelier Henry. — Sur l'allotropie du verre. (Extr. des « Comptes rendus des séances de l'Académie des Science ». T. 179). Paris, 1924. 4° pp. 1-4.

Le Chatelier Henry et Duhameaux André. — Le ciment alumineux. (Extr. des « Comptes Rendus du Septième Congrès de Chimie Industrielle »). Paris. 1928. 8°, pp. 1-7.

Le Chatelier Henry. — Funérailles de Charles Moureu membre de la Section de chimie de l'Académie des sciences a Biarritz le lundi 17 juin 1929. Discours de H. Le Chatelier. S. l. 1929. 4°, pp. 1-5.

Le Chatelier Henry. — Histoire de la découverte et du développement des applications de l'essai au choc sur barreaux entaillés pour déceler la fragilité de l'acier. Memoire. (Extr. de la « Revue de Métallurgie ». XXVIII année. 1931, pp. 245-253). Paris, 1931. 4°.

Le Chatelier Henry. — Un demi-siécle de recherches sur les métaux et alliages l'Exposition des Zabaratuires de Recherches Scientifiques au XIII[e] Salon de l'Aéronautique (18 novembre-4 décembre 1932). Mémoire. (Extr. de la « Revue de Métallurgie ». XXX[e] année. 1933, pp. 121-141). Paris, 1933. 4°.

Le Chatelier Henry. — Sur la loi du déplacement de l'equilibre chimique. (Extr. des « Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences ». T. 196). Paris, 1933. 4°, pp. 1-4.

Le Chatelier Henry. — L'esprit d'organisation. S. d. e l. 1933, 4°, pp. 59-61.

Lemoine Jules. — Vedi Le Chatelier H.

Leone Salvatore. — Profilassi del tracoma e visiva nelle provincie di Catania, Enna, Messinà, Ragusa, Siracusa, Catanzaro, Reggio Calabria. 1933-1934. Siracusa, 1934, 4°, pp. 1-25, 1-13, 1-19, 1-13, 1-15, 1-21.

Mathews A. P. — An easy method for the distinction and estimation of lactose and glucose in urine. (Reprinted from the « Journal American Medical Association ». Vol. 75). Chicago. 8°, pp. 1-4.

Mathews A. P. and Billing W. M. — Does tissue fibrinogen shorten the clotting time of blood when taken internally? (Reprinted from the « Medical Journal and Record ». for June 17, 1923). New-York, 1923. 8°, pp. 1-8.

MATHEWS A. P. — Twenty years of growth and development of biochemistry. (Reprinted from the «Proceedings, Congress on Medical Education. Licensure, Public Health and Hospitals. Chicago. March, 9-12-1925). Chicago, 1925. 8°, pp. 1-8.

MATHEWS A. P. — Zusammensetzung des Knorpels eines wirbellosen Tieres, Limulus. (Sonderabdruck aus «Hoppe-Seyler's Zeitschrift für physiologische Chemie». Band 130 (1923), pp. 169-175), s. l. 1923. 8°.

MATHEWS A. P. — Gravitation space-time and matter. Cincimati, Oslo, 1834. 8° pp. 1-102.

MATHEWS A. P. — The mechanistic conception of life. (Extrait de «Scientia» octobre 1924, pp. 243-252) s. l. 1924. 8°.

MATHEWS A. P. — Adsorption. (Reprinted from the «Journal of the American Leather Chemists Association». December 1924, pp. 701-713), s. l. 1924. 8°.

MATHEWS A. P. and MILLS C. A. — Les deux mécanismes physiologiques de la coagulation du sang. (Extr. des «Archives Internationales de Physiologie». Vol. XXIV, pp. 73-103). Liège, 1924. 8°.

MATHEWS A. P. — The value of research. S. l. 1915. 8°, pp. 1-24.

MATHEWS A. P. — Relation entre l'attraction de cohésion et l'attraction de gravitation des molécules. (Extr. des «Journal de Chimie Physique Electrochimie, Thermochimie, Radiochimie, Mécanique chimique, Stocchiométrie» Tome XII, pp. 428-431). Paris, 1914. 8°.

MATHEWS A. P. — The relations of molecular cohesion to surface tension and gravitation: with a method of determining 'a' of van der Waals' equations withaut assumptions; and the explanation of the meaning of the constants in the surfage tension law of Cötvös, and the latent heat formulas of Dicterici and Mills. (Reprinted from the «Journal of Physical Chemistry». Vol. XX, pp. 554-595). Chicago, 1916. 8°.

MATHEWS A. P. — Some general aspects of the chemistry of cells. (Reprinted from the «General Catalogy», pp. 15-95). Chicago, 1924. 8°.

MATHEWS A. P. — The nature of disease and of its natural therapy. (Reprinted from the «Cincinnati Journal of Medicine». Novembre 1922). S. l. 1922. 8°, pp. 1-10.

MATHEWS A. P. — The reduction of all physical dimensions to those of space and time. (Reprinted from the «Journal of the Washington Academy of Sciences». Vol. XIII, pp. 195-210). Washington, 1923. 8°.

MATHEWS A. P. — Oxidation. (Reprinted from the «Physical Therapeutics». Vol. XLV, pp. 463-471). S. l. 1927. 8°.

MATHEWS A. P. — Professor Albrecht Kossel. (Reprintend from «Science». Vol. LXVI, page 293). S. l. 1927. 8°.

MATHEWS A. P. — Gravitation considered as neutral magnetism due to motion of al matter. (Reprinted from the «Journal of Physical Chemistry». Volume XXXVI, pp. 1738-1745). s. l. 1932. 8°.

MATHEWS A. P. — The anti-coagulant action of the venom ofthe rattle snake, Crotalus adamanteus. (Reprinted from the «Laboratory of Biochemistry, University of Cincinnati», pp. 145-152). S. d. t. 8°.

MATHEWS A. P. — Some applications of physical chemistry to medicine. (Reprinted from «Science». Vol. LXVI, n. 1721, pages 603-610) S. l. 1927. 8°.

MATHEWS A. P. — The true value of 'a' of Van der Waals' equation and the nature of cohesion. (Verhandlingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Deel XII, n. 4). Amsterdam, 1917. 8°, pp. 1-77.

MATHEWS A. P. — The nature of electricity and gravitation. (Preliminary Statement). (Medical Bulletin University of Cincinnati). Vol. 3, n. 1, 1924. Cincinnati. 8°, pp. 1-5.

MATHEWS A. P. — The beginning of things. (Medical Bulletin University of Cincinnati). Vol. 3, n. 1, 1924. Cincinnati 8° pp. 9-14.

MATHEWS A. P. — The Staff of the Biochemical Laboratory the University of

Chicago. (Biochemical Research 1912-1913). Chicago, 1914. 8°.

Mathews A. P. — The Nature of Matter, Gravitation and Light. New Jork, William Wood and Company, 1927. 8°, pp. I-XI, 1-222.

Medina F. — Vedi Quagliariello G.

Merla G. e Gortani M. — Fossili del Paleozoico. (Spedizione Italiana De Filippi nell'Himalaia, Caracorum e Turchéstan Cinese. (1913-1914). Serie II, Vol. V). Bologna. Editore Nicola Zanichelli 1934. 4°, pp. 1-323, to. I-XXVII.

Mills C. A. — Vedi Mathew A. P.

Ministero dell'Agricoltura e delle Foreste. — I progressi dell'agricoltura italiana in Regime Fascista. Note illustrative presentate al XVI Congresso internazionale di agricoltura di Budapest, 1934-XII. Spoleto, 1934. 8°, pagine 1-377.

Monterosso B. — L'anabiosi nei Cirripedi e il problema della vita latente (ipobiosi). (Estr. dall'« Archivio Zoologico Italiano ». Vol. XIX, pp. 17-379). Cagliari, 1933. 8°.

Nicolosi Roncati F. — Vedi Quagliariello G.

Pacinotti Antonio. — Onoranze Nazionali ad A. Pacinotti. La vita e l'opera. Vol. I-II. Pisa, Editori V. Lischi e figli, 1934. 8° pp. I-XXV, 1-660, 668-1127.

Pendse C. G. — Note on the stability of Saturn's rings. (From the « Philosophical Magazine ». Ser. 7, vol. XVI, pp. 575-580). Cambridge, 1933. 8°.

Picone Mauro. — Formole risolutive e condizioni di compatibilità per alcuni problemi di propagazione. (Estr. dalle « Memorie della R. Accademia d'Italia, Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali ». Vol. V, pp. 715-749). Roma, 1934. 8°.

Quagliariello G. — Influenza dell'alimentazione sulla riproduzione e sui caratteri della prole. Comunicazione. (Estr. dagli « Atti del II Congresso Italiano di Genetica ed Eugenica ». Roma, 30 settembre-2 ottobre 1929). Roma, 1932. 8°, pp. 1-26.

Quagliariello G. e De Lucia P. — Nuove ricerche sulla esistenza del neoglucoso. (Estr. dall'« Archivio di Farmacologia sperimentale e scienze affini ». Volume XVIII). Roma, 1929. 8°, pp. 1-24.

Quagliariello G. e Scoz G. — Sull'azione lipotica del tessuto adiposo. (Estr. dal « Bollettino della Società Italiana di Biologia sperimentale ». Vol. V). Milano, 1930. 8° pp. 1-2.

Quagliariello G. — Componenti inorganici degli alimenti e loro funzione. (Estr. da « L'Alimentazione », 1930, n. 9), s. l. 1930. 8°, pp. 1-8.

Quagliariello G. — Considerazioni e ricerche sullo « zucchero proteico » del sangue. (Estr. dall'« Archivio di Scienze Biologiche ». Vol. XI, pp. 106-143). Napoli, 1928. 8°.

Quagliariello G. — Recherches chimiques et physico-chimiques sur les muscles et sur le suc musculaire. (Extr. des « Archives Internationales de Physiologie ». Vol. XVI, pp. 228-238). Paris, 1921. 8°.

Quagliariello G. — Ricerche chimiche e chimico-fisiche sull'emocianina. Nota I. L'indice di refrazione dell'emocianina. (Estr. dall'« Archivio di Scienze Biologiche ». Vol. I, pp. 246-258), s. l. 1920. 8°.

Quagliariello G. — Influenza degli acidi e degli alcali su alcune proprietà chimico-fisiche dell'emoglobina. (Estr. dall'« Archivio di Scienze Biologiche ». Vol. II, pp. 423-472). Napoli, 1921. 8°.

Quagliariello G. — Sullo spettro d'assorbimento della metemoglobina, e su una pretesa trasformazione della metemoglobina in ossiemoglobina per azione degli alcali. (Estr. dall'« Archivio di Scienze Biologiche ». Vol. III, pp. 65-86). Napoli, 1922. 8°.

Quagliariello G. — La riduzione della metemoglobina col solfuro di ammonio. (Estr. dall'« Archivio di Scienze Biologiche ». Vol. III). Napoli, 1922. 8°, pp. 1-5.

Quagliariello G. — Azione degli acidi e degli alcali sull'emoglobina. Risposta a una « Nota critica del Prof. M. Camis ». (Estr. dall'« Archivio di Scienze Biolo-

giche». Vol. III, pp. 436-449). Napoli, 1922. 8°.

Quagliariello G. — Imbibizione dei muscoli e teorie della contrazione muscolare. (Estr. dall'« Archivio di Scienze Biologiche». Vol. V. pp. 443-456). Napoli, 1924. 8°.

Quagliariello G. — L'azione dell'insulina. (Estr. dall'« Archivio di Scienze Biologiche». Vol. IX, pp. 459-480). Napoli, 1927. 8°.

Quagliariello G. e De Lucia P. — Combinazioni tra zuccheri e aminoacidi. (Estr. dall'« Archivio di Scienze Biologiche». Vol. XII, pp. 680-697). Napoli, 1928. 8°.

Quagliariello G. Proprietà chimiche e chimico-fisiche dei muscoli e dei succhi muscolari. Nota IV. Il succo dei muscoli striati bianchi e rossi. (Estr. dall'« Archivio di Fisiologia». Vol. XIII, pagine 73-81). Firenze, 1914. 8°.

Quagliariello G. — Effetti dell'iniezione endovenosa di succo muscolare. (Estr. dall'« Archivio di Fisiologia». Vol. XI, pp. 565-581). Firenze, 1913. 8°.

Quagliariello G. — Influenza delle iniezioni endovenose di acido cloridrico sulla respirazione. (Estr. dall'« Archivio di Fisiologia». Vol. IX, pp. 477-484). Firenze, 1911. 8°.

Quagliariello G. — Sulla preparazione degli osazoni. (Estr. dal « Bollettiuo della Società di Biologia Sperimentale». Volume I), s. l. 1926. 8°, pp. 1-3.

Quagliariello G. — Ricerche sull'importanza biologica e sul metabolismo delle sostanze proteiche. IV. Se le siero-proteine rappresentino il nutrimento azotato normale dei tessuti. (Estr. dall'« Archivio di Fisiologia». Vol. X, pp. 150-169). Firenze, 1912. 8°.

Quagliariello G. e D'Agostino C. — Sull'applicazione delle curve di forza neutralizzatrice alla determinazione della grandezza molecolare e delle costanti di dissociazione delle combinazioni chimiche in genere, e delle proteine in ispecie. (Sonderdruck aus der « Nernst-Festschrift». pp. 28-43, 1912). Halle, s. d. 8°.

Quagliariello G. — Über die Hydroxylionenkonzentratrion des Blutes bei der Temperaturerhölung nach dem Wärmestich. (Sonderabdruck aus « Biochemische Zeitschrift». Band. 44, pp. 162-164). Berlin, 1913. 8°.

Quagliariello G. — Die Änderung der Wasserstoffionenkonzentration während der Hotzekogulation der Proteine. (Sonderabdruck aus « Biochemische Zeitschrift». Band 44, pp. 157-161). Berlin, 1912. 8°.

Quagliariello G. — La réaction du sérum de sang de quelques mammifères étudieé avec la methode électrométrique. (Extr. des « Archives italiennes de Biologie», t. LVII), s. d., to. 8°, pp. 1-7.

Quagliariello G. e De Lucia P. — Prodotti di condensazione fra zuccheri e proteine. (Estr. dall'« Archivio di Scienze Biologiche». Vol. X, pp. 237-244). Napoli, 1927. 8°.

Quagliariello G. e D'Agostino E. — Sullo stato dell'acido carbonico nel sangue. III. Mobilità dello ione HCO, alla temperatura 37°-C. (Estr. dai « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei». Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. XXIV, 1° sem., pagine 772-773). Roma, 1915. 8°.

Quagliariello G. e D'Agostino E. — Sullo stato dell'acido carbonico nel sangue. Nota IV. Sulla dissociazione elettrolitica del bicarbonato di sodio. (Estr. dai «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei». Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. XXIV, 1° sem., pp. 858-862). Roma, 1915. 8°.

Quagliariello G. — Sullo zucchero proteico del sangue. (Estr. dagli « Annali di Chimica terapeutica». Anno V. Vol. IX). Roma, s. d. 8°, pp. 1-10.

Quagliariello G. — L'alimentazione dell'uomo dal punto di vista qualitativo. (Estr. dagli « Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze». XVI Riunione. Perugia, 30 ottobre-6 novembre 1927). Pavia, 1928. 8°, pp. 1-21.

Quagliariello G. — Influenza delle proteine della chiara d'uovo sulla tensione superficiale dell'acqua. (Estr. dai « Ren-

diconti della Reale Accademia dei Lincei ». Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. XXXI, 2° sem., pp. 120-126). Roma, 1922. 8°.

Quagliariello G. — Sulla composizione chimica della farina di miglio. (Panicum miliaceum L.). (Estr. dagli « Atti della R. Accademia dei Lincei » Comitato scientifico per l'alimentazione). Roma, 1921. 8°, pp. 1-19.

Quagliariello G. — Ricerche chimico-fisiche sulla lente cristallina. (Estr. dai « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ». Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. XVIII, 2° sem., pp. 288-294, 380-383). Roma, 1909. 8°.

Quagliariello G. — Ricerche chimico-fisiche sui liquidi animali. Nota IV. Sulla tecnica del metodo elettrometrico per lo studio della reazione dei liquidi dell'organismo. (Estr. dai « Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei ». Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. XX, 2° sem., pp. 107-111). Roma, 1911. 8°.

Quagliariello G. — Ricerche chimico-fisiche sui liquidi animali. Nota VI. Sulla reazione chimica della linfa. (Estr. dai « Rendiconti della R. Accademia Naz. dei Lincei ». Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. XX, 2° sem., pp. 273-279). Roma, 1911. 8°.

Quagliariello G. — Ricerche chimico-fisiche sui liquidi animali. Sulla reazione chimica dell'urina. (Estr. dai « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ». Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. XX, 2° sem., pp. 660-666). Roma, 1911. 8°.

Quagliariello G. — Proprietà chimiche e chimico-fisiche dei muscoli e dei succhi muscolari. Nota V. Sul contenuto in acqua, in azoto totale ed in azoto estrattivo dei muscoli striati bianchi e rossi. (Estr. dai « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ». Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. XXIII, 2ª ser., pp. 634-638). Roma, 1914. 8°.

Quagliariello G. e D'Agostino E. — Sullo stato dell'acido carbonico nel sangue. I. Metodo per dosare piccole quantità di acido carbonico. (Estr. dai « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ». Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. XXIII, 1° sem., pp. 844-850). Roma, 1914. 8°.

Quagliariello G. — Proprietà chimiche e chimico-fisiche dei muscoli e dei succhi muscolari. Nota VI. Sul contenuto in fosforo dei muscoli striati bianchi e rossi. (Estr. dai « Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei ». Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. XXIV, 1° sem., pp. 348-350). Roma, 1915. 8°.

Quagliariello G. e D'Agostino E. — Sullo stato dell'acido carbonico nel sangue. Nota IV. Sulla dissociazione elettrolitica del bicarbonato di sodio. (Estr. dai « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ». Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. XXIV, 1° sem., pp. 858-862). Roma, 1915. 8°.

Quagliariello G. e Becchini G. — Ricerche chimico-fisiche sui liquidi animali. Nota X. Variazioni dell'indice di rifrazione del siero di sangue durante la dialisi. (Estr. dai « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ». Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. XXV, 1° sem., pp. 354-433). Roma, 1916. 8°.

Quagliariello G. — Ricerche chimico-fisiche sui liquidi animali. Nota XI. Nuove ricerche sulla reazione chimica della bile. (Estr. dai « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ». Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. XXV, 1° sem., pp. 536-538). Roma, 1916. 8°.

Quagliariello G. e Ventura C. — Ricerche sulla velocità di scissione del lattosio per azione del « fermento bulgaro ». (Estr. dai « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ». Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. XXV, 1° sem., pp. 794-798). Roma, 1916. 8°.

Quagliariello G. e D'Agostino E. — Sullo stato dell'acido carbonico nel sangue. II. Mobilità dell'ione $HCO\ ^1/_3$ alla temperatura 18° C. (Estr. dai « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ». Classe di scienze fisiche, matematiche e natu-

rali. Vol. XXIV, 1° sem., pp. 638-645). Roma, 1915. 8°.

QUAGLIARIELLO G. e CRAIFALEANU A. — Ricerche sulla composizione chimica della mucosa intestinale. (Estr. dai «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei». Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. XXV, 1° sem , pp. 598-600). Roma, 1916. 8°.

QUAGLIARIELLO G. e DE LUCIA P. — Trasformazione stereoisomera del glucosio per azione dell'insulina e di tessuto muscolare. (Estr. dai «Rendiconti della R. Accademia Naz. dei Lincei». Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. VI, 2° sem., pp. 113-116). Roma, 1917. 8°.

QUAGLIARIELLO G. — Azione del freddo sui grassi del latte. (Estr. dai «Rendiconti della R. Accademia Naz. dei Lincei». Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. VII, 1° sem., pp. 75-78). Roma, 1928. 8°.

QUAGLIARIELLO G. — Ricerche sul meccanismo di formazione della linea. (Estr. dai «Rendiconti della Reale Accademia Naz. dei Lincei». Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. IX, 1° sem., pp. 243-249). Roma, 1929. 8°.

QUAGLIARIELLO G. — La presenza nella bile di un enzima deidrogenante l'acido stearico. (Estr. dai «Rendiconti della Reale Accad. Nazionale dei Lincei». Vol. XVI, 2° sem., pp. 387-389). Roma, 1932. 8°.

QUAGLIARIELLO G. — Presenza nelle cellule del tessuto adiposo di una deidrogenosi attiva su gli acidi grassi superiori. (Estr. dai «Rendiconti della Reale Accademia Naz. dei Lincei». Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. XVI, 2° sem., pp 552-554). Roma, 1932. 8°.

QUAGLIARIELLO G. und MEDINA. — Ueber die Azidität des Harns in einigen Krankheiten. (Sonderabdruck aus der «Deutschen Medizinischen Wochenschrift». N. 47), s. d. t. 8°, pp. 1-7.

QUAGLIARIELLO G. und D'AGOSTINO E. — Verwendung der Indikatorenmethode beim Studium der Harnreaktion und Vorschlag einer praktischen Methode zur klinischen Benutzung. (Sonderabdruck aus der «Deutschen Medizinischen Wochenschrift». N. 46, 1912), s. d. t. 8°, pp. 1-12.

QUAGLIARIELLO G. e DE LUCIA P. — Ulteriori ricerche sul neoglucosio. (Estr. dal «Bollettino della Società Italiana di Biologia Sperimentale». Vol. III, pp. 1314-1315). Napoli, 1928. 8°.

QUAGLIARIELLO G. e TRIA E. — Sulla presenza di glucosio nelle urine normali. (Estr. dal «Bollettino della Società Italiana di Biologia Sperimentale». Vol. III, pp. 311-313). Napoli, 1928. 8°.

QUAGLIARIELLO G. e SCOZ G. — Ricerche sul metabolismo dei grassi. VIII. (Estr. dal «Bollettino della Società Italiana di Biologia Sperimentale». Vol. V). Napoli, 1930. 8°, pp. 1-3.

QUAGLIARIELLO G. e TRIA E. — L'equilibrio acido-basico nei cani in seguito al taglio dei vaghi. (Estr. dal «Bollettino della Società Italiana di Biologia Sperimentale». Vol. V). Napoli, 1930. 8°, pp. 1-4.

QUAGLIARIELLO G. e MAZZA F. P. — Sulla pretesa esistenza di un composto organico del cloro nel sangue. (Estr. dal «Bollettino della Società Italiana di Biologia Sperimentale». Vol. VI). Napoli, 1931. 8°.

QUAGLIARIELLO G. — Ricerche chimico-fisiche sui liquidi animali. Nota VII. Sulla reazione chimica della bile. (Estr. dai «Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei». Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. XX, pp. 302-305). Roma, 1911. 8°.

QUAGLIARIELLO G. — L'azoto proteico e l'azoto residuale nel siero di sangue di vari animali (vertebrati e invertebrati). (Estr. dai «Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei». Vol. XXIV, 2° sem., pp. 213-218). Roma, 1920. 8°.

QUAGLIARIELLO G. — Azione dell'acido tricloracetico sugli zuccheri. (Estr. dagli «Atti della R. Accademia medico-chirurgica di Napoli». Anno LXXIV, 1920, p. LVIII), s. d. t. 8°.

QUAGLIARIELLO G. e BOTTAZZI F. — Recherches sur la constitution physique et les propriétés chimico-physiques du suc

des muscles lisses et des muscles striés, pp. 409-448, s. d. t.

Quagliariello G. e Bottazzi F. — Proprietà chimiche e chimico-fisiche del succo di muscoli striati e lisci. Nota II. Contenuto in proteine del succo e rapporti fra granuli (miosina) sospesi, e mioproteina sciolta. (Estr. dai « Rendiconti della R. Accad. Nazionale dei Lincei ». Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. XXI, 2° sem., pp. 51-59). Roma, 1912. 8°.

Quagliariello G. — Sull'attività secretiva della ghiandola sottomascellare del cane irrorata artificialmente. (Estr. dagli « Atti della R. Accademia Medico-chirurgica di Napoli ». Anno LXXIV). Napoli, 1920. 8°, pp. 1-7.

Quagliariello G. e Nicolosi Roncati F. — Contributo alla conoscenza delle proprietà chimico-fisiche dei liquidi vegetali. (Estr. dal « Bullettino dell'Orto Botanico della R. Università di Napoli ». Tomo VI), s. d. t. 8°, pp. 1-3.

Quagliariello G. — Proprietà chimiche e chimico-fisiche dei muscoli e dei succhi muscolari. Nota VI. Sul contenuto in fosforo dei muscoli striati bianchi e rossi. (Estr. dai « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ». Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. XXIV, ser. 5ª, pp. 638-640). Roma, 1915. 8°.

Quagliariello G. — Azione di alcuni veleni sull'utero isolato, in riposo e gravido. (Estr. dall'« Archivio di Ostetricia e Ginecologia ». Serie II. Vol. V). Napoli, 1916. 8°, pp. 1-23.

Quagliariello G. — Sullo zucchero proteico del sangue. Nota IV. Azione dell'adrenalina e dell'insulina sullo zucchero proteico del sangue di cani normali e spancreati. (Estr. dal « Bollettino della Società Italiana di Biologia Sperimentale ». Vol. II, pp. 890-892). Napoli, 1927. 8°.

Quagliariello G. e De Lucia P. — Sulla esistenza di neoglucosio nei liquidi interni dell'organismo. (Estr. dal « Bollettino della Società Italiana di Biologia Sperimentale ». Vol. II, pp. 371-374). Napoli, 1927. 8°.

Quagliariello G. e De Lucia P. — Reazione tra zuccheri e aminoacidi. (Estr. dal « Bollettino della Società di Biologia Sperimentale ». Vol. I). Napoli, 1927. 8°, pp. 1-4.

Quagliariello G. — Ricerche chimico-fisiche sui liquidi animali. Sulla reazione del sangue degli animali marini. (Estr. dalle « Pubblicazioni della Stazione Zoologica di Napoli ». Vol. I, pp. 21-29). Napoli, 1916. 8°.

Quagliariello G. — Azione delle basse temperature su alcune proprietà chimico-fisiche del latte. (Estr. da « La Pediatria ». Rivista d'Igiene e di Medicina infantile. Vol. XXIV). Napoli, 1916. 8°, pp. 1-11.

Quagliariello G. — Azione della temperatura sui tessuti e sui loro componenti colloidali. III. Azione della temperatura sui tendini e su altre strutture collogene. Parte II. (Estr. dall' « Archivio di Scienze Biologiche ». Vol. IV, pp. 139-183). Napoli, 1923. 8°.

Quagliariello G. — Sulla tossicità dell'emocianina. (Estr. dall' « Archivio di Scienze Biologiche ». Vol. IV, pp. 373-388). Napoli, 1923. 8°.

Quagliariello G. — Sul contenuto in ossigeno della metemoglobina. (Estr. dall' « Archivio di Scienze Biologiche ». Vol. V, pp. 193-208). Napoli, 1923. 8°.

Quagliariello G. — Einfluss des Natrium-Glykocholats auf die Trypsinverdauung. (Sonderabdruck aus « Biochemische Zeitschrift ». Band XXV, pp. 220-238). Berlin, 1910. 8°.

Quagliariello G. — Ueber die Imbibition der Darmschleimhaut mit NaCl- und Na_2SO_4-Lösungen verschiedener Konzentrationen. (Sonderabdruck aus « Biochemische Zeitschrift ». Band XXVII, pp. 516-530). Berlin, 1910. 8°.

Quagliariello G. — Recherches et considerations sur le « Sucre protéique » du sang. (Estr. da « Archives Italiennes de Biologie ». Tome LXXXI). Pise, 1929. 8°, pp. 1-17.

Quagliariello G. — Beiträge zur Muskelphysiologie. Wirkung des Veratrins auf die quergestreiften Muskeln von Warm-

blütern. (Sonderabdruk aus « Zeitschrift für Biologie ». Bd. 59, pp. 469-496). München, 1913. 8°.

Quagliariello G. — Beiträge zur Muskelphysiologie. Über die Funktion der degenerierten Muskeln. (Sonderabdruck aus « Zeitschrift für Biologie ». Bd. 59, pp. 469–496). München, 1913. 8°.

Quagliariello G. — Ricerche sull'importanza biologica e sul metabolismo delle sostanze proteiche. Comunicazione II. Influenza delle iniezioni endovenose di HCl e di NaOH sul quoziente proteico del siero di sangue. (Estr. dall'« Archivio di Biologia ». Vol. X, pp. 62-70), s. l. 1911. 8°.

Quagliariello G. — Ricerchè sull'importanza biologica e sul metabolismo delle sostanze proteiche. Nota III. (Estr. dal l'« Archivio di Fisiologia ». Vol. XI, pp. 165-172). s. l. 1913. 8.

Quagliariello G. — Valore alimentare dei pesci. (Estr. da « Quaderni della nutrizione ». Vol. I, pp. 153-162). Bologna, 1934. 8°.

Quagliariello G. — L'acido ascorbico e la vitamina C. (Estr. da « Athena »). Roma, 1933. 8°, pp. 1-9.

Quagliariello G. — I processi ossidativi negli organismi viventi. (Estr. dalla « Rassegna Medica ». N. 4, 1933), s. l. 1933. 8°, pp. 1-13.

Quagliariello G. e Scoz G. — Sulla esistenza di una lipasi nel tessuto adiposo. (Estr. dall'« Archivio di Scienze Biologiche ». Vol. XVII, pp. 513-529). Bologna, 1932. 8.

Quagliariello G. e Scoz G. — Ossidazione *in vitro* dei grassi del tessuto adiposo. (Estr. dall'« Archivio di Scienze Biologiche ». Vol. XVII, pp. 530-545). Bologna, 1934. 8°.

Quagliariello G. — Über die Wirkung des B-Imidoazolylämins und des p-Oxyphenyläthylamins auf die glatten Muskeln. (Sonderabd. aus der « Zeitscrift für Biologie ». Bd. 64, pp. 263–284). München, s. d. 8°.

Quagliariello G. — Propriétés chimiques et physico-chimiques des muscles et des sucs musculaires. (Extr. des « Archives Internationales de Physiologie ». Volume XVI, pp. 239-250). Paris, 1921. 8°.

Sadowski Clotilde. — L'opera di Lorenzo Respighi. Piacenza, 1934. 8°, pp. 1-63.

Scott Barrett H. G. — Vedi Knox-Shaw H.

Scoz G. — Vedi Quagliariello.

Silvestri Filippo. — Biospeologica LXI Dicellura, Japygidae (première serie), (Extr. des « Archives de Zoologie Expérimentale et Générale ». Tome 76, pagine 385-398). Paris, 1934. 8°.

Silvestri Filippo. — Campagne spéologique de G. Bolivar et R. Jeannel dans l'Amérique du Nord (1928). Campodeidae. (Extr. des « Archives des Zoologie Expérimentale et Générale ». Tome 76, pagine 379-383). Paris, 1934. 8°.

Silvestri Filippo. — Marquesan Embioptera. (Reprinted from the « Bullettin P. Bishop Museum ». N. 114, pp. 271–272), s. d. t. 8°.

Silvestri Filippo. — Rassegna degli insetti dell'olivo del Bacino del Mediterraneo. (Estr. dagli « Atti del XI Congresso Internazionale di Olivicoltura in Lisbona »). Roma, 1934. 8°, pp. 1-42.

Smart W. M. — The Astronomical extinction Factor in Photo-Electric Phothometry. (Reprinted from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Vol. 94, n. 2, pp. 115–130). Cambridge, 1933. 8°.

Sobrero L. — Calcolo di verifica di una struttura elicoidale iperstatica. (Estr. dalla Rivista « L'Ingegnere ». Vol. VIII, n. 8). Roma, 1934. 4°, pp. 1-8.

Società Anonima Carburanti Italiana. Alcune considerazioni sui moderni carburanti, Milano, s. d. 8°, pp. 1–45.

Stoy R. H. — The Temperatures of the Nuclei of Planetary Nebulae. (Reprinted from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Vol. 93, pp. 588–598). Edinburgh, 1933. 8°.

Tomta Gungi. — The Physiology of Ciliary Movement. I. The effect of Osmatic Pressure. II. The effect of Hydrogen Ions. (Separat print from « The Journal

of the Shanghai Science Institute ». Vol. I, nn. 5, 6, pp. 69-76, 77-84). Shanghai, 1934. 8°.

TRIA E. — Vedi QUAGLIARIELLO G.

VENTURA C. — Vedi QUGLIARIELLO G.

VINCELLI PIETRO. — La misura del tempo e i fusi orari. (Estr. dalla Rivista « Gli Astri ». Anno III°). Roma, 1934. 8°, pp. 1-16.

WOLOGDINE S. — Vedi LE CHATELIER H.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 18 novembre 1934 (anno XIII)

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Parallelismo monodromo sopra una superficie di rotazione.* Nota di F. SBRANA, presentata [1] dal Corrisp. G. LORIA.

1. In una Nota recente di Levi-Civita [2] è dimostrato – come conseguenza di un teorema di Jacobi, e delle osservazioni contenute in una Nota di Fenchel [3] – che « *condizione necessaria e sufficiente affinchè sopra la sfera il trasporto per parallelismo lungo un ciclo chiuso* T *sia monodromo* (o, ciò che è lo stesso, uniforme, ossia affinchè la determinazione finale, a ciclo percorso coincida colla iniziale) *è che le due porzioni di sfera separate da* T *abbiano area uguale* ». Mi sono chiesto se a questa suggestiva proprietà della sfera faccia riscontro una proprietà analoga per superficie più generali; ed ho potuto dare a tale quesito una risposta affermativa, come mi propongo di mostrare in questa Nota. Consideriamo per ciò una superficie chiusa σ di rotazione attorno ad un asse a su cui sia fissato un verso positivo, incontrata in non più di due punti da ogni parallela ad a, e ad angolo retto dallo stesso asse a nei due punti A_1 e A_2 (ritenendo per fissar le idee che A_2 preceda A_1 se si percorre a nel senso positivo prefissato). Sia T una curva chiusa tracciata su σ, incontrata in un punto almeno da ciascuna linea meridiana, u un versore (vettore unitario) tangenziale, che venga trasportato per parallelismo superficiale lungo T, θ l'angolo di questo versore con T (contato nel verso che preciseremo in seguito), e $\theta_1 - \theta_0$ la diffe-

(1) Nella seduta del 18 novembre 1924.

(2) Cfr. T. LEVI-CIVITA, *Curve chiuse a parallelismo monodromo sopra la sfera.* « Atti della Pontif. Accad. delle Scienze Nuovi Lincei », anno LXXXVII, VII Sess., 1934, pp. 1-10.

(3) W. FENCHEL, *Ueber einen Jacobischen Satz der Kurventheorie.* « The Tôhoku Mathematical Journal », vol. 39, 1934, pp. 95-97.

renza fra la determinazione finale, a trasporto ultimato, e la determinazione iniziale di θ. Rappresentiamo inoltre con σ_1 quella parte di σ che ha per frontiera T e contiene il punto A_1, con σ_2 la parte rimanente, e con K la curvatura gaussiana di σ in un suo punto generico. Dimostreremo anzitutto che si ha

$$(1)\qquad \begin{cases} \int_{\sigma_1} K\, d\sigma = 2\pi + \theta_1 - \theta_0\,, \\ \int_{\sigma_2} K\, d\sigma = 2\pi - (\theta_1 - \theta_0)\,. \end{cases}$$

Sia poi r la distanza di un punto generico di σ dall'asse a, r_m un massimo relativo raggiunto da r su σ; ed ammettiamo ulteriormente che T sia riducibile per deformazione continua al parallelo di raggio r_m. Segue allora dalle (1) che *condizione necessaria e sufficiente affinchè il trasporto per parallelismo superficiale di u lungo* T *sia monodromo* (e quindi si abbia $\theta_1 - \theta_0 = 0$) *è che risulti*

$$(2)\qquad \int_{\sigma_1} K\, d\sigma = \int_{\sigma_2} K\, d\sigma = 2\pi\,.$$

Questa proprietà delle superficie di rotazione, che riteniamo nuova, si identifica evidentemente col teorema di Levi-Civita nel caso della sfera [1].

2. *Calcolo della curvatura geodetica di una linea* T *tracciata sopra una superficie generica.* – Per poter conseguire lo scopo prefissoci, vogliamo intanto occuparci del calcolo della curvatura geodetica γ della generica linea T tracciata su una superficie σ in un suo punto P, notoriamente collegata col trasporto per parallelismo da una semplicissima relazione, che ritroveremo tra breve espressa per mezzo della (6) [2].

Sia $\mathbf{N}$ il versore normale a σ in P, diretto verso l'esterno di σ, $\boldsymbol{t}$ il versore $\frac{d\mathrm{P}}{ds}$ tangente a T in P, $\boldsymbol{p}$ il versore tangenziale e normale a T in P, definito dalla relazione

$$(3)\qquad \boldsymbol{p} = \mathbf{N} \wedge \boldsymbol{t}\,,$$

$\boldsymbol{u}$ un versore tangenziale generico, θ l'angolo che deve descrivere $\boldsymbol{t}$ per

(1) Dimostrerò in una Nota successiva che la proprietà enunciata si estende sostanzialmente ad una superficie chiusa qualunque.

(2) Cfr. F. Sbrana, *Parallelismo e curvatura geodetica sopra una superficie.* «Rendiconti della R. Accad. dei Lincei», vol. IX, ser. 6ª, 1° sem., fasc. 12, 1929, pp. 1075-1080; T. Levi-Civita, *Terne di congruenze sopra una superficie ed estensione della trigonometria.* «Compositio Math.», vol. I, 1934, p. 152.

andare a coincidere con $\boldsymbol{u}$ rotando attorno ad $\mathbf{N}$ nel verso antiorario. Si ha allora

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}(\boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{u}),$$

e quindi sostituendo nella (3)

$$\boldsymbol{p} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}(\boldsymbol{u}\cos\theta - \boldsymbol{t}). \tag{4}$$

Ciò posto, se $\boldsymbol{n}$ è il versore della normale principale a T in P (diretto verso la concavità), c la flessione, γ la curvatura geodetica di T in P, della prima formula di Frénet

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = c\boldsymbol{n},$$

e dalla (4), discende

$$\gamma = c\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{p} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} \times \boldsymbol{u}\ ^{(1)}. \tag{5}$$

In questa formula, giova ricordarlo, $\boldsymbol{u}$ rappresenta un versore tangenziale arbitrario. Di tale arbitrarietà ci varremo del numero seguente.

Se poi ha luogo il trasporto per parallelismo superficiale di $\boldsymbol{u}$ lungo T, che implica la condizione $\frac{d\boldsymbol{u}}{ds} \times \boldsymbol{t} = 0$, si trova

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{u}) = \frac{d\cos\theta}{ds} = \frac{d\boldsymbol{t}}{ds} \times \boldsymbol{u},$$

e quindi per la (5)

$$\frac{d\theta}{ds} = -\gamma. \tag{6}$$

3. *Curvatura geodetica e trasporto per parallelismo sopra una superficie di rotazione.* – Supposto assegnato il quadrato dell'elemento lineare ds di σ, la (5) si presta per il calcolo spedito di γ in funzione dei coefficienti del detto quadrato. Noi supporremo per semplicità di riferirci senz'altro ad una superficie di rotazione, nelle condizioni poste al n. 1, e che perciò si abbia $ds^2 = dx_1^2 + G\,dx_2^2$, con G funzione di x_1, essendo x_1 la lunghezza dell'arco della linea meridiana passante per il generico punto P di σ, contato posi-

(1) Questa formula è la (5) della mia Nota citata, col segno cambiato nel secondo membro, essendo stato assunto in essa il versore $\boldsymbol{p}$ nel senso opposto a quello definito qui per mezzo della (3).

tivamente da A_1 a P, x_2 l'angolo compreso tra O e 2π che un piano meridiano fisso descrive rotando attorno ad a nel verso antiorario per andare a coincidere col piano meridiano passante per P.

Poniamo ancora

$$\boldsymbol{t}_1 = \frac{\partial P}{\partial x_1} \quad , \quad \boldsymbol{t}_2 = \frac{1}{+\sqrt{G}} \frac{\partial P}{\partial x_2};$$

saranno $\boldsymbol{t}_1$ e $\boldsymbol{t}_2$ i versori delle tangenti al meridiano e al parallelo uscenti da P, orientati concordemente col verso secondo cui crescono rispettivamente x_1 ed x_2. Se nella (5) sostituiamo $\boldsymbol{t}$ con $\boldsymbol{t}_1$ e $\boldsymbol{u}$ con $\boldsymbol{t}_2$, verifichiamo subito che la curvatura geodetica γ_1 delle linee meridiane è nulla, avendosi

$$\frac{\partial \boldsymbol{t}_1}{\partial x_1} \times \boldsymbol{t}_2 = -\frac{\partial \boldsymbol{t}_2}{\partial x_1} \times \boldsymbol{t}_1 = 0 \text{ (1)}. \tag{7}$$

Sostituiamo invece $\boldsymbol{t}$ con $\boldsymbol{t}_2$ ed $\boldsymbol{u}$ con $\boldsymbol{t}_1$, e quindi θ con $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{d}{ds}$ con $\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x_2}$; risulta che la curvatura geodetica del parallelo è data da

$$\gamma_2 = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \boldsymbol{t}_2}{\partial x_2} \times \boldsymbol{t}_1 = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{d\sqrt{G}}{dx_1} \text{ (2)}. \tag{8}$$

Considerando ora una generica linea T si ponga nella (5) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{t}_1$, e quindi in luogo di $-\theta$ l'angolo φ che $\boldsymbol{t}_1$ deve descrivere rotando attorno ad **N** nel senso antiorario, per andare a coincidere con $\boldsymbol{t}$. Si ha così

$$\gamma = -\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi} \frac{d\boldsymbol{t}}{ds} \times \boldsymbol{t}_1 .$$

Dalle relazioni

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}_1 \cos\varphi + \boldsymbol{t}_2 \operatorname{sen}\varphi \quad , \quad \frac{d\boldsymbol{t}_1}{ds} \times \boldsymbol{t}_1 = 0 ,$$

(1) È infatti $\frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} \times \frac{\partial P}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial P}{\partial x_1} \times \frac{\partial P}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial P}{\partial x_1} \frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial x_1}\right)^2$. Notando ulteriormente che $\left(\frac{\partial P}{\partial x_1}\right)^2 = 1$, si ottiene appunto la (7).

(2) È infatti

$$\frac{\partial \boldsymbol{t}_2}{\partial x_2} \times \boldsymbol{t}_1 = -\boldsymbol{t}_2 \times \frac{\partial \boldsymbol{t}_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial P}{\partial x_2} \times \frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_2};$$

e quindi

$$\gamma_2 = \frac{1}{G} \frac{d}{dx_1} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial x_2}\right)^2 = \frac{1}{2G} \frac{dG}{dx_1}.$$

discende intanto

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} \times \boldsymbol{t}_1 = \frac{d \cos \varphi}{ds} + \frac{d\boldsymbol{t}_2}{ds} \times \boldsymbol{t}_1 \operatorname{sen} \varphi ,$$

e quindi

$$\gamma = \frac{d\varphi}{ds} - \frac{d\boldsymbol{t}_2}{ds} \times \boldsymbol{t}_1 ,$$

si ha poi, per mezzo delle (7), (8),

$$\frac{d\boldsymbol{t}_2}{ds} \times \boldsymbol{t}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{t}_2}{\partial x_1} \times \boldsymbol{t}_1 \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial \boldsymbol{t}_2}{\partial x_2} \times \boldsymbol{t}_1 \frac{dx_2}{ds} = -\sqrt{G}\,\gamma_2 \frac{dx_2}{ds} ;$$

per cui risulta

$$\gamma = \frac{d\varphi}{ds} + \sqrt{G}\,\gamma_2 \frac{dx_2}{ds} \text{ (1)}.$$

Tornando ora alla condizione (6) di trasporto per parallelismo superciale lungo T si ricava

$$d\theta = -d\varphi - \sqrt{G}\,\gamma_2\, dx_2 ;$$

e di qui, integrando lungo tutta la linea T,

$$\theta_1 - \theta_0 = -\int_T \sqrt{G}\,\gamma_2\, dx_2 = -\int_T \frac{d\sqrt{G}}{dx_1}\, dx_2 . \tag{9}$$

4. *Curvatura gaussiana, e trasporto monodromo.* – Ricordiamo ancora che per una generica superficie, la cui metrica sia definita dalla relazione

$$ds^2 = E\, dx_1^2 + G\, dx_2^2 ,$$

la curvatura gaussiana K si può esprimere mediante la nota formula di Lionville

$$K = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} (\gamma_1 \sqrt{E}) - \frac{\partial}{\partial x_1} (\gamma_2 \sqrt{G}) \right\} ,$$

(1) Questa formula si poteva anche dedurre da un'altra più generale che esprime la curvatura geodetica di una linea tracciata su una superficie per mezzo dell'angolo φ e delle curvature γ_1 e γ_2 relative alle linee coordinate, formula che fu da me stabilita nella Nota citata, e ritrovata poi per altra via dal compianto prof. Raimondi; cfr. E. Raimondi, *Sulla curvatura geodetica sopra una superficie e sulla formula di Lionville*, «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», vol. X, ser. 6ª, 2° sem., fasc. 12, pp. 622-627.

dove γ_1 e γ_2 rappresentano rispettivamente le curvature geodetiche delle linee coordinate $x_2 =$ costante, e $x_1 =$ costante. Nel caso delle superficie di rotazione si avrà

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{d(\gamma_2 \sqrt{G})}{dx_1} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{d^2 \sqrt{G}}{dx_1^2} .$$

Sia ora σ_1 quella parte di σ che abbiamo definito al n. 1. Poichè $d\sigma = \sqrt{G}\, dx_1\, dx_2$, se x_1' è un valore generico di x_1 su T, troviamo

$$(10) \qquad \int_{\sigma_1} K\, d\sigma = -\int_0^{2\pi} dx_1 \int_0^{x_1'} \frac{d^2 \sqrt{G}}{dx_1^2} dx_2 = 2\pi a_1 - \int_T \frac{d\sqrt{G}}{dx_1} dx_2 ,$$

dove per brevità si è rappresentato con a_1 il valore assunto da $\frac{d\sqrt{G}}{dx_1}$ nel punto A_1.

In modo simile si ottiene

$$(11) \qquad \int_{\sigma_2} K\, d\sigma = -\int_0^{2\pi} dx_1 \int_{x_1'}^{b} \frac{d_2 \sqrt{G}}{dx_1^2} dx_2 = -2\pi a_2 + \int_T \frac{d\sqrt{G}}{dx_1} dx_2 ,$$

dove b indica la lunghezza di tutto l'arco della linea meridiana compreso tra A_1 ed A_2, mentre a_2 è il valore assunto da $\frac{d\sqrt{G}}{dx_1}$ nel punto A_2.

Consideriamo ora una qualunque linea meridiana, ed il versore ad essa tangente $\frac{\partial P}{\partial x_1}$. Se ω è l'angolo che questo versore deve descrivere rotando nel senso antiorario attorno alla corrispondente determinazione di $\frac{\partial P}{\partial x_2}$, per diventare parallelo ad a e concorde col verso positivo di a, si trova che $\operatorname{sen} \omega = -\frac{dr}{dx_1}$. Ora per le ipotesi fatte in principio è $\omega = \frac{3\pi}{2}$ in A_1, $\omega = \frac{\pi}{2}$ in A_2. Siccome poi $\sqrt{G} = r$, risulta che $\frac{d\sqrt{G}}{dx_1}$ vale 1 in A_1, -1 in A_2. Si ha così $a_1 = 1$, $a_2 = -1$; e tenendo presente la (9), si conclude che le (10), (11) si identificano con le (1), alle quali appunto ci eravamo proposti di pervenire.

Nel caso del parallelismo monodromo, il secondo membro della (9) è un multiplo intero di 2π. Supponiamo per di più che la curva T sia riducibile per deformazione continua a un parallelo di cui il raggio sia un

massimo relativo per r. Questo parallelo è allora una geodetica della superficie σ, come discende dalla (8), avendosi lungo di esso

$$\frac{dr}{dx_1} = \frac{d\sqrt{G}}{dx_1} = 0 .$$

Risulta così, per cose note, che l'angolo $\theta_1 - \theta_0$ è nullo [1]. Si ottengono per conseguenza le condizioni (2), che generalizzano il teorema di Levi-Civita, richiamato in principio.

Matematica. — *Sulla unificazione delle funzioni espresse da serie che convergono in intervalli fra loro complementari.* Nota di L. Laboccetta, presentata [2] dal Corrisp. G. A. Crocco.

1. Sono complementari due intervalli che presi insieme costituiscono l'intiero campo di variazione della variabile. Tenendo presente che un intervallo può essere chiuso od aperto ad ognuno dei suoi estremi, si scorge che, rispetto al campo $-\infty, +\infty$ sono fra loro complementari i due intervalli di ciascuna delle coppie

(1) $\quad |x| \leq 1 \quad , \quad |x| > 1 \qquad$ (2) $\quad |x| < 1 \quad , \quad |x| \geq 1 .$

Chiamo « complementari » due serie di funzioni se i segni e i coefficienti dei loro termini corrispondenti sono uguali e la variabile apparisce con esponente di segno opposto; allora se una di esse converge in uno degli intervalli finiti (1), per es. nell'intervallo $|x| \leq 1$ l'altra converge all'intervallo $|x| > 1$.

Può avvenire però che uno o entrambi i punti di separazione degli intervalli siano da escludere e che nè l'una e nè l'altra serie converga per $|x| = 1$.

Poichè ogni serie è rappresentabile mediante un integrale definito, quel che si dice delle serie vale anche per gl'integrali che ad esse corrispondono.

2. Nell'intervallo nel quale converge ciascuna delle due serie rappresenta una funzione, la quale però può avere esistenza indipendente anche al di fuori di esso. Sono tali ad esempio le due funzioni e gl'integrali e le serie che le rappresentano

(1) Cfr. la Nota del prof. Levi-Civita citata in principio: *Curve chiuse a parallelismo monodromo sopra la sfera*, n. 1.

(2) Nella seduta del 4 novembre 1934.

$$(3) \qquad \frac{1}{1-x} = \int_0^\infty x^{1\nu}\, d\nu = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$$(4) \qquad \frac{x}{x-1} = \int_0^\infty x^{-1\nu}\, d\nu = 1 + x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + \cdots$$

ed entrambe le serie divergono o diventano periodicamente oscillanti nei punti $|x| = 1$, nei quali le due funzioni (3), (4) sono indeterminate.

Confrontando le due serie (3), (4) si scorge che ad esse può sostituirsi una serie unica che converge in tutto il campo reale da $-\infty$ a $+\infty$, eccezione fatta dei punti $x = 1$, e che coincide con la (3) nell'intervallo $|x| < 1$ e con la (4) nell'intervallo $|x| > 1$ purchè si assuma come variabile, invece di x, una nuova variabile $x^{\varphi(x)}$, dove $\varphi(x)$ indica una funzione che prende il valore $+1$ nell'intervallo $|x| < 1$ e il valore -1 nell'intervallo $|x| > 1$.

3. La funzione $\varphi(x)$ è dunque una delle forme fondamentali delle costanti discontinue. Ma per giungere ad essa con un procedimento generale ricordiamo che una costante discontinua è completamente definita dalla funzione puntiforme che ne rappresenta la variazione, poichè da questa essa si deduce per sommazione [1] con l'aggiunta di una costante arbitraria che ne rappresenta il valore per es. per $x = -\infty$.

Nel caso presente le variazioni di $\varphi(x)$ sono evidentemente $+2$ per $x = -1$ e -2 per $x = +1$. La funzione puntiforme corrispondente che rappresenta queste variazioni, e che è anch'essa una delle forme fondamentali, quella che in meccanica serve a rappresentare le coppie di forze, è

$$(5) \qquad -2 \operatorname{sgn} x \operatorname{Punt}(x^2 - 1).$$

Si ha perciò

$$(6) \qquad \varphi(x) = C + \mathbf{S}\, 2 \operatorname{sgn} x \operatorname{Punt}(x^2 - 1)$$

e poichè per $x = -\infty$ deve essere $\varphi(x) = -1$, bisogna porre $C = -1$ e viene

$$(7) \qquad \varphi(x) = -1 + 2 \operatorname{Dir} x$$

oppure, più brevemente

$$(8) \qquad \varphi(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 1).$$

Le due funzioni (7), (8) prendono entrambe il valore zero per $|x| = 1$; ma ciò non importa perchè in tali punti i termini di entrambe le serie (3), (4) hanno già tutti il valore 1.

(1) Per la *sommazione* delle funzioni puntiformi v. questi « Rendiconti », vol. XVI, serie 6ª, p. 27, luglio 1932.

Facendo la sostituzione anzidetta le due serie, i due integrali, e le due funzioni in forma finita, si unificano prendendo rispettivamente la forma

$$(9) \qquad 1 + x^{\operatorname{sgn}(x^2-1)} + x^{2\operatorname{sgn}(x^2-1)} + x^{3\operatorname{sgn}(x^2-1)} + \cdots$$

$$(10) \qquad \int_0^\infty x^{\operatorname{sgn}(x^2-1)\,1\nu}\, d\nu$$

$$(11) \qquad 1 : (1 - x^{\operatorname{sgn}(x^2-1)})$$

e come si scorge ciascuna di queste funzioni nell'intervallo $|x| < 1$ coincide con la prima delle corrispondenti forme (3), (4) mentre nell'altro intervallo $|x| > 1$ coincide con la seconda.

Per $|x| = 1$ la serie (9) diventa $1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$ cioè infinita, ristabilendo la continuità fra le due. Gli integrali diventano anch'essi infiniti.

Non vi è coincidenza con le funzioni $1/(1-x)$, $x/(x-1)$ che per $x = +1$ prendono la forma indefinita $1/0$ e $x/0$ alla quale si può convenzionalmente dare il significato di $+\infty$ e per $x = -1$ prendono rispettivamente i valori $1/2$ e $1/2$.

4. Qualche volta il significato della unificazione è evidente. Così si ha per es.

$$(12) \qquad \operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots$$

$$(13) \qquad = \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^\infty \operatorname{Fal}\nu\, x^{1+2\,1\nu}(1 + 2\,1\nu)^{-1}\, d\nu$$

espressione che vale per $|x| < 1$. Qui poichè $(\operatorname{tg}\alpha)^{-1} = \operatorname{cotg}\alpha$ l'integrale esprime arc tg x nel primo intervallo e arc cot x nel secondo intervallo, se ad x si sostituisce il suo valore reciproco, in modo che la serie converga. La serie unificata è perciò

$$(14) \qquad x^{\operatorname{sgn}(1-x^2)} - \frac{1}{3}x^{3\operatorname{sgn}(1-x^2)} + \frac{1}{5}x^{5\operatorname{sgn}(1-x^2)} - \cdots$$

e l'integrale corrispondente

$$(15) \qquad \int_0^\infty \frac{\operatorname{Fal}\nu\, x^{(1+2\,1\nu)\operatorname{sgn}(1-x^2)}}{1 + 2\,1\nu}\, d\nu$$

e l'una e l'altra valgono per qualsiasi x da $-\infty$ a $+\infty$. Ma poichè da -1 a $+1$ la serie rappresenta l'arco la cui tangente è x, mentre per $|x| > 1$ la serie rappresenta l'arco la cui tangente è $1/x$, ossia l'arco la

cui cotangente è x, la serie generale e l'integrale generale rappresentano il luogo composto

$$(16) \qquad (\text{arc tg } x)\ \text{Dir } x + (\text{arc cot } x)\ \text{Punt Dir } x$$

che più brevemente si può scrivere

$$(17) \qquad \varphi = \text{arc tg } x^{\text{sgn}(1-x^2)}$$

e il punto mobile corrispondente, estremo all'arco φ, percorre due volte l'arco del cerchio da $-\pi/4$ a $+\pi/4$, vale a dire la funzione φ prende due volte ciascuno dei valori da $-\pi/4$ a $+\pi/4$, una volta nell'intervallo $|x| > 1$ e una volta nell'intervallo complementare.

5. Un risultato notevole si ottiene proiettando stereograficamente sul cilindro la curva rappresentante nel piano delle x, y la funzione (17). Si consideri perciò il cilindro circolare di diametro $= 1$, tangente al piano $O\,x\,y$ lungo l'asse delle y e giacente nel semispazio delle z positive. Proiettando stereograficamente su questo cilindro la funzione rappresentata dalla (17) e contando sulle sezioni rette del cilindro gli archi a partire dal punto O in cui esse incontrano l'asse delle y, cioè dai punti di contratto di esse con il piano $O\,x\,y$, si scorge che al punto A′ si ascissa x e ordinata $y = \text{arc tg } x$ corrisponde sul cilindro un punto A che costituisce l'estremo di un arco $o\,A = \alpha$ il cui valore è $2\,\widehat{OPA}$ ossia è il doppio del valore dell'angolo la cui tangente è x. Ma il raggio del cerchio C è $1/2$, mentre quello di arc tg x è contato sul cerchio di raggio 1, la lunghezza dell'arco $OA = \alpha$ è dunque proprio la stessa di quella dell'arco la cui tg è x.

Quindi nel cilindro sviluppato la curva su di esso tracciata fra i punti $-\pi/2, +\pi/2$, che corrisponde a quella compresa nell'intervallo -1, $+1$ sull'asse delle x, è una retta, e più precisamente una retta inclinata a 45° perchè in essa le ordinate sono uguali alle ascisse.

Oltrepassato il punto P′, corrispondente all'ascissa $x = +1$, ed il simmetrico corrispondente all'ascissa $x = -1$, e cioè percorso sul cilindro l'arco da $-\pi/2$ a $+\pi/2$ le cordinate invece di corrispondere alla lunghezza dell'arco la cui tg è x; debbono corrispondere alla lunghezza dell'arco di cui x è la cotangente, cioè dell'arco complementare dell'angolo OPQ. Quest'angolo è misurato dalla metà dell'arco OQ, ma il cerchio C ha il raggio $= 1/2$ quindi nel cerchio di raggio $= 1$ la lunghezza dell'arco che misura quest'angolo è proprio quella dell'arco OQ.

Sul cilindro sviluppato anche questi due rami di curva sono rettilinei e si raccordano sulla generatrice di proiezione, formando la seconda semionda della funzione periodica che, sviluppata è $\frac{\pi}{2}\,\text{Plg}\,\frac{2x}{\pi}$.

Sul cilindro le due semionde costituiscono due semi spire di eliche avvolte in senso contrario con l'angolo di $-\pi/2$ e $+\pi/2$.

Matematica (Analisi). — *Su una classe di funzionali analitici.* Nota III[1] di G. Belardinelli, presentata dal Socio S. Pincherle.

1. La funzione $F(\alpha, 1, \gamma, x)$ ha per stella di Mittag-Leffler il piano complesso col taglio da $+1$ ad ∞, gli operatori normali che hanno detto campo di regolarità possono chiamarsi col Pincherle operatori semplici. Ne viene dunque che se consideriamo l'*operatore semplice* H_γ^α e supposto che operi su una funzione che abbia in un punto singolare isolato t_0, nel cui intorno la funzione sia monodroma, la funzione ottenuta avrà nel punto t_0 un punto singolare di diramazione.

Queste considerazioni si possono estendere ai funzionali completi di qualunque ordine.

I funzionali confluenti invece trasformano una funzione y regolare nell'intorno dell'origine in una funzione intera; i punti singolari sono da questo funzionale mandati all'infinito, come avviene ad esempio per il funzionale ipergeometrico H_1.

2. Dalla polidromia delle funzioni ipergeometriche ne viene dunque quella dei funzionali H; così dalle relazioni classiche, alle quali soddisfano le funzioni ipergeometriche, fa riscontro relazioni funzionali per gli operatori H.

Ad esempio dalla relazione classica:

$$x F'(\alpha, 1, \gamma, x) = \alpha (F(\alpha + 1) - F(\alpha)),$$

ove $F(\alpha + 1) = F(\alpha + 1, 1, \gamma, x)$, con la notazione

$$\Delta_\alpha H_\gamma^\alpha = H_\gamma^{\alpha+1} - H_\gamma^\alpha,$$

avremo

$$x \frac{d}{dx} H_\gamma^\alpha y = \alpha \Delta_\alpha H_\gamma^\alpha y.$$

Analogamente per gli altri parametri e per le trasformazioni H di qualunque ordine e classe.

(1) Pervenuta all'Accademia il 27 settembre 1934.

È naturale ora considerare l'equazione differenziale di Gauss relativa alla funzione $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ cioè

$$(1) \qquad x(x-1)F'' - ((\alpha+\beta+1)x - \gamma)F' - \alpha\beta F = 0,$$

ed il funzionale corrispondente $H_{\gamma,1}^{\alpha,\beta}$ e determinare, per questo ultimo, una relazione funzionale.

Facilmente si ottiene per questo operatore in relazione all'equazione differenziale (1) la seguente equazione:

$$(2) \quad \left\{x^2\frac{d}{dx}H - (\alpha+\beta+1)x\frac{d}{dx}H - \alpha\beta H\right\}y = \left(x\frac{d^2}{dx^2}H - \gamma\frac{d}{dx}\right)ty,$$

dalla quale si potrebbero dedurre quelle relative ai funzionali H_γ^α e H_γ.

Così, ad esempio, per il funzionale H_γ^α si ha:

$$\left\{x^2\frac{d}{dx}H + \alpha xH\right\}y = \left(x\frac{d}{dx}H + (\gamma-1)H\right)ty - (\gamma-1)$$

e per H_γ avremo

$$\left(x\frac{d}{dx}H - (\gamma-1)H\right)ty = xHy + \gamma - 1$$

per il funzionale H_1 ne verrà

$$x\frac{d}{dx}Hty = xHy,$$

operatore che è la trasformazione

$$H_1 y = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{t}e^{\frac{x}{t}}y(t)\,dt.$$

La relazione (2) non è caratteristica del funzionale $H_{\gamma,1}^{\alpha,\beta}$, ma ad essa devesi aggiungere oltre alla proprietà di essere un funzionale normale la relazione

$$xDH_{\gamma,1}^{\alpha,\beta} = \alpha\Delta_\alpha H_{\gamma,1}^{\alpha,\beta}.$$

Con queste due relazioni per il funzionale $H_{\gamma,1}^{\alpha,\beta}$ e coll'ipotesi che esso sia normale ne viene che la funzione caratteristica è precisamente la funzione

$$-\frac{1}{t}F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{t}\right).$$

Anzichè la regolarità della funzione caratteristica attorno all'origine e la scelta di uno dei due integrali regolari nell'intorno di questo punto, cioè della funzione $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, si poteva scegliere la regolarità attorno al punto uno od al punto infinito, cioè attorno ad uno dei tre punti singolari della (1),

equazione differenziale di Gauss. All'equazione differenziale di Gauss possiamo collegare dunque sei funzionali ipergeometrici, che naturalmente si comporteranno in modo differente attorno ai suddetti punti.

Accanto dunque al funzionale $H_{\gamma,1}^{\alpha,\beta}$ ne possiamo considerare altri cinque, in tutto sei, che dipendono dalla relazione (2).

Mediante le tre classiche trasformazioni di Eulero delle funzioni ipergeometriche si possono ottenere poi ventiquattro funzionali che possiamo chiamare anche ipergeometrici dipendenti dalla relazione (2).

Su questo argomento speriamo fare una esposizione più ampia in altri lavori, non avendo potuto, per ragioni di spazio, trattare l'argomento in questo primo lavoro.

3. Supponiamo che la funzione

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

su cui opera il funzionale H_γ^α sia tale che i coefficienti c_n soddisfino alla relazione ricorrente

$$a(n)\, c_{n+2} + b(n)\, c_{n+1} + c(n)\, c_n = 0$$

ove i coefficienti $a(n), b(n), c(n)$ siano polinomi in n di grado m.

La y è allora integrale regolare nell'intorno della origine della equazione differenziale di ordine m della forma:

$$(3) \qquad (a_m + b_m t + c_m t^2)\, t^m y^{(m)} + \cdots + (a_0 + b_0 t + c_0 t^2)\, y = \\ = a_0 \gamma_0 + \{(a_0 + a_1)\gamma_1 + b_0 \gamma_0\}\, t .$$

La funzione

$$f(x) = H_\gamma^\alpha y = \sum_{n=0}^{\infty} v_n x^n$$

avrà i coefficienti c_n che soddisfano alla relazione

$$(\gamma + n + 1)(\gamma + n)\, a(n)\, v_{n+2} + b(n)(\alpha + n + 1)(\gamma + n)\, v_{n+1} + \\ + c(n)(\alpha + n + 1)(\alpha + n)\, v_n = 0 .$$

E possiamo concludere che se la y soddisfa ad una equazione differenziale dell'ordine m della forma (3) la $f = H_\gamma^\alpha y$ soddisfa ad una equazione differenziale dell'ordine $m + 2$

$$(a'_{m+2} + b'_{m+2} t + c'_{m+2} t^2)\, t^{m+2} f^{(m+2)} + \cdots + (a'_0 + b'_0 t + c'_0 t^2) f = \\ = a' v_0 + \{(a'_0 + a'_1) v_1 + b'_0 v_0\}\, t .$$

Naturalmente altre dipendenze funzionali si potranno determinare fra la y e la f; ciò che qui abbiamo messo in evidenza è la dipendenza fra forme differenziali in correlazione ai funzionali ipergeometrici.

4. Si può ora dare una applicazione di questa dipendenza di proprietà funzionali, della f e della y, mediante l'operatore H_γ^α.

Consideriamo l'equazione differenziale

$$(a^2 b^2 - (a^2 + b^2) t + t^2) y'' + \left(\frac{a^2 b^2}{2} - (a^2 + b^2) t + \frac{3}{2} t^2\right) y' -$$

$$- \frac{1}{4} (h + h' t) y = 0,$$

e l'operatore H_γ^α con α, γ, h, h' da determinarsi.

Poi sia la y

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

ove i coefficienti soddisfino alla relazione ricorrente

$$(p_1 n + p_0) c_{n+2} + (q_1 n + q_0) c_{n+1} + r_1 n + r_0 = 0$$

ove $p_1, p_0, q_1, q_0, r_1, r_0$ siano pure da determinarsi; la y sarà integrale regolare nell'intorno della origine, di una equazione differenziale del primo ordine.

Per la

$$H_\gamma^\alpha y = \sum_{n=0}^{\infty} v_n x^n$$

si avrà la relazione

$$A(n) v_{n+2} + B(n) v_{n+1} + C(n) v_n = 0$$

ove

$$A(n) = (p_1 n + p_0)(\gamma' + n + 1)(\gamma' + n)$$
$$B(n) = (q_1 n + q_0)(\alpha + n + 1)(\gamma' + n)$$
$$C(n) = (r_1 n + r_0)(\alpha + n + 1)(\alpha + n)$$

ne verrà che $f(x)$ soddisfa ad una equazione differenziale del terzo ordine che può abbassarsi al secondo ordine mediante ad esempio le condizioni $r_0 = 0, \gamma = 1$.

Inoltre è possibile fissare i coefficienti e parametri $h, h', r_1, p_1, p_0, q_1, q_0, \alpha, \gamma$, in modo che la equazione differenziale, ridotta al secondo ordine, si possa trasformare nella equazione differenziale della forma scritta.

L'equazione differenziale di Lamé che è della stessa forma di quella ora considerata e nella quale h ed h' assumono valori speciali può facilmente risolversi mediante semplici considerazioni.

Si potrebbero ora considerare le applicazioni alle varie classi di equazioni differenziali di Lamé ed alle numerose generalizzazioni di questa equazione come quelle di Klein e di Heine ecc.

Abbiamo così posto in evidenza che la ricerca dei parametri del funzionale H_γ^α e della soluzione di una equazione differenziale del primo ordine permette di determinare l'integrale regolare nell'intorno della origine di una equazione differenziale che si può collegare a quella di Lamé.

Fisica. — *Apparecchio per la misura del campo elettrico terrestre.* Nota[1] di E. Medi, presentata dal Socio A. Lo Surdo.

Con l'apparecchio qui descritto il campo elettrico terrestre viene misurato con un metodo di riduzione a zero.

Il principio su cui è basato il metodo si può schematicamente esporre con il modello seguente. Si abbia un condensatore costituito da due armature piane e parallele, una ad un potenziale positivo, l'altra ad un potenziale negativo rispetto a quello del suolo preso come zero. Un conduttore piano, posto parallelamente alle armature, nel campo fra esse esistente, tende ad assumere il potenziale dovuto alla sua posizione. Mettendolo in comunicazione con il suolo, si ha, in generale, una corrente elettrica lungo il filo di terra, sino a che la quantità di elettricità raccolta sul conduttore per induzione del campo, non ne annulli il potenziale. Non si ha corrente se il conduttore si trova sulla superficie equipotenziale zero. In questa posizione infatti esistono dalle due parti opposte del conduttore due campi elettrici, eguali in valore assoluto. Il loro senso è tale da indurre sulle due superfici opposte del conduttore quantità di elettricità diverse di segno, la cui somma algebrica è eguale a zero.

Secondo questo modello, possiamo pensare il campo elettrico terrestre come dovuto ad una superficie piana orizzontale al di sopra del suolo all'altezza di un metro e al potenziale dovuto al campo.

L'altra armatura è un piatto metallico al di sotto del suolo ad un potenziale fisso e di segno opposto al precedente. La sua distanza dal suolo si può variare con continuità.

Il conduttore è al centro di un anello di guardia, al livello del terreno. Se il piatto inferiore assume una posizione tale da produrre un campo eguale a quello terrestre in valore assoluto, il conduttore, per quanto si è detto, non subisce alcuna variazione di carica per effetto di induzione: quindi, sia isolandolo sia collegandolo a terra, non si ha corrente elettrica.

In queste condizioni il valore cercato del campo terrestre è dato dal potenziale del piatto inferiore diviso per la sua distanza dal suolo.

(1) Pervenuta all'Accademia il 29 agosto 1934.

Per aumentare l'intensità della corrente, che indica se la compensazione è raggiunta o no, si usa il seguente artificio. Inizialmente il conduttore, collegato a terra, si trova nel campo, e, se non vi è compensazione, ácquista una carica indotta. Poi si isola e, schermatolo con un pozzo di Faraday, si fa scaricare a terra attraverso un rivelatore della carica costituito da un amplificatore a valvole termoioniche.

Le diverse parti dell'apparecchio sono realizzate praticamente come segue.

Il conduttore piano (M) è posto al centro dell'anello di guardia (L), collegato col suolo. Al di sotto, mediante il piatto piano (N) portato ad un potenziale fisso con una pila, si dà origine al controcampo compensatore. Questo si può immaginare come un proseguimento del campo terrestre al di sotto del potenziale zero del suolo.

Essendo il piatto piano e sufficientemente esteso, il campo dato da (N) è uniforme, perciò direttamente calcolabile come si è detto.

L'anello di guardia (L) (vedi fig. 1 e 2) è costituito da due lastre metalliche del diametro di 28 centimetri, distanti fra loro un centimetro; il piatto esploratore (M), isolato da (L) mediante tre rondelle di ambra, è del diametro di centimetri 9.

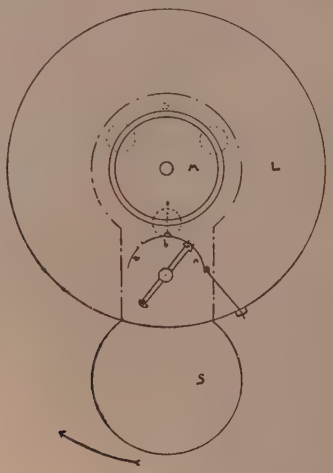


Fig. 1.

Fra le due lastre (L) sono posti tre conduttori (*a*) (*b*) (*c*), formanti un arco di circonferenza. Il primo (*a*) è collegato con (L), il secondo (*b*) con il piatto (M), il terzo (*c*) con lo strumento di misura.

Due spazzole (T) conduttrici e isolate da (L), formanti fra loro un angolo piatto, sono rigidamente connesse con un asse Z passante per il centro della circonferenza (*abc*). Esse mettono in comunicazione il conduttore (*a*) con (*b*) e poi (*b*) con (*c*); ciò avviene due volte per ogni giro completo dell'asse, secondo l'ordine che ora verrà detto.

I conduttori (*b*) (*c*) e le spazzole sono isolati con rondelle di ambra; il metallo usato per tutti i conduttori è ottone.

Due lamine SS′, ognuna a forma di otto, connesse per il proprio baricentro con l'asse Z, ruotano una al di sopra e una al di sotto del piano orizzontale (L) — (M), distanti da questo qualche millimetro.

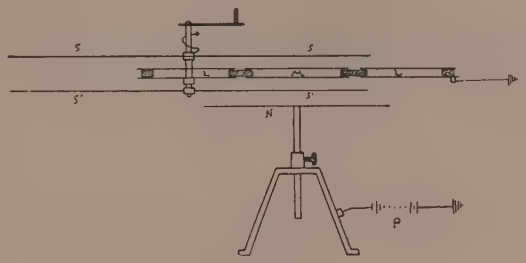


Fig. 2.

All'inizio della rotazione dell'asse il piatto (M) è scoperto, una delle spazzole lo mantiene collegato al suolo. Quando, girando l'asse Z, le lamine schermo S e S′, cominciano a coprire (M), il piatto rimane isolato, fino al momento in cui le lamine, ricoprendolo interamente, formano un pozzo di Faraday con l'anello di guardia. Il piatto esploratore (M), si trova chiuso in questo pozzo e mediante la spazzola T si scarica attraverso il conduttore (*c*) sull'amplificatore.

La griglia della valvola di entrata dell'amplificatore è collegata con il conduttore (*c*) dell'apparecchio, e messa a terra attraverso una resistenza di 5 megaohm. Se il campo elettrico terrestre non è esattamente compensato dal controcampo, il piatto (M) si carica ad un potenziale diverso da quello del suolo: quando è unito con (*c*), si scarica a terra attraverso la grande resistenza. La griglia subisce una variazione di potenziale, che, amplificata, fa variare l'intensità della corrente nel circuito di placca della valvola di uscita dell'amplificatore.

In questo circuito è inserito il primario di un trasformatore, nel cui secondario è posto in serie un ricevitore telefonico.

Girando le lamine schermo con una certa velocità, si sentono attraverso il ricevitore una serie di colpi, la cui intensità varia, diminuendo o aumentando la distanza del piatto compensatore (N) da (M) e si giunge ad annullare completamente questa intensità, quando il campo elettrico terrestre è esattamente compensato.

Il metodo presenta il vantaggio di essere un metodo di riduzione a zero: vengono così eliminate le cause di errore che possono provenire da un non perfetto funzionamento degli apparecchi e dalla loro taratura. Non occorrono precauzioni speciali per l'isolamento, come è invece necessario per l'elettro-

metro. La misura si esegue in brevissimo tempo, così che è possibile seguire le variazioni del campo terrestre.

La distanza del piatto compensatore (N) dal piatto (M) si legge sull'apparecchio; è necessario conoscere la forza elettromotrice della pila.

Il campo non viene perturbato dalla presenza dell'apparecchio, essendo questo piano al livello del suolo. L'amplificatore con il metodo acustico descritto permette di raggiungere una grande sensibilità. Si presta bene per la sua sensibilità di uso e facilità di trasporto. Le misure eseguite in laboratorio con un campo artificiale hanno fornito risultati conformi alle previsioni teoriche.

Chimica. — *Sugli ossialogenuri di piombo* [1]. Nota di A. Baroni, presentata [2] dal Socio G. Bruni.

Della esistenza di ossialogenuri di piombo in natura e della loro formazione per solidificazione di masse fuse, si sono occupati già da tempo molti Autori. Nei risultati dell'analisi termica sono però rivelabili divergenze nei vari risultati, dovute a difficoltà sperimentali che rendono i diagrammi di stato non sempre attendibili e sicuri. Io ho verificato i risultati per i sistemi $PbCl_2$—PbO, $PbBr_2$—PbO e ho effettuato uno studio accurato e completo del sistema PbI_2—PbO, che non mi risulta ancora noto, allo scopo di chiarire quali ossialogenuri anidri possano realmente esistere e per controllare l'esattezza dei dati che si riferiscono alla composizione chimica data da diversi Autori per vari minerali che non sono stati identificati con precisione. Non ho ritenuto ripetere l'analisi termica del sistema PbF_2—PbO già studiato da Sandonnini [3] data la dimostrata assenza di ossifluoruri; di più questi non vennero nemmeno riscontrati in natura e se ne può perciò senz'altro negare l'esistenza. Anche in questo caso i composti fluorurati si allontanano per il loro comportamento dai composti degli altri alogeni i quali dànno invece dei diagrammi termici che presentano notevoli analogie fra loro.

In natura esistono come minerali vari ossicloruri anidri di piombo [4] e cioè la matlochite $PbCl_2$—PbO tetragonale, la mendipite $PbCl_2$—$2\,PbO$ ortorombica, la penfieldite $2\,PbCl_2$—PbO esagonale, la daviesite rombico prismatica di composizione incerta, la lorettoite $6\,PbO$—$PbCl_2$ che secondo Rimann [5] avrebbe invece la composizione $13\,PbO$—$2\,PbCl_2$ tetragonale, la

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale e Chimica fisica della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 18 novembre 1934.

(3) « Rend. Acc. Lincei » (5) 1, 959 (1914).

(4) Vedi Doeltner, *Mineralchemie*, IV, pp. 413, 422, 423.

(5) « Ann. Soc. Quimica Argentina », VI, 323 (1918).

chubutite $7\,PbO—PbCl_2$ tetragonale; non esiste invece alcun ossibromuro anidro ed esiste un solo ossiioduro anidro, la schwarzenbergite $PbI_2—2\,PbO$ tetragonale, nella quale però lo iodio è spesso sostituito parzialmente dal cloro.

Nello studio termico del sistema $PbCl_2—PbO$ i risultati da me ottenuti concordano sostanzialmente con quelli dati precedentemente da R. Ruer [1] salvo per le miscele ricche di PbO per le quali il diagramma di stato di Ruer presenta un errore di 50° in meno, errore che era già stato rilevato anche da Sandonnini; per il sistema $PbBr_2—PbO$ già studiato da Sandonnini [2] vi è una diversità per le miscele ricche di PbO: infatti invece del composto $PbBr_2—4\,PbO$ dato da questo Autore, il mio diagramma di stato mi porta ad ammettere l'esistenza del composto $PbBr_2—6\,PbO$. Completamente errati sono a mio avviso i risultati di Pelabon e Laude [3] i quali, per il sistema $PbCl_2—PbO$, trovano che la linea che parte dal punto di fusione del $PbCl_2$ scende ad un eutectico che fonde a 402° e corrisponde al 30 % molecolare di PbO; da questo parte una seconda linea che si dirige al punto di fusione dell'ossido. Secondo questi Autori a caldo non si formerebbero quindi ossicloruri di piombo.

Come ho già precedentemente detto il sistema $PbI_2—PbO$ non mi risulta ancora noto probabilmente per le notevoli difficoltà che presentano le fusioni degli ossiioduri il che obbliga a ricorrere ad opportuni accorgimenti e ad una tecnica diversa da quella usata per gli altri sistemi. Oltre ai dati dell'analisi termica io mi sono valso per l'identificazione dei vari composti anche di metodi cristallografici (osservazioni al microscopio) e di ricerche röntgenografiche. I risultati di queste sono stati però di scarso interesse perchè i fotogrammi risultano complicati e poco decifrabili; furono tentati anche dei cristalli rotanti che diedero pure scarsi risultati causa le piccole dimensioni dei cristalli ottenibili per raffreddamento delle masse fuse.

Per i sistemi $PbCl_2—PbO$ e $PbBr_2—PbO$ le fusioni vennero effettuate in crogioli di platino immergendo la pinza termoelettrica platino–platinorodio direttamente nella massa fusa. Per il sistema $PbI_2—PbO$ perchè l'ioduro di piombo fonde svolgendo vapori di iodio che attaccano fortemente il platino, usai, per le miscele ricche di PbI_2, dei crogioli di porcellana non verniciata perchè l'attacco di questa da parte della miscela fusa si mantiene piccolo fino a concentrazioni di circa il 50 % di PbO. Dal 50 % di PbO fino al PbO puro usai invece dei crogioli di platino. Le fusioni delle miscele ricche in PbI_2 vennero effettuate in corrente di idrogeno e di acido iodidrico: in questo modo mi fu possibile ottenere miscele contenenti fino al 95 % di PbI_2. Ogni fusione venne effettuata usando circa 70 gr. di miscela in modo da avere degli arresti eutectici confrontabili fra loro.

(1) « Zeit. für anorg. Chemie », *49*, 365 (1906).
(2) Loc. cit.
(3) « Bull. Soc. Chim. », *4*, 45, 488 (1929).

Il diagramma di stato del sistema $PbCl_2$—PbO è dato dalla fig. 1 e i valori corrispondenti sono riportati nella tabella I [1]; esso permette l'identificazione di tre soli composti e cioè $PbCl_2$—PbO, $PbCl_2$—2 PbO, $PbCl_2$—4 PbO. Il composto $PbCl_2$—PbO presenta in massa un colore rosso scuro mentre in polvere ha un colore rosa chiaro, quasi bianco. I cristalli che si possono isolare dalla massa fusa presentano una forma prismatica allungata e sono striati nella direzione dell'allungamento. Osservati a nicol incrociati e luce parallela sono fortemente birifrangenti e presentano una estinzione parallela all'allungamento; osservati a nicol incrociati e luce convergente sono atticamente biassici. Questo composto è quindi probabilmente rombico.

Tabella I.

PbO %	T′	T″	D	PbO %	T′	T″	D
10.0	472	438	200	62.0	695	—	—
20.0	438	438	450	65.0	688	—	—
25.0	478	439	300	67.5	698	—	—
32.5	515	438	160	70.0	708	—	—
37.5	535	438	70	73.0	715	—	—
41.0	570	439	30	76.0	723	—	—
45.0	612	525	250	78.5	722	710	60
50.0	645	526	150	82.0	710	710	200
55.0	673	525	80	87.0	760	710	120
60.0	690	525	20	94.0	805	710	60

Il composto $PbCl_2$—2 PbO dà cristalli aghiformi di colore grigio chiaro che osservati a nicol incrociati e luce parallela sono fortemente birifrangenti e presentano una estinzione parallela all'allungamento; a nicol incrociati e luce convergente le figure di interferenza risultano invece di dubbia interpretazione. Questo composto in massa ha colore grigio verdognolo, mentre in polvere ha colore grigio chiaro.

Il composto $PbCl_2$—4 PbO ha in massa un colore verde oliva ed in polvere un colore verde chiaro. I cristalli isolabili dalla massa hanno un colore verde giallognolo, abito tabulare appiattito e contorni irregolari; osservati a nicol incrociati e luce parallela sono birifrangenti.

(1) In questa tabella e nelle tabelle seguenti T′ rappresenta la temperatura di cristallizzazione primaria, T″ la temperatura dell'arresto eutectico e D la durata dell'arresto eutectico.

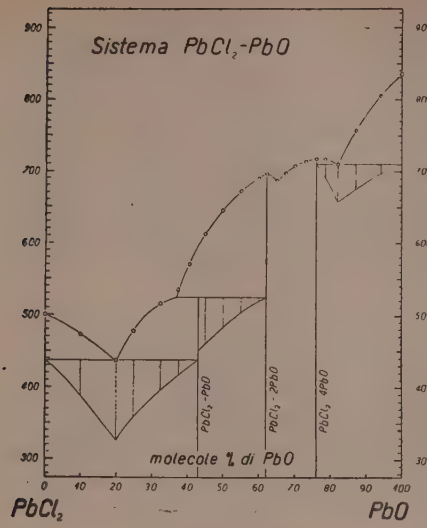


Fig. 1.

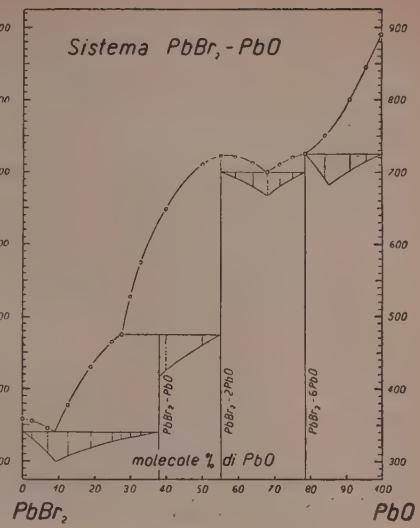


Fig. 2.

L'analisi termica del sistema $PbBr_2$—PbO, come si può vedere dalla fig. 2 e dalla tabella II, rivela l'esistenza dei composti $PbBr_2$—PbO, $PbBr_2$—2 PbO, $PbBr_2$—6 PbO.

Tabella II.

PbO °/₀	T′	T″	D	PbO °/₀	T′	T″	D
2.5	355	340	50	55.0	722	—	—
7.0	345	339	110	59.0	720	700	30
12.5	375	340	140	64.0	712	699	80
19.0	430	340	100	68.0	700	700	130
25.0	465	340	60	71.5	710	700	70
27.5	475	349	50	75.0	720	700	30
30.0	527	339	40	78.5	725	—	—
33.0	575	339	30	84.0	750	725	120
40.0	648	475	200	91.0	800	725	100
50.0	710	475	50	96.0	842	725	50

Il composto $PbBr_2$—PbO presenta in massa un colore rosso scuro con riflessi metallici, in polvere un colore bianco sporco. I cristalli isolabili dalla

massa osservati a nicol incrociati e luce parallela si mostrano birifrangenti e dànno estinzione parallela all'allungamento; a nicol incrociati e luce convergente si osserva che gli spigoli dei prismi sono paralleli all'asse ottico.

Il composto $PbBr_2$—2PbO ha in massa colore grigio verdognolo e riflessi metallici ed in polvere un colore biancastro. I cristalli isolati si presentano ben formati con forma prismatica allungata e sono limitati da sei facce ben nette e brillanti. A nicol incrociati e luce parallela sono birifrangenti con estinzione parallela all'allungamento; a nicol incrociati e luce convergente risultano otticamente uniassici. Questo composto cristallizza probabilmente nel sistema esagonale o romboedrico.

Il composto $PbBr_2$—6PbO in massa ha colore verde oscuro ed in polvere colore verde chiaro. I cristalli isolati hanno forma prismatica allungata; a nicol incrociati e luce parallela le osservazioni sono ostacolate dal colore molto intenso dei cristalli, si può però rilevare la brifrangenza e l'estinzione parallela all'allungamento; a nicol incrociati e luce convergente i cristalli risultano sicuramente biassici ed il piano degli assi ottici è perpendicolare alla faccia.

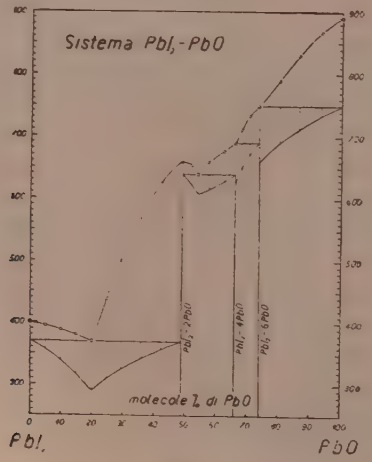


Fig. 3.

Come ho già precedentemente detto il sistema PbI_2—PbO non mi risulta ancora studiato. Nella letteratura oltre al minerale schwarzenbergite PbI_2—2PbO si trovano descritti tre ossiioduri e cioè PbI_2—6PbO e PbI_2—5PbO studiati da Ditte [1] e PbI_2—2PbO studiato da Denot [2]. Nella Fig. 3 e nella tabella III sono riportati i risultati dell'analisi termica di questo sistema.

(1) « Ann. Chim. Phys. », *5*, 21, 226 (1881).
(2) « J. Pharmacie », *20*, 1, (1834).

Dal diagramma di stato si può rilevare che la curva di deposizione primaria dell'ioduro di piombo scende dapprima fino al punto eutectico a 80 °/₀ di PbI_2 e a 370°; risale fino al 49 °/₀ circa di PbI_2 e ad una temperatura di 635° alla quale raggiunge un massimo per poi ridiscendere segnando un nuovo eutectico a 640° e 54 °/₀ di PbI_2. La curva poi sale nuovamente e presenta due altri eutectici a 690° e 750°. Il primo arresto eutectico a 370° è l'eutectico fra PbI_2 ed il composto PbI_2—2PbO. La serie degli arresti che si prolunga fino al 51 °/₀ di PbI_2 e l'andamento delle curve di deposizione primaria, escludono l'esistenza del composto PbI_2—PbO.

Tabella III.

PbO °/₀	T'	T''	D	PbO °/₀	T'	T''	D
5.0	395	370	60	54 0	640	640	130
10.0	387	369	120	57.5	660	639	100
15.0	380	369	200	61.5	680	640	50
20.0	370	369	300	66.0	690	—	—
25.0	437	369	230	68.0	712	690	170
29.5	500	370	180	70.5	732	690	90
36.0	570	370	110	74.0	750	—	—
42.5	625	371	60	80.0	790	750	250
49.0	660	370	—	86.5	830	749	150
51.5	655	640	70	89.0	845	749	100
—	—	—	—	94.5	868	750	60

L'esame del diagramma di stato di questo sistema permette quindi di escludere l'esistenza dei composti PbI_2—PbO e PbI_2—5PbO descritti dalla letteratura almeno in quanto possano ottenersi per raffreddamento di masse fuse; conferma invece il composto PbI_2—2PbO che corrisponde alla composizione della schwarzenbergite che è l'unico ioduro basico di piombo che si trovi in natura come forma mineralogicamente definita e permette di riconoscere due nuovi composti, fino ad ora sconosciuti e cioè PbI_2—4PbO e PbI_2—6PbO.

Il composto PbI_2—2PbO ha in massa un colore bruno ed in polvere un colore verde chiaro; i cristalli isolati hanno forma prismatica allungata; osservati a nicol incrociati e luce parallela sono brifrangenti ed hanno estinzione parallela all'allungamento, osservati a nicol incrociati e luce convergente sono probabilmente biassici.

Il composto PbI_2—4PbO ha in massa colore arancio ed in polvere colore giallo chiaro; i cristalli isolati hanno forma prismatica o tabulare, osservati a nicol incrociati e luce parallela sono birifrangenti con estinzione parallela all'allungamento, osservati a nicol incrociati e luce convergente sono uniassici ed i prismi appaiono paralleli all'asse ottico.

Il composto PbI_2—6PbO ha in massa colore verde ed in polvere colore giallo verde; i cristalli isolati sono aghiformi ed osservati a nicol incrociati e luce parallela sono birifrangenti con estinzione parallela all'allungamento, osservati a nicol incrociati e luce convergente sono uniassici e l'asse del prisma è parallelo all'asse ottico.

Ringrazio vivamente il dott. A. Scherillo a cui sono dovute le ricerche cristallografiche e il dott. G. Segre che mi ha aiutato nella parte sperimentale.

Riassumendo:

Sono stati studiati termicamente, cristallograficamente e röntgenograficamente gli ossicloruri, ossibromuri, ossiioduri di piombo. Dai risultati ottenuti specialmente mediante l'analisi termica, si può ammettere l'esistenza dei composti:

*$PbCl_2$ — PbO	*$PbBr_2$ — PbO	**PbI_2 — 2 PbO
*$PbCl_2$ — 2 PbO	*$PbBr_2$ — 2 PbO	PbI_2 — 4 PbO
*$PbCl_2$ — 4 PbO	($PbBr_2$ — 4 PbO)	PbI_2 — 6 PbO
	$PbBr_2$ — 6 PbO	

Gli altri ossialogenuri descritti da autori precedenti non debbono ritenersi composti stabili almeno a temperature superiori a 250° e in ogni caso non si formano per raffreddamento di masse fuse.

I composti contrassegnati con asterisco erano già stati ottenuti per raffreddamento di masse fuse, quello con doppio asterisco era stato ottenuto per altra via, quello fra parentesi era stato ottenuto da masse fuse da altri autori, ma non è stato da me confermato.

Il lavoro di Pelabon e Laude, come risulta anche dall'accordo dei miei risultati con quelli di Sandonnini, è completamente errato.

Chimica. — *Borofosfati di rame e piombo* ($Me^{II}BPO_5$) [1]. Nota di D. Ghiron e D. Grischott, presentata [2] dal Socio G. Bruni.

Ben poco è noto sull'esistenza di acidi borofosforici o di sali da essi derivanti. M. Prinvault [3] ha notato che, fondendo pirofosfato di sodio con acido borico e riprendendo la massa fusa con acqua, si ottiene la formazione di ortofosfato ed ha interpretato questa reazione coll'ipotesi della formazione di un borofosfato di sodio che viene completamente scisso dall'acqua. Egli ha studiato la quantità di acido borico minima necessaria per trasformare tutto l'acido pirofosforico in acido ortofosforico ed avendola trovata in una molecola di B_2O_3 per ogni molecola di P_2O_5 ha attribuito al composto la formula:

$$P_2O_5 \cdot 2\,Na_2O \cdot B_2O_3$$

Però, data la solubilità del composto in acqua, non ha potuto isolarlo, ed ha interpretato il meccanismo della reazione per analogia con una reazione simile fra pirofosfati ed acido solforico monoidrato da cui ha potuto invece isolare dei solfofosfati.

D'altra parte l'esistenza del fosfato di boro, che uno di noi ha studiato con G. R. Levi [4] dal punto di vista cristallografico, e l'ipotesi che esso sia un'anidride mista, formulata da Gustav E. R. Schulze [5] in base alla sua struttura, ci ha indotti a cercare se possano esistere sali dell'acido borofosforico ed a tentarne la preparazione.

Le prove condotte nel modo sottoindicato hanno portato a stabilire l'esistenza di sali ben definiti di un acido di questo tipo per il rame ed il piombo e prodotti analoghi, sebbene meno puri, per altri metalli bivalenti.

Borofosfato di rame: Abbiamo rinunciato al fosfato di boro come materiale di partenza, perchè in presenza di acqua esso si idrolizza decomponendosi: scaldando a lungo fosfato di boro ed ossido di rame su b. m. in presenza di acqua, si ottiene un fosfato basico di rame esente da acido borico. Ci siamo quindi convinti essere necessario agire per via non acquosa e, data l'infusibilità del fosfato di boro, anche a temperature relativamente alte, siamo partiti da ossido di rame, anidride fosforica e anidride borica.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale e Chimica fisica della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 18 novembre 1934.

(3) «C. R.», *74*, 1249 (1872).

(4) «Rend. Linc.», XVIII, ser. 6ª, 394 (1933).

(5) «Z. f. phys. Chem.» (B), *24*, 215 (1934).

L'anidride borica venne aggiunta in grande eccesso (gr. 4) rispetto all'ossido di rame (gr. 0.8) e all'anidride fosforica (gr. 0.8), questi ultimi nelle quantità stechiometriche (2 di CuO per 1 di P_2O_5). La miscela venne fusa per 2 ore circa a 1100° e quindi raffreddata rapidamente: essa apparve divisa in due strati nettamente distinti; quello superiore di colore verde chiaro conteneva appena tracce di rame e di acido fosforico. Lo strato nero inferiore venne accuratamente separato da quello superiore, poi polverizzato finissimamente e la polvere di colore bruno lavata a lungo con acqua e poi con alcool ed etere. Essa è solubile negli acidi forti diluiti, insolubile nell'acido acetico, e contiene il 34.27 % di rame e 38.89 % di P_2O_5.

In preparazioni successive si ottennero spesso prodotti più chiari, in certi casi non bene fusi, che apparivano mescolati a quantità più o meno grandi di fosfato di boro. Questo inconveniente proveniva dalla difficoltà di pesare esattamente l'anidride fosforica e di mescolarla intimamente con gli altri componenti, per cui facilmente si formava fosfato di boro, prima che la massa fosse completamente fusa e quindi omogenea.

Abbiamo perciò fatto altre preparazioni partendo da acido fosforico sciropposo, ossido di rame ed acido borico in quantità equimolecolari, tirando a secco su b. m., rimescolando continuamente, e poi scaldando fortemente su fiamma libera. La massa venne infine fusa a 1100° circa in crogiuolo di porcellana con eccesso di anidride borica. Lo strato inferiore venne polverizzato, ma analizzato senza essere lavato:

	Trovato	Calcolato per $CuBPO_5$
	—	—
Cu	34.10	34.29
P_2O_5	38.57	38.31
B_2O_3	18.32	18.78

Il rame venne determinato elettroliticamente, l'acido fosforico pesato come pirofosfato, previa doppia precipitazione come fosfomolibdato di ammonio. Per la determinazione dell'acido borico abbiamo fuso il composto con eccesso di carbonato sodico–potassico, mantenendo la massa fusa a lungo finchè il carbonato di rame si fosse decomposto in ossido. In tal modo, riprendendo con acqua, si ottiene un prodotto facilmente filtrabile che si lava con acqua calda. Al filtrato, esattamente neutralizzato con acido diluitissimo, usando come indicatore la fenolftaleina, vennero aggiunti circa 50 cc. di glicerina pura bidistillata e poi l'acido boroglicerico fu titolato con potassa N/10. Si è tenuto conto della acidità propria della glicerina titolandola, in quantità uguale a quella aggiunta, con KOH e fenolftaleina. Prove di confronto fatte con questo metodo ci hanno dato risultati buoni, leggermente più bassi del teorico (—0.2 —0.3 %). Abbiamo quindi preferito questo metodo per la sua rapidità di esecuzione.

Lo stesso composto di rame venne ottenuto senza eccesso di anidride borica, nel qual caso, non avendo potuto fare la separazione degli strati per fusione, prima di essere analizzato venne accuratamente lavato.

Analisi: Cu : 34.31 % P_2O_5 : 38.67 %.

Borofosfato di piombo: si prepara in modo analogo al composto di rame, fondendo con eccesso di anidride borica una miscela di acido fosforico, carbonato di piombo e acido borico nelle quantità equimolecolari, seccata su b. m. e poi scaldata su fiamma libera. Lo strato inferiore appare come un vetro trasparente e limpido di color giallo chiaro; la polvere bianca, non lavata, dà all'analisi i seguenti risultati:

	Trovato	Calcolato per $PbBPO_5$
Pb	62.73	62.97
P_2O_5	21.32	21.58
B_2O_3	10.49	10.58

Il piombo venne determinato come solfato, l'acido fosforico e l'acido borico come per il composto di rame.

Anche questo composto, come quello di rame, corrisponde alla formula calcolata.

Abbiamo tentato di preparare altri composti di metalli bivalenti, ma i soli che siamo riusciti a fondere sotto 1100° sono quelli di zinco e di cadmio. I composti di calcio, bario, magnesio, nichel, non fondono; per quelli di manganese e cobalto si ha un principio di fusione, non mai separazione di strati.

Pure partendo da concentrazioni equimolecolari in ossido metallico ed acido fosforico, abbiamo ottenuto dei composti di zinco e cadmio più basici, cioè più ricchi in metallo rispetto all'acido fosforico. Così per il cadmio in parecchie preparazioni dopo fusione di 5-6 ore a 1100° con eccesso di anidride borica, si ottennero prodotti nello strato inferiore la cui composizione era:

	I	II	III	Calcolato per $CdBPO_5$
Cd	52.58	54.00	53.03	47.96
P_2O_5	31.15	31.29	31.17	30.31

e per lo zinco:

	I	II	III	Calcolato per $ZnBPO_5$
Zn	36.73	38.14	36.65	34.9
P_2O_5	37.83	39.56	37.32	37.81

Nel caso dello zinco abbiamo cercato di seguire la reazione, fondendo a temperatura più bassa. Una miscela $ZnO - H_3PO_4$ preparata nel solito modo, venne fusa per 40 minuti con eccesso di anidride borica a 950° e poi venne analizzato lo strato inferiore: una porzione di esso venne ulteriormente fusa per 8 ore con altra anidride borica sempre a 950°. Si potè osservare che nella miscela fusa per breve tempo il rapporto molecolare fra zinco ed acido fosforico si mantenne uguale ad 1, mentre nella stessa miscela fusa a lungo l'acido fosforico è leggermente più basso rispetto allo zinco, come si vede dal seguente specchietto:

	Comp. della miscela di partenza	Dopo 40′	Dopo 8 ore
Zn	42.73	38.45	34.73
P_2O_5	46.98	42.08	36.16
rapporto $\frac{Zn}{P_2O_5}$	$\frac{0.653}{0.661} = 0.988$	$\frac{0.588}{0.592} = 0.992$	$\frac{0.531}{0.509} = 1.043$

Ne concludiamo che in questi casi la reazione non si arresta alla formazione di borofosfato, ma si ha una leggera decomposizione che aumenta col tempo e colla temperatura, con formazione di fosfato di boro che passa nello strato superiore.

Nelle condizioni in cui noi abbiamo operato, cioè anche con eccesso di B_2O_3 non si formano composti più ricchi in B_2O_3: invece un eccesso di ossido metallico rispetto all'acido fosforico impedisce la formazione di borofosfato o decompone il composto già formato. Si è tentato inutilmente di preparare il composto di piombo per fusione di fosfato di boro preparato a bassa temperatura con un eccesso di ossido di piombo, essendosi ottenuto fosfato basico e borato di piombo, e si è osservato che il borofosfato di piombo normale si decompone per fusione con ossido di piombo.

Riassumendo:

Viene dimostrata l'esistenza di borofosfati del tipo $Me^{II}BPO_5$.

Sono stati isolati allo stato puro i composti di rame e piombo rispondenti alla formula: $CuBPO_5$; $PbBPO_5$.

Sono stati ottenuti borofosfati di zinco e di cadmio dello stesso tipo, ma non puri, perchè più o meno basici, cioè più ricchi in ZnO e CdO.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 2 dicembre 1934 Anno (XIII)

Presidenza del Socio anziano sen. prof. O. M. Corbino.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Ancora sulla caratterizzazione topologica e trascendente delle serie di equivalenza sopra una superficie.* Nota[1] del Socio F. Severi.

Come ho dimostrato in precedenti lavori, le serie di gruppi di punti a circolazione algebrica sopra una superficie F, son *caratterizzate* dalla proprietà che la somma d'una qualunque forma differenziale quadratica di 1ª specie, inerente ad un gruppo variabile in una tal serie, è identicamente nulla.

Nel n. 8 della Nota presentata all'Accademia il 4 novembre ho espresso una riserva circa la portata della dimostrazione di questa proprietà, vincolandone la validità, per le serie di dimensione $r > 2$, all'estensione alle varietà superiori di un importante teorema dato da Lefschetz pei cicli algebrici d'una superficie[2]. Invece, un esame meglio approfondito della mia dimostrazione mostra ch'essa sussiste all'infuori di quest'estensione. Tuttavia credo opportuno di presentarla sotto una forma meno sintetica, chè forse riescirà più accetta a qualche lettore.

1. Occorre anzitutto precisare la struttura dei cicli delle varietà W_{2n} delle n-ple non ordinate dei punti d'una superficie F; varietà che è un'invo-

(1) Presentata nella seduta del 2 dicembre 1934.

(2) Lo stesso Lefschetz, nel porre alcune questioni insolute, scrive: « il serait fort désirable d'étudier le théorème L » (quello cui sopra si accenna) [*Géométrie sur les surfaces et les variétés algébriques*, Mémorial, Paris, Gauthier-Villars, 1929, p. 57].

luzione di grado $n!$ sopra il prodotto topologico di n copie di F. La cosa non presenta difficoltà (ne esporrò i dettagli nella Memoria in cui svilupperò più ampiamente i miei risultati) e conduce alla conclusione seguente, che riferisco ai cicli bidimensionali, i quali interessano da soli nel caso attuale.

Ogni ciclo bidimensionale Γ di W può esprimersi con una pseudo-omologia del tipo:

$$\Gamma \sim \Sigma\lambda\, X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1} \times \sigma + \Sigma\mu\, X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1} \times \tau + \\ + \Sigma\nu\, X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-2} \times \gamma \times \gamma' \qquad (\lambda, \mu, \nu \text{ interi}),$$

ove i σ son i cicli bidimensionali trascendenti di F, omologicamente indipendente tra loro e dai cicli algebrici; i τ sono i cicli algebrici di F, omologicamente indipendenti tra loro; γ, γ' son cicli lineari di una delle combinazioni semplici a due a due dei cicli lineari d'una base intermediaria di F; e infine $X_1, \cdots, X_{n-1}$ son punti *fissi* della superficie.

2. Un'altra osservazione, che conviene premettere, è questa. Se $x(x, y, z)$, $x'(x', y', z')$ sono punti variabili sui cicli γ, γ' di F, e $\varphi(x, y, z)\, dxdy$ è una forma quadratica differenziale di 1ª specie appartenente alla superficie, l'integrale

$$\iint \varphi(x, y, z)\, dxdy + \varphi(x', y', z')\, dx'\, dy',$$

esteso al prodotto topologico $\gamma \times \gamma'$, è nullo.

Invero, i punti di un intorno d'un punto di γ possono considerarsi come funzioni di un parametro reale t; e similmente un intorno d'un punto di γ' è rappresentato da x', y', z' funzioni di un certo altro parametro reale t'. Pertanto sul prodotto $\gamma \times \gamma'$ è:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(t, t')} = 0 \quad , \quad \frac{\partial(x', y')}{\partial(t, t')} = 0.$$

Onde sopra il ciclo $\gamma \times \gamma'$ si annulla identicamente la forma quadratica differenziale $\varphi\, dx\, dy + \varphi\, dx'\, dy'$.

3. Premesso tutto ciò, sia S una serie ∞^r di gruppi di n punti di F, nei cui gruppi s'annullino le somme relative alle forme quadratiche differenziali di 1ª specie della superficie. Sia Γ un ciclo bidimensionale di W, appartenente ad S. Consideriamo su W la forma quadratica differenziale di 1ª specie

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i, y_i, z_i)\, dx_i\, dy_i,$$

essendo $x_i\,(x_i\,,\,y_i\,,\,z_i)$ variabile su F e $\varphi\,dx\,dy$ denotando una qualunque forma quadratica differenziale di 1ª specie della superficie.

Sul ciclo $X_1 \times \cdots \times X_{n-1} \times \tau$ la ω riducesi a $\varphi\,(x_n\,,\,y_n\,,\,z_n)\,dx_n\,dy_n$; e, poichè τ è algebrico, risulta, su F, $\varphi\,(x_n\,,\,y_n\,,\,z_n)\,dx_n\,dy_n = 0$; cioè, su W, $\omega = 0$.

Sul ciclo $X_1 \times \cdots \times X_{n-2} \times \gamma \times \gamma'$ la ω riducesi a

$$\varphi\,(x_{n-1}\,,\,y_{n-1}\,,\,z_{n-1})\,dx_{n-1}\,dy_{n-1} + \varphi\,(x_n\,,\,y_n\,,\,z_n)\,dx_n\,dy_n\,,$$

ove $x_{n-1}\,,\,x_n$ variamo su $\gamma\,,\,\gamma'$. Pel n. 2 la ω è nulla sul ciclo considerato.

Siccome per ipotesi la ω è nulla su Γ, ne segue ch'essa è nulla sul ciclo $\Sigma\lambda\,X_1 \times \cdots \times X_{n-1} \times \sigma$. Ma su questo ciclo la ω riducesi alla forma $\varphi\,(x_n\,,\,y_n\,,\,z_n)\,dx_n\,dy_n$; dunque il ciclo $\Sigma\lambda\sigma$ è tale che sovr'esso s'annullano tutte le forme quadratiche differenziali di 1ª specie di F. Siccome se i λ non fossero nulli, il ciclo $\Sigma\lambda\sigma$ non sarebbe algebrico, così, a norma del teorema di Lefschetz, si conclude che gl'interi λ son tutti nulli. Viene dunque:

$$\Gamma \sim \Sigma\mu\,X_1 \times \cdots \times X_{n-1} \times \tau + \Sigma\nu\,X_1 \times \cdots \times X_{n-2} \times \gamma \times \gamma'\,.$$

Ora al ciclo $X_1 \times \cdots \times X_{n-2} \times \gamma \times \gamma'$ di W risponde su F un ciclo, il quale ha i suoi punti o fissi o distribuiti su due cicli lineari, ed è perciò superficialmente nullo; e al ciclo $X_1 \times \cdots \times X_{n-1} \times \tau$ risponde un ciclo algebrico. Si conclude che:

Una serie di gruppi di punti di F, *anche di dimensione* $r > 2$, *nei cui gruppi si annullino le somme relative alle forme quadratiche differenziali di* 1ª *specie della superficie, è a circolazione algebrica.*

Il reciproco è già stato dimostrato per r qualunque nei miei precedenti lavori. Vale pertanto la caratterizzazione enunciata per le serie a circolazione algebrica.

Meccanica. — *Perfezionamento della regola di equivalenza fra moti einsteiniani e moti newtoniani.* Nota [1] del Socio T. Levi-Civita.

Alcuni anni or sono ebbi a rilevare [2] che (in via approssimativa, largamente sufficiente per eventuali controlli astronomici) si può stabilire una correlazione semplice fra le due impostazioni, classica e einsteiniana, del problema del moto di un punto materiale in un campo statico di forze newtoniane. E precisamente riconobbi che, se U è il potenziale newtoniano del campo, le traiettorie del moto einsteiniano coincidono con quelle di un ordinario problema newtoniano, il cui potenziale U_1 dipende in modo semplice da U; potendosi ulteriormente collegare mediante una quadratura il tempo (cosmico) t del problema einsteiniano colla variabile t_1 che funge da tempo nel corrispondente problema newtoniano.

Mi propongo ora di mostrare che si può raggiungere (colla stessa approssimazione) una equivalenza anche più completa, associando direttamente (cioè senza scindere traiettorie e legge temporale) al moto einsteiniano, di cui si tratta, il moto newtoniano, testè accennato, *colla stessa variabile temporale,* e con l'ovvia specificazione che siano le stesse per i due moti le circostanze iniziali. Nella trattazione precedente si confrontavano invece movimenti isoenergetici [3], rendendosi così necessario di cambiare la legge del tempo.

1. Preliminari.

Designino: $U(x, y, z)$ il potenziale unitario dell'assegnato campo di forze newtoniane; t il tempo ordinario; v la velocità del mobile di componenti $\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \dot{z} = \frac{dz}{dt}$. Secondo la meccanica classica (principio di Hamilton), le equazioni differenziali del moto rimangono compendiate nella formula variazionale

(1) Presentata nella seduta del 2 dicembre 1934.

(2) In questi «Rendiconti», ser. 6ª, vol. IV, 1926, pp. 3–5; ovvero *Fondamenti di meccanica relativistica* (Bologna, Zanichelli, 1927), pp. 120–122; od anche pp. 394–396 della traduzione inglese delle mie *Lezioni di calcolo differenziale assoluto* [redatte dal prof. Persico] (Glasgow, Blackie, 1927); nonchè pp. 266–268 della traduzione tedesca (Berlin, Springer, 1928).

(3) Aventi cioè a comune il valore di una certa costante di integrazione (la quale, per uno di essi, rappresenta l'energia).

$$\delta \int L_0 \, dt = 0 \,, \tag{1}$$

con

$$L_0 = \frac{1}{2} v^2 + U \,. \tag{2}$$

La variazione dell'integrale, fra estremi fissi, porta sulle coordinate x, y, z del mobile (da definirsi quali funzioni di t). La t si può, indifferentemente, sottoporre o no a variazione, perchè l'incremento, subordinato da una variazione δt di t, nell'integrale $\int L_0 \, dt$, va a zero tutte le volte che è nulla la variazione proveniente da x, y, z.

D'altra parte, secondo la relatività generale, il moto di un punto (traiettoria e legge oraria) è definito dal principio geodetico di Einstein

$$\delta \int ds = 0 \,, \tag{3}$$

dove ds^2 è il quadrato dell'elemento lineare (quadridimensionale) del cronotopo, spettante alle circostanze fisiche del caso: attualmente, esistenza di masse potenzianti, che (nello schema newtoniano) danno luogo al potenziale U. La variazione in (3) porta su tutte le quattro coordinate di spazio e di tempo. Ma si può anche prescindere, come già nella (1), dalla variazione del tempo, perchè la quarta equazione, che ne deriva, risulta conseguenza delle altre tre.

L'espressione del ds^2 va desunta dalle equazioni gravitazionali di Einstein. Per moti lenti rispetto alla velocità c della luce, più precisamente, supponendo trascurabili $\frac{v^2}{c^2}, \frac{U}{c^2}$, si dimostra notoriamente che la (3) riporta alla (1).

Nei casi che interessano l'astronomia, $\frac{v^2}{c^2}$ e $\frac{U}{c^2}$, se pur non sono addirittura trascurabili, si possono trattare come infinitesimi, trascurandone quadrati e prodotti di fronte all'unità. Per tener conto, *nelle equazioni del moto*, dei termini lineari in $\frac{v^2}{c^2}, \frac{U}{c^2}$, cioè, come si suol dire, *in seconda approssimazione*, bisogna procurarsi il ds^2, esplicitando il coefficiente di dt^2, rispetto ad $\frac{U}{c^2}$, fino al secondo ordine incluso [1]; e si è in definitiva condotti ad una espressione semplificata del ds^2, cioè [2] a

$$ds^2 = (1 - 2\varphi)\, c^2 \, dt^2 - (1 - 2\gamma)\, dl_0^2 \,, \tag{4}$$

(1) Cfr. per tutto ciò i già citati *Fondamenti di meccanica relativistica*, pp. 4 e 36-47 [pp. 289, 320-328 della traduzione inglese; 181, 206-213 della tedesca].

(2) Ibidem, pp. 113-120 [388-394 e 262-267 delle traduzioni inglese e tedesca, rispettivamente].

dove

$$\gamma = \frac{U}{c^2}, \tag{5}$$

$$\varphi = \gamma - \gamma^2, \tag{6}$$

$$dl_0^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{7}$$

Le x, y, z, t rappresentano opportune coordinate cronotopiche, che sostituiscono (fin dove è possibile, perchè la varietà non è più euclidea, nè pseudoeuclidea) le ordinarie coordinate cartesiane e il tempo assoluto della impostazione newtoniana.

La (4), raccogliendo c^2dt^2 a fattore e badando alla (7), può essere scritta

$$ds^2 = c^2dt^2 \left\{ 1 - 2\gamma + 2\gamma^2 - \frac{v^2}{c^2} - 2\gamma \frac{v^2}{c^2} \right\}$$

$$= c^2dt^2 \left\{ 1 - 2\left(\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \gamma \right) - 2\gamma \left(\frac{v^2}{c^2} - \gamma \right) \right\}.$$

Entro parentesi figurano, oltre all'unità, due termini del primo ordine, $-\frac{v^2}{c^2}, -2\gamma$, e due del secondo $-2\gamma\left(\frac{v^2}{c^2} - \gamma\right)$. Se si trascurassero senz'altro questi ultimi, si ritroverebbe semplicemente il principio variazionale (1) dell'ordinaria meccanica. La parte principale del divario si metterà in evidenza, calcolando ds fino ai termini d'ordine immediatamente superiore, che è due. Con tale approssimazione si ha subito

$$cds = c^2dt \left\{ 1 - 2\left(\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \gamma \right) - 2\gamma \left(\frac{v^2}{c^2} + \gamma \right) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= c^2dt \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \gamma \right) - \gamma \left(\frac{v^2}{c^2} + \gamma \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \gamma \right)^2 \right\}.$$

Posto, per brevità di scrittura,

$$\mathfrak{T} = c^2 \left\{ \gamma \left(\frac{v^2}{c^2} - \gamma \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \gamma \right)^2 \right\} = \tag{8}$$

$$= c^2 \left\{ \gamma \left(\frac{v^2}{c^2} - \gamma \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - \gamma \right)^2 + \gamma \frac{v^2}{c^2} \right\},$$

ove si tenga presente che, per la (5) e la (2),

$$\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \gamma = \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} v^2 + U \right) = \frac{1}{c^2} L_0,$$

potremo attribuire a cds l'espressione

$$cds = c^2 dt - (L_0 + \mathcal{F})\, dt\,.$$

Introducendola nella formula variazionale (3) (moltiplicata per c) e sopprimendo l'addendo nullo $\delta \int cdt$, risulta

$$\delta \int (L_0 + \mathcal{F})\, dt = 0\,, \tag{9}$$

la quale si presta al confronto coll'analoga formula (1), che sintetizza invece le leggi del moto nella meccanica ordinaria.

2. Teorema di equivalenza.

Nel moto newtoniano, retto dalla (1), sussiste l'integrale della forza viva

$$\frac{1}{2} v^2 - U = E_0 \tag{10}$$

con E_0 costante.

Nel moto einsteiniano, retto dalla (9), si può ancora designare con E_0 la differenza $\frac{1}{2} v^2 - U$, ma questa non sarà più una costante. Tuttavia siccome, nella (9), la funzione lagrangiana $L_0 + \mathcal{F}$ differisce da L_0 per termini del primo ordine, la quantità E_0, pur non essendo rigorosamente costante, potrà (entro un intervallo di tempo finito) variare soltanto di quantità del primo ordine. Sfrutteremo questa osservazione tra un momento. Intanto eliminiamo formalmente v^2 dalla espressione (8) di $\mathcal{F}$, introducendovi dappertutto $2(U + E_0)$ per v^2, a norma della (10). Si avrà, cominciando col sostituire a γ il suo valore $\frac{U}{c^2}$,

$$\mathcal{F} = \frac{U}{c^2}(v^2 - U) + \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2} v^2 - U\right)^2 + v^2 \frac{U}{c^2}$$

$$= \frac{U}{c^2}(U + 2E_0) + \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{c^2} + 2(U + E_0)\frac{U}{c^2} = 3\frac{U^2}{c^2} + 4\frac{E_0}{c^2} U + \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{c^2}\,.$$

In quest'ultima espressione di $\mathcal{F}$, la E_0 si trova moltiplicata, una prima volta per $\frac{4U}{c^2}$, una seconda volta per $\frac{1}{2}\frac{E_0}{c^2}$, entrambi termini del primo ordine. Perciò, nella nostra approssimazione, cioè, a meno di termini d'ordine superiore al primo, è lecito trascurare senz'altro la variabilità di E_0,

ritenendo, per es., che E_0 *sia il valore che assume il primo membro della* (10) *in corrispondenza ai dati iniziali.* Si può quindi, nella funzione lagrangiana

$$L_0 + \mathcal{S} = \frac{1}{2} v^2 + U + 3\frac{U^2}{c^2} + 4\frac{E_0}{c^2}U + \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{c^2}$$

della (9), omettere l'ultimo addendo $\frac{1}{2}\frac{E_0^2}{c^2}$, che è assimilabile ad una costante, e, come tale, non porta alcun contributo alle equazioni differenziali. *Rimane così quale funzione lagrangiana del moto einsteiniano*

$$L = \frac{1}{2} v^2 + U_1, \tag{11}$$

dove

$$U_1 = \left(1 + 4\frac{E_0}{c^2}\right)U + 3\frac{U^2}{c^2}. \tag{12}$$

Ora questa stessa L spetta manifestamente anche al moto newtoniano di un punto materiale in un campo di forza, avente U_1 per potenziale unitario. Di qui segue che *le stesse equazioni differenziali reggono il moto einsteiniano, nelle circostanze fisiche, cui corrisponde* (secondo lo schema ordinario) *il potenziale* U, *nonchè il moto newtoniano, sotto l'azione di forze derivanti dal potenziale* U_1 (nel quale la costante E_0 rappresenta il valore iniziale di $\frac{1}{2} v^2 - U$). Coincidendo le equazioni differenziali, coincidono naturalmente anche le loro soluzioni, a partire dalle stesse circostanze iniziali.

Abbiamo così riconosciuto che c'è equivalenza completa fra le dette due categorie di movimenti, einsteiniani e newtoniani, la variabile indipendente essendo la stessa nei due casi; il che consente di identificare, nelle supposte circostanze, il tempo cosmico dei problemi einsteiniani col tempo assoluto dei corrispondenti problemi newtoniani.

3. Raffronto col risultato precedente.

Ad illustrazione del perfezionamento testè raggiunto, mi permetto di richiamare, nei suoi elementi essenziali, il procedimento, che avevo seguìto nella Nota lincea del 1926 (e che è sviluppato nei libri citati), per interpretare il moto einsteiniano, definito dalle (3), (4), nell'àmbito dello schema newtoniano.

Si stabiliva allora in primo luogo che, nel problema einsteiniano, sussiste l'integrale primo

$$\frac{1}{2}\left(1 + 4\frac{U}{c^2}\right)v^2 - U + \frac{U^2}{c^2} = E_0 \qquad (E_0 \text{ costante}),$$

e che il fascio di traiettorie, lungo cui E_0 ha un valore ben determinato, coincide con un fascio di traiettorie newtoniane nel campo di potenziale U_1, e precisamente col fascio cui compete lo stesso valore E_0 dell'energia totale, per cui cioè

$$\frac{1}{2}v^2 - U_1 = E_0 . \qquad (13)$$

Su quest'ultimo fascio la legge newtoniana del moto non è identica alla einsteiniana; ma si può passare dall'una all'altra con un semplice cambiamento di tempo.

La indagine attuale mostra che è possibile evitare il cambiamento di tempo, facendo però intervenire un fascio (leggermente) diverso dello stesso problema newtoniano ausiliario: ossia, non il fascio (13), in cui la costante del secondo membro è E_0, ma un fascio la cui costante E abbia un valore effettivamente assunto dal primo membro, in corrispondenza ad un qualche atto del movimento einsteiniano preso a considerare; per es. l'atto di moto iniziale (risultando irrilevante, nella approssimazione adottata, l'attribuzione ad E di uno o di un altro di *questi* valori).

Meccanica. — *La sicurezza dei velivoli all'incontro con una raffica ascendente.* Nota del Corrisp. G. A. Crocco.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Osservazione sopra due funzioni analitiche che soddisfano ad una particolare condizione.* Nota di G. Sestini, presentata [1] dal Corrisp. U. Cisotti.

Il prof. U. Cisotti in una Nota di questi « Rendiconti » [2] dà due semplici formule integrali che individuano due funzioni analitiche f ed f_1 regolari, la f in un campo piano semplice C, interno ad una linea chiusa c, la f nel rimanente piano C_1 esterno a c, in funzione della comune parte reale φ preventivamente assegnata su c, *a condizione che* f *ed* f_1 *siano coniugate sul contorno*. Questa condizione è sempre verificata quando C è un cerchio od un semipiano, tenendo presente che, nel primo caso, la verificano soltanto i punti del contorno, mentre nel secondo risulta soddisfatta per ogni coppia di punti simmetrici rispetto alla retta origine del semipiano. L'Autore ne deduce in particolare la nota formula di Schwarz per il cerchio.

La condizione richiesta è evidentemente molto restrittiva. Basta pensare che sia per il problema interno che per quello esterno, assegnata φ, restano individuate, a meno di costanti, la f e la f_1 e quindi anche le loro parti immaginarie, nei rispettivi campi ed in particolare su c. Il richiedere che queste su c siano uguali e contrarie vincola necessariamente i valori assegnabili per la φ, oppure vincola la configurazione di c.

Sarebbe interessante naturalmente ricercare se, per un assegnato c, esistono e quali sono le funzioni φ dei punti di c per cui detta condizione risulta verificata, oppure ricercare, se esistono, oltre alla circonferenza ed alla retta, altri contorni aventi la proprietà che due funzioni f ed f_1, aventi su c la stessa parte reale, comunque assegnata, sono complesse e coniugate su c. In questa piccola Nota mi limito a dimostrare che, nel caso in cui c è una ellisse, la sola funzione $\varphi =$ costante soddisfa la condizione imposta.

Il contorno c sia l'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \,, \quad a > b.$$

Introduciamo la nuova variabile complessa

$$(1) \qquad Z = \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - (a^2 - b^2)}}{a + b} \,,$$

(1) Nella seduta del 2 dicembre 1934.

(2) U. Cisotti, *Sulla determinazione di una funzione analitica nota la parte reale su contorno*, questi « Rendiconti », ser. 6ª, vol. XIX, 1° sem., pp. 527–531 (1934).

il radicale essendo determinato in modo che risulti $|Z| \geqq q$, dove si è posto

$$q = \frac{a - b}{a + b} < 1.$$

La (1), per $|Z| \leqq 1$, rappresenta in modo conforme il campo C privato del tratto focale sulla corona circolare Γ di raggi rispettivamente 1 e q del piano Z. La stessa trasformazione rappresenta, per $|Z| \geqq 1$, conformemente il campo C_1 nel campo Γ_1, costituito dal piano Z forato dal cerchio $|Z| \leqq 1$. Sul contorno comune ai due campi è

$$Z = e^{i\vartheta},$$

con ϑ anomalia eccentrica dei punti dell'ellisse c.

La parte reale assegnata su c tanto per f che per f_1, in funzione dell'anomalia eccentrica ϑ, può esprimersi mediante la seguente serie di Fourier:

$$\varphi = \alpha_0 + \sum_1^\infty{}_n (a + b)^n \{\alpha_n (1 + q^n) \cos n\vartheta - \beta_n (1 - q^n) \operatorname{sen} n\vartheta\},$$

dove le α e β sono costanti reali [1].

La richiesta funzione $f(\zeta)$, regolare in C, con riferimento ai punti della corona circolare Γ, è data in funzione di Z dalla serie di Laurent:

$$f = \alpha_0 + i\beta_0 + \sum_1^\infty{}_n (\alpha_n + i\beta_n)(Z^n + q^n Z^{-n}),$$

le costanti α e β essendo quelle assegnate [2].

La richiesta funzione $f_1(\zeta)$, regolare in C_1, con riferimento ai punti di Γ_1, è data dalla serie di potenze negative di Z:

$$f_1 = \alpha_0 + i B_0 + \sum_1^\infty{}_n \{\alpha_n (1 + q^n) - i\beta_n (1 - q^n)\} Z^{-n},$$

dove le α e β sono le costanti assegnate e B_0 costante reale arbitraria.

(1) Cfr. U. Cisotti, *Idromeccanica piana*. Parte 1ª, pp. 14-16, Editrice Politecnica, Milano, 1921.

(2) Si rilevi che la maggiore connessione portata al campo C dal taglio fatto col segmento focale e che conduce poi alla corona circolare Γ nel piano Z, non costituisce alcun inconveniente per la rappresentabilità della f analitica ed uniforme in tutti i punti di C, mediante la data serie di Laurent. Cfr. M. Picone, *Appunti di Analisi superiore*, pp. 355-361, in corso di stampa.

Si controlla facilmente che su c, dove $Z = e^{i\vartheta}$, le due funzioni hanno la stessa parte reale φ assegnata. Per i coefficienti dell'immaginario ψ e ψ_1 su c si ha invece

$$\psi = \beta_0 + \sum_1^\infty{}_n (a+b)^n \{\beta_n (1 + q^n) \cos n\vartheta + \alpha_n (1 - q^n) \operatorname{sen} n\vartheta\},$$

$$\psi_1 = B_0 - \sum_1^\infty{}_n (a+b)^n \{\alpha_n (1 + q^n) \operatorname{sen} n\vartheta + \beta_n (1 - q^n) \cos n\vartheta\}.$$

È facile ora rilevare che in generale ψ e ψ_1 sul contorno sono due distinte funzioni di ϑ e che se s'impone la condizione $\psi_1 = -\psi$ su c deve essere

$$\begin{cases} B_0 = -\beta_0, \\ \alpha_n (1 + q^n) = \alpha_n (1 - q^n), \quad \beta_n (1 - q^n) = \beta_n (1 + q^n), \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Queste condizioni sono soddisfatte, per $q > 0$, solamente quando è

$$\alpha_n = \beta_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

In conseguenza i valori φ assegnati su c si riducono a

$$\varphi = \alpha_0 = \text{costante}$$

e costante diventano pure f ed f_1.

Per $q = 0$ e solo allora, nel qual caso c è una circonferenza, le condizioni sono verificate qualunque siano le costanti α e β e quindi qualunque sia la φ su c.

Matematica (Geometria). — *Proprietà in grande delle linee piane convesse: Sulla curvatura degli archi convessi soggetti a date condizioni agli estremi.* Nota I di B. SEGRE, presentata[1] dal Socio F. SEVERI.

In un lavoro di prossima pubblicazione, stabilirò numerose *proprietà in grande* – quasi tutte relative alle curvature – *delle linee piane convesse.* In esso, con una semplicità estrema di mezzi, inquadrerò da un unico punto di vista vari teoremi noti sull'argomento, facendoli discendere da proposizioni generali; e ne otterrò parecchi altri completamente nuovi.

Nella presente Nota, ed in altre due che la seguiranno, espongo senza dimostrazioni i principali risultati a cui perverrò nel suddetto lavoro.

1. Le linee che considereremo nel seguito si supporranno sempre piane, tutte al finito, e dotate in ogni punto di tangente e di curvatura non nulla, variabile da punto a punto con continuità[2].

Una linea aperta si chiamerà anche un arco, e si dirà convessa quando – insieme alla corda relativa – racchiude una superficie convessa. Se un punto percorre di moto continuo un arco convesso, la tangente in esso ruota sempre nel medesimo verso: l'angolo (compreso fra 0 e 2π) di cui la tangente complessivamente ruota, si denominerà – col MUKHOPADHYAYA – la deflessione totale od anche semplicemente la deflessione dell'arco considerato.

È ovviamente la stessa cosa dire che *un arco convesso ha deflessione totale* π, o dire che *le tangenti nei suoi estremi risultano fra loro parallele.* Supposto invece che queste tangenti si incontrino, si ha che *la deflessione dell'arco è minore o maggiore di* π, *rispettivamente a seconda che l'arco è – tranne gli estremi – tutto interno o tutto esterno al triangolo determinato dalla sua corda e dalle due tangenti suddette.*

Una linea chiusa convessa, e cioè che racchiuda una superficie piana convessa, si dirà brevemente (secondo l'uso) un'ovale; la sua deflessione totale risulta in ogni caso *uguale a* 2π.

2. Se due archi convessi complanari, distinti, con deflessioni totali non superiori a π, hanno gli stessi estremi, stanno da una medesima banda

(1) Nella seduta del 2 dicembre 1934.

(2) Tali linee sono dunque curve intuitive nel senso di SEVERI: ved. F. SEVERI, *Le curve intuitive,* «Rendic. del Circolo Mat. di Palermo», to. 54 (1930), p. 51, ove – fra l'altro – trovansi precisate le nozioni sugli estremi di dette linee.

rispetto alla congiungente di questi e di più si toccano in (almeno) uno di tali estremi, i due archi, o due loro convenienti porzioni, possono venir riferiti biunivocamente per parallelismo di tangenti. Ebbene, *la differenza fra le curvature dei due archi in punti corrispondenti assume sia valori negativi che valori positivi*, onde *esiste sempre almeno una coppia di punti, dei due archi, in cui le tangenti relative risultano parallele e le rispettive curvature uguali fra loro.*

Un corollario immediato di questa proposizione, notevole in quanto – a differenza di essa – non fa intervenire alcuna restrizione per le deflessioni delle linee che considera, può venir così enunciato:

Se due archi convessi $\mathfrak{L}$ *ed* $\mathfrak{L}'$ *hanno a comune gli estremi* O, Q *e si toccano in un punto interno* P, *per le loro curvature valgono ancora le conclusioni del teorema precedente; può far solo eccezione il caso in cui coincidano gli archi parziali di* $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$ *aventi per estremi* O, P, *oppure quelli aventi per estremi* P, Q. *E lo stesso può dirsi (al limite per* $Q \to O$*) relativamente a due ovali fra loro bitangenti.*

Da qui segue subito il fatto noto [1] che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un'ovale $\mathfrak{C}$ *possa rotolare liberamente dentro ad una seconda ovale* $\mathfrak{C}'$, *è che nessun raggio di curvatura di* $\mathfrak{C}$ *sia maggiore di qualche raggio di curvatura di* $\mathfrak{C}'$, *ossia che il massimo raggio di curvatura di* $\mathfrak{C}$ *non superi il minimo raggio di curvatura di* $\mathfrak{C}'$.

Risulta anzi, di più, che:

Se le ovali $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ *soddisfanno alle condizioni dianzi enunciate, quando* $\mathfrak{C}$ *si fa rotolare comunque dentro* $\mathfrak{C}'$ *le due ovali non possono avere più di un punto (di contatto) comune, escluso solo il caso in cui* $\mathfrak{C}$ *e* $\mathfrak{C}'$ *contengano due archi di cerchio col medesimo raggio, e le si pongano a contatto in punti di tali archi.*

3. Fissiamo comunque, nel piano, due punti distinti O, Q e due rette o, q, la prima passante per O ma non per Q, la seconda passante per Q ma non per O. In base alla prima proposizione del n. 2, un qualunque arco convesso la cui deflessione totale non superi π, e che inoltre abbia O, Q, come estremi ed o, q come relative tangenti, ammette in almeno un punto interno curvatura uguale a quella della circonferenza che passa per O, Q, toccando in O la o (oppure toccando in Q la q). Si presenta così la questione di sapere quali sono tutti i valori necessariamente assunti dalla curvatura di ogni arco che soddisfi alle suddette condizioni; ad essa si risponde facilmente poggiando sul teorema ricordato e sulle seguenti considerazioni.

(1) Ved. W. Blaschke, *Kreis und Kugel* (Leipzig, Veit, 1916), p. 114; S. Mukhopadhyaya, *Circles Incident on an Oval of undefined Curvatures*, « Tôhoku Math. Journ. », to. 34 (1931), p. 115, oppure *Collected geometrical papers*, par. II (Calcutta, University Press, 1931), p. 292. Nell'ultimo lavoro citato è già usata la parola " deflexion ", nel senso da noi indicato al n. 1.

Due archi $\mathfrak{L}, \mathfrak{L}'$ convessi complanari, aventi la (medesima) deflessione totale non superiore a π, siano riferiti fra loro per parallelismo di tangenti; e si supponga che la distanza di un estremo di $\mathfrak{L}$ dalla tangente ad $\mathfrak{L}$ nell'altro estremo, sia uguale alla distanza fra gli elementi omologhi di $\mathfrak{L}'$. Allora, se si esclude che $\mathfrak{L}, \mathfrak{L}'$ siano sovrapponibili, si ha che *la differenza fra le curvature di* $\mathfrak{L}, \mathfrak{L}'$ *in punti omologhi assume sia valori positivi che valori negativi,* onde in ogni caso *esistono sempre* (*almeno*) *due punti omologhi di* $\mathfrak{L}, \mathfrak{L}'$ *in cui i due archi hanno curvature uguali.*

4. Per enunciare i risultati a cui si perviene nel modo rapidamente accennato al n. 3, distinguiamo due casi *a*), *b*), secondochè le rette o, q ivi considerate sono o non sono parallele fra loro.

a) Date nel piano due rette o, q fra loro parallele e distanti δ, e fissati comunque un punto O sulla o ed un punto Q sulla q, ogni arco $\mathfrak{L}$ convesso avente questi punti come estremi e le rette o, q come relative tangenti, ammette in almeno un punto interno *raggio di curvatura uguale a* $\frac{1}{2}\delta$.

Nel caso in cui la retta OQ sia perpendicolare alle o, q, i raggi di curvatura di $\mathfrak{L}$ possono *assumere solo tale valore* (ed allora $\mathfrak{L}$ riducesi ad una *semicirconferenza*); altrimenti assumono anche effettivamente sia *valori minori* che *valori maggiori di* $\frac{1}{2}\delta$.

Se invece la retta OQ forma colle o, q un angolo acuto ω, il *minimo* $m_{\mathfrak{L}}$ ed il *massimo* $M_{\mathfrak{L}}$ *dei raggi di curvatura* di $\mathfrak{L}$ verificano sempre le:

$$0 < m_{\mathfrak{L}} < \frac{\delta}{2} < \frac{\delta}{2 \operatorname{sen}^2 \omega} < M_{\mathfrak{L}}.$$

Inoltre *detto minimo e detto massimo possono rispettivamente assumere ogni valore che soddisfi a queste limitazioni,* bastando all'uopo scegliere opportunamente l'arco $\mathfrak{L}$.

L'ultima frazione risulta semplicemente uguale al raggio della circonferenza passante per O e tangente in Q alla q.

b) Preso un qualunque triangolo OPQ, denotiamo con ω, h, k rispettivamente l'ampiezza del suo angolo in P e le misure delle altezze relative ai lati PQ, PO. Consideriamo quindi gli infiniti archi convessi $\overset{\frown}{OQ}$ che sono interni al triangolo OPQ, tranne gli estremi – coincidenti con QO – nei quali tali archi tocchino ordinatamente i lati suddetti.

Se è:

$$h = k = \delta \qquad \left(\text{ossia } OP = PQ = \frac{\delta}{\operatorname{sen} \omega}\right),$$

fra le linee in questione vi è un *arco di cerchio*, di raggio $\frac{\delta}{1+\cos\omega}$; ciascun'altra di tali linee ha punti in cui *il raggio di curvatura è minore* e punti in cui *il raggio di curvatura è maggiore* del raggio suddetto, onde *esiste sempre* (*almeno*) *un punto interno in cui il raggio di curvatura vale precisamente* $\frac{\delta}{1+\cos\omega}$.

Se, invece, è ad esempio:

$$h < k \qquad (\text{ossia } OP < PQ),$$

il *minimo* $m_{\mathfrak{L}}$ ed il *massimo* $M_{\mathfrak{L}}$ *dei raggi di curvatura* di un qualunque arco $\mathfrak{L}$ soggetto alle condizioni enunciate in principio, verificano le:

$$0 < m_{\mathfrak{L}} < \frac{h}{1+\cos\omega} < \frac{h^2 - 2hk\cos\omega + k^2}{2h\,\mathrm{sen}^2\omega} < M_{\mathfrak{L}}.$$

Inoltre *detto minimo e detto massimo possono separatamente assumere valori arbitrari soddisfacenti a queste limitazioni*, bastando all'uopo scegliere opportunamente l'arco $\mathfrak{L}$.

Le due frazioni scritte poc'anzi, hanno i seguenti semplici significati geometrici. La prima è uguale al raggio della circonferenza tangente in O ad O P, che di più tocca il lato P Q (in un conveniente punto interno); la seconda invece risulta uguale al raggio della circonferenza passante per O, Q, e tangente in Q alla retta P Q.

Meccanica. — *Gruppi di onde associati a sciami di elettroni.* Nota di G. Peretti, presentata [1] dal Corrisp. U. Cisotti.

Il prof. Finzi, in due suoi lavori, ha esteso il concetto di velocità di gruppo, stabilito da Lord Rayleigh, Reynolds e Stokes per onde piane e sinusoidali, ai gruppi di onde che si possono associare ad un generico fenomeno fisico, ed ha mostrato come sia possibile caratterizzare dei gruppi del primo, secondo, terzo ordine ed associare al loro movimento, rispettivamente, quello di una superficie, di una linea, di un punto ove concordano le fasi delle onde del gruppo [2].

È fine di questa Nota di associare, in particolare, un gruppo di onde al movimento di uno sciame di elettroni soggetti all'azione di un campo elettrico costante. Non mi sembra priva di interesse la seguente conclusione alla quale si perviene:

Mentre le traiettorie di ogni elettrone dello sciame sono parabole, ed il campo è volto verso la loro convessità, può avvenire che il gruppo del secondo ordine associato allo sciame, sia caratterizzato da una traiettoria che volge da banda opposta a quella delle precedenti parabole. In modo cioè da richiamare il comportamento di un corpuscolo di carica positiva, anzichè negativa, che si muova nelle stesse condizioni.

1. *Generalità.* - In una delle Note citate, Finzi ha mostrato che se si ritiene che ciascuna onda del gruppo sia caratterizzata da un particolare valore ν_0 di un certo parametro ν (ad esempio della frequenza), e se si considerano tutte quelle onde individuate dai valori di ν compresi in un intorno del primo ordine del valore ν_0, è possibile associare al moto del gruppo, quello di una superficie σ_1 sulla quale concordano le fasi delle onde del gruppo. Di questa superficie ha dato anche la velocità di avanzamento in direzione normale.

Se poi si ritiene che ν possa variare in un intorno del secondo ordine del valore ν_0, al movimento del gruppo si può associare quello di una linea λ, ed infine, se ν assume valori compresi in un intorno del terzo ordine di ν_0 si può associare al movimento del gruppo quello di un punto G.

E precisamente, se $\tau(t, P, \nu) = \text{cost.}$ è in ogni istante l'equazione della superficie d'onda σ e $\varphi(\nu, \tau)$ è la fase di una generica propagazione ondosa,

(1) Nella seduta del 2 dicembre 1934.

(2) B. Finzi, *Velocità di gruppo per onde associate a fenomeni.* Questi « Rendiconti », vol. XVI, p. 489, 1932-XI; B. Finzi, *Movimenti di superfici, linee, punti, associati a gruppi di onde.* Questi « Rendiconti », vol. XVII, p. 460, 1933-XI.

la superficie σ_1 ha l'equazione $\varphi' = 0$, dove con φ' si intende la derivata totale di φ rispetto al parametro ν.

La linea λ è definita come intersezione della superficie σ_1 con la superficie di equazione $\varphi'' = 0$, ed il punto G, come intersezione delle tre superfici: $\varphi' = 0$ $\varphi'' = 0$ $\varphi''' = 0$.

D'altra parte, le ricerche di Hugoniot e Hadamard, permettono di associare una propagazione ondosa ad ogni fenomeno fisico che sia tradotto matematicamente da un sistema di equazioni differenziali [1]. Le considerazioni precedenti vengono così ad assumere un notevole interesse nelle loro applicazioni a tali fenomeni.

Ma queste propagazioni ondose, possono anche farsi dipendere da opportuni sistemi hamiltoniani individuanti le bicaratteristiche, che si possono interpretare come linee orarie di corpuscoli in movimento. È questo, in sostanza, il punto di vista del classico problema di Hamilton–Jacobi, consistente nell'associare una propagazione ondosa al movimento di corpuscoli che obbediscono alle ordinarie equazioni della meccanica.

In questa nota, come è stato accennato, ci si occupa, in particolare, di determinare la propagazione ondosa associata al movimento di uno sciame di elettroni soggetti all'azione di un campo elettrico di intensità nota e costante.

Se si ritiene poi, che ciascuna particella abbia una propria energia E, e che all'istante iniziale le posizioni e le velocità delle varie particelle siano diverse, sarà possibile associare a tale fenomeno un gruppo di onde assumendo come parametro l'energia totale E, o meglio, una grandezza ν ad essa proporzionale. Potremo così determinare la superficie σ_1, la linea λ ed il punto G.

Limiterò per semplicità il mio studio al caso che tutte le traiettorie stiano in un piano, con che, di σ_1 e di λ mi limiterò a studiare le tracce su tale piano, e non si potrà parlare di gruppo del terzo ordine.

2. *Propagazione ondosa associata al movimento dello sciame.* – Supponiamo che il movimento dello sciame di elettroni avvenga in un campo uniforme di intensità costante k, e sia tale da agire sopra ciascuna particella (che ha carica negativa), con una forza diretta parallelamente all'asse delle y nel verso delle y negative. Se con e si indica la carica elettrica dell'elettrone, tale forza sarà espressa da $F = ke$ ed il potenziale ad essa relativo sarà quindi

$$U = key .$$

D'altra parte sappiamo che l'equazione differenziale delle varietà caratteristiche individuante la propagazione ondosa di Hamilton–Jacobi associata

(1) Cfr. T. Levi-Civita, *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa*. Bologna, 1931.

al movimento di un corpuscolo di massa m, può essere messa sotto la forma

$$\tau' + H = 0$$

dove $\tau = \tau_0$ è l'equazione della superficie d'onda in un generico istante t, τ' la derivata di τ rispetto a t, e:

$$H = \frac{1}{2m} (\text{grad}\, \tau)^2 - U .$$

Se poi, detto h il coefficiente di proporzionalità fra l'energia totale E ed il parametro ν, poniamo $E = h\nu$, potremo dare a τ la forma seguente:

$$\tau = a - h\nu t . \qquad (1)$$

Nella (1), a è l'azione maupertuisiana, e se ν è una frequenza, h ha le dimensioni di un'azione, come avviene appunto se si identifica h con la costante di Planck.

Ne segue allora $\tau' = -h\nu$ e in definitiva l'equazione differenziale delle varietà caratteristiche si può scrivere:

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial y}\right)^2 = 2kemy + 2hm\nu .$$

Di questa equazione differenziale ci interessa un integrale completo, che contenga cioè due costanti arbitrarie fra di loro indipendenti. Un tale integrale si determina molto facilmente, oltre che con i metodi generali, se si ricerca una funzione τ che sia la somma di due funzioni, una della sola x e l'altra della sola y; si perviene così alla seguente espressione:

$$\tau = Ax + \frac{1}{3kem} (2kemy + 2hm\nu - A^2)^{\frac{3}{2}} + B$$

nella quale con A e con B si sono indicate due costanti, rispetto ad x e ad y, che potranno però dipendere per es. da ν. La costante additiva B verrà identificata con $E = h\nu t$, con che sarà:

$$\tau = Ax + \frac{1}{3kem} (T - A^2)^{\frac{3}{2}} + h\nu t$$

avendo posto:

$$2kemy + 2hm\nu = T .$$

3° *Equazione della superficie* σ_t *di gruppo.* – Se mettiamo la fase di ciascuna onda del gruppo sotto la forma: $\varphi = 2\pi\nu\tau$ come ad es. avviene per le onde sinusoidali, sarà:

$$\varphi = 2\pi\nu \left[Ax + \frac{1}{3kem} (T - A^2)^{\frac{3}{2}} + h\nu t \right]$$

e, in relazione a quanto ho precedentemente ricordato, l'equazione della superficie σ, di gruppo potrà scriversi:

$$(2) \qquad x(A + \nu A') + \frac{1}{3\,kem}(T - A^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{\nu}{kem}(T - A^2)^{\frac{1}{2}}(hm - AA') + 2h\nu t = 0$$

nella quale, con A' ho indicato la derivata di A rispetto a ν.

Questa rappresenta in generale nello spazio, una superficie cilindrica mobile, e la sua traccia sul piano xy è una linea mobile la cui velocità di avanzamento in direzione normale si può agevolmente calcolare [1].

4° *Equazione della linea di gruppo.* – Le equazioni della linea λ sono date come ho già detto da: $\varphi' = 0$, $\varphi'' = 0$ con noto significato dei simboli.

Di queste due equazioni, la prima coincide con la (2) e la seconda si ottiene dalla (2) derivandola rispetto a ν. Le equazioni della linea λ saranno in definitiva:

$$(3) \quad \begin{cases} x(A + \nu A') + \frac{1}{3\,kem}(T - A^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{\nu}{kem}(T - A^2)^{\frac{1}{2}}(hm - AA') + \\ \quad + 2h\nu t = 0 \\ x(2A' + \nu A'') + \frac{1}{kem}(T - A^2)^{\frac{1}{2}}(2hm - 2AA' - AA''\nu - A'^2\nu) + \\ \quad + \frac{\nu}{kem}(T - A^2)^{-\frac{1}{2}}(hm - AA')^2 + 2ht = 0 . \end{cases}$$

Queste due equazioni non sono altro che le equazioni parametriche della linea piana che rappresenta il luogo delle successive posizioni della traccia della linea mobile λ, sul piano xy.

In esse si può agevolmente eliminare il parametro t, con che di tale luogo si ottiene l'equazione cartesiana ordinaria sotto la forma:

$$(4) \qquad x\left(A' + \nu A'' - \frac{A}{\nu}\right) = \frac{1}{3\,kem\,\nu}(T - A^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{kem}(T - A^2)^{\frac{1}{2}}(AA' + AA''\nu + A'^2\nu - hm) - \frac{\nu}{kem}(T - A^2)^{-\frac{1}{2}}(hm - AA')^2 .$$

(1) Cfr. B. Finzi, loc. 2° cit., p. 461.

Interessa di far vedere che, essendo le traiettorie parabole, ed essendo il campo volto verso la loro convessità, la curva definita dalla (4) può volgere da parte opposta.

Perchè ciò possa avvenire in un punto, deve in tal punto verificarsi che $\frac{dx}{dy}$ e $\frac{d^2x}{dy^2}$ abbiamo segno opposto, ossia che:

$$\frac{dx}{dy} \cdot \frac{d^2x}{dy^2} < 0 . \tag{5}$$

La (5) è una disuguaglianza alla quale è possibile soddisfare in un intorno di un punto, ad esempio di quello di ordinata $y = 0$. Basta infatti osservare che in un intorno del secondo ordine di tale punto, e nell'intorno del secondo ordine del valore ν_0 di ν nel quale si considera il gruppo (gruppo del secondo ordine), mentre T si riduce alla costante $2\,h\,m\,\nu_0$, A è completamente determinata dalle tre costanti A_0, A_0', A_0''. Con ciò la disuguaglianza (5) si riduce ad una disuguaglianza algebrica nella quale intervengono, la costante $2\,h\,m\,\nu_0$, la costante $k\,m$ e le tre costanti A_0, A_0', A_0''.

Fissati h e k, si vede allora che è sempre possibile, almeno per opportuni valori di ν, determinare le tre costanti A_0, A_0', A_0'', in modo da soddisfare all'unica disuguaglianza (5) ora considerata.

Se per esempio si considera il caso particolare nel quale A si riduca rispetto a ν ad una costante, si può verificare con facilità che in un intorno del punto di ordinata nulla, basta che essa sia scelta in modo che il suo quadrato risulti esterno all'intervallo definito dai valori.

$$0{,}7\,hm\nu_0 \div 4{,}3\,hm\nu_0 .$$

E se si fissano le idee su di un caso concreto nel quale ad es. sia:

$$h\nu_0 = E = 3 \cdot 10^{-12} \text{ erg} \quad , \quad m = 9 \cdot 10^{-28} \text{ gr}$$

dovrà essere A^2 esterno all'intervallo:

$$18{,}9 \cdot 10^{-49} \text{ erg. gr} \div 116{,}1 \cdot 10^{-40} \text{ erg. gr.}$$

Concludendo:

Dato uno sciame di elettroni soggetti ad un campo elettrico costante, mentre la forza del campo è orientata verso la convessità delle traiettorie di ogni particella, può avvenire – per particolari condizioni iniziali di ogni elettrone dello sciame, condizioni legate all'energia dell'elettrone stesso – che il punto che individua un gruppo del secondo ordine associato allo sciame, si muova sopra una curva che piega da parte opposta a quella di tali traiettorie.

Il punto di gruppo descrive dunque una linea che sarebbe propria, invece che ad un corpuscolo di carica negativa, ad un corpuscolo di carica positiva.

Finzi, in una conferenza recentemente tenuta all'Università di Torino, ha accennato a questo possibile comportamento senza darne dimostrazione, comportamento che certo richiama quello dell'elettrone positivo.

Meccanica. — *L'invariante adiabatico di Gibbs–Hertz nel problema ristretto dei tre corpi.* Nota di G. Lampariello, presentata [1] dal Socio T. Levi-Civita.

Come è ben noto, un sistema di equazioni canoniche, la cui funzione H di Hamilton non dipende dal tempo, ammette l'integrale dell'energia

$$H = E,$$

che, nello spazio delle fasi, rappresenta una famiglia di superficie isoenergetiche Σ.

P. Hertz, seguendo le idee di Gibbs, ha mostrato che, se una Σ è chiusa e priva di punti multipli e se quasi tutte le traiettorie praticamente la invadono, il volume della porzione di spazio da essa racchiuso è *invariante* di fronte a variazioni lente (adiabatiche) dei parametri da cui dipende H. Dicesi un *invariante adiabatico.*

T. Levi–Civita ha applicato [2] per primo (1928) questo notevole teorema alla meccanica celeste, considerando il problema dei due corpi, nell'ipotesi che le masse e il semiasse maggiore dell'orbita Kepleriana siano lentamente variabili.

Questa ed altre applicazioni fatte in campi diversi della dinamica analitica sono relative a problemi integrabili.

Non mi consta che sia stato fin qui calcolato l'invariante adiabatico predetto in un problema *non* integrabile.

L'oggetto della presente Nota è un saggio dell'applicazione di cui si parla riguardante il problema ristretto piano dei tre corpi.

Questo caso particolare del famoso problema dei tre corpi fu considerato la prima volta da Jacobi e consiste nel ricercare il moto di un punto P di massa trascurabile attratto con la legge di Newton da due masse puntiformi S, J uniformemente rotanti intorno al loro centro di gravità G.

Pur supponendo che P si muova nel piano del moto di S ed J, il problema offre notevoli difficoltà e non è integrabile.

(1) Nella seduta del 2 dicembre 1934.

(2) *Applicazioni astronomiche degli invarianti adiabatici.* « Atti del Congr. Int. dei matematici ». Bologna, 1928.

Il moto di P sia riferito ad un sistema cartesiano ortogonale $G x_1 x_2$ di origine G, avente per asse delle x_1 la congiungente SJ orientata positivamente da S verso J.

Sia ω la velocità angolare del moto della coppia S, J e

$$V = \frac{\mu_1}{\rho} + \frac{\mu_2}{r} + \frac{1}{2}\omega^2 (x_1^2 + x_2^2)$$

il potenziale unitario dell'attrazione newtoniana e della forza centrifuga sollecitanti P.

Nell'espressione di V è

$$\mu_i = f m_i \qquad (i = 1, 2),$$

avendo indicato con f la costante di Gauss e con m_1, m_2 le masse di S ed J; ρ ed r sono i raggi SP ed SJ.

In una breve Nota dei « Comptes Rendus » [1], Jacobi ha fatto conoscere un integrale (primo) del problema

$$\frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) = V - C, \tag{1}$$

dove C denota una costante arbitraria.

In termini delle variabili canoniche, la (1) è l'integrale dell'energia del problema e $-C$ sta invece dell'energia totale E.

Geometricamente, la (1) rappresenta, nello spazio S_4 delle variabili $x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2$, una famiglia di varietà algebriche Σ a tre dimensioni, estendentisi all'infinito.

Per il seguito importa osservare che, attese le relazioni intercedenti tra i momenti cinetici del problema e le $\dot{x}_1, \dot{x}_2$

$$\begin{cases} p_1 = \dot{x}_1 - \omega x_2 \\ p_2 = \dot{x}_2 + \omega x_1, \end{cases}$$

il volume di una qualunque porzione dello spazio delle fasi eguaglia quello della corrispondente porzione dello spazio S_4.

Per il nostro scopo non è poi necessario, come vedremo tra breve, considerare tutta la porzione racchiusa da una Σ.

Invero, l'invariante adiabatico che si vuol calcolare

$$I = \int d\dot{x}_1\, dx_2\, d\dot{x}_1\, d\dot{x}_2$$

(1) *Sur le mouvement d'un point et sur un cas particulier du problème des trois corps*, to. III, p. 59.

si può anche scrivere

$$I = \int u \, du \, dv \, dx_1 \, dx_2 ,$$

avendo posto

$$\dot{x}_1 = u \cos v \quad , \quad \dot{x}_2 = u \sin v .$$

Con le variabili x_1 , x_2 , u , v, le superficie Σ sono così rappresentate dall'equazione

$$u^2 = 2 (V - C) ,$$

di cui il 2° membro dipende soltanto da x_1 , x_2.

Perciò le integrazioni rispetto ad u e v si possono senz'altro eseguire e l'invariante assume l'aspetto

$$I = 2\pi \int (V - C) \, dx_1 \, dx_2 ,$$

il campo d'integrazione essendo caratterizzato dalla limitazione

$$V \geqq C .$$

Le curve

(2) $$V = C$$

(del piano x_1 , x_2) lungo le quali, in virtù dell'integrale di Jacobi, la velocità di P è nulla, sono state studiate la prima volta da Hill nelle sue classiche ricerche riguardanti le soluzioni periodiche del problema.

Lo studio qualitativo [1] di queste curve di Hill ha posto in luce che per valori C_0 abbastanza grandi della costante di Jacobi C, l'equazione

$$V = C_0$$

definisce tre curve chiuse di cui due avvolgono separatamente i centri S , J e la terza avvolge le prime due.

La diseguaglianza

$$V \geqq C_0$$

è quindi soddisfatta in tre campi distinti del piano x_1 , x_2, due limitati ed uno illimitato.

A ciascuna delle tre curve predette corrisponde nello spazio S_4 una falda della superficie Σ.

La falda corrispondente alla curva di Hill che avvolge i due centri limita una porzione dell'S_4 illimitata il cui volume non è finito.

(1) Cfr. C. L. Charlier, *Die Mechanik des Himmels*, zw. Bd.; F. R. Moulton, *Celestial mechanics*.

Consideriamo pertanto una delle altre due falde, per es. quella che limita la porzione di spazio S_4 alla cui intersezione σ col piano x_1, x_2 appartiene S. Si riconosce facilmente che essa è priva di punti multipli.

Sia C_0 il valore della costante di Jacobi cui corrisponde la curva di Hill che limita σ.

Trattasi specificamente di calcolare l'integrale

$$\int_\sigma (V - C_0)\, dx_1\, dx_2 .$$

Se con $d\sigma$ si denota l'elemento d'area di σ, mentre C è genericamente il valore della costante di Jacobi che compete ad una curva di Hill interna a σ, possiamo concludere che è invariante l'integrale

$$I = \int_\sigma (C - C_0)\, d\sigma .$$

A quest'integrale si può attribuire una forma particolarmente espressiva.

Notiamo che

$$d\sigma = ds\, dn ,$$

essendo ds l'elemento d'arco della generica curva di Hill e dn l'elemento della normale esterna.

Inoltre

$$\frac{dV}{dn} = \Delta_1 V ,$$

essendo $\Delta_1 V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2}$ (parametro differenziale primo di V), quindi

$$dn = \frac{dV}{\Delta_1 V} .$$

Dunque

$$d\sigma = dC \frac{ds}{\Delta_1 V} .$$

Se si indica con A (C) l'area del campo racchiuso dalla curva di Hill che corrisponde a C (e che avvolge solo S) e si osserva che al valore ∞ di C corrisponde il centro S, si ha

$$A(C) = \int_\infty^C dC \int_l \frac{ds}{\Delta_1 V} ,$$

l'integrazione curvilinea essendo estesa alla curva di Hill corrispondente ad un valore della costante di Jacobi non minore di C.

Ciò posto, l'area dA compresa tra le curve di Hill corrispondenti a C e $C + dC$ è

$$dA = dC \int_\gamma \frac{ds}{\Delta_1 V}, \tag{3}$$

mentre l'espressione di I, facendovi apparire come variabili d'integrazione C ed s, assume l'aspetto

$$\int_\infty^{C_0} (C - C_0)\, dC \int_\gamma \frac{ds}{\Delta_1 V}$$

od anche, attesa la (3)

$$I = \int_\infty^{C_0} (C - C_0)\, dA\,(C).$$

Applicando l'integrazione per parti e notando che la parte finita

$$\{ (C - C_0)\, A\,(C) \}_\infty^{C_0}$$

è nulla, si ha in definitiva

$$I = \int_{C_0}^{\infty} A\,(C)\, dC\,.$$

È questa dunque l'espressione finale cui si riduce concettualmente l'invariante adiabatico.

Per il calcolo effettivo conviene però sostituire a C la variabile ζ tale che

$$\zeta = \frac{\mu_1}{C}\,. \tag{4}$$

Ponendo allora

$$\zeta_0 = \frac{\mu_1}{C_0}, \tag{4'}$$

si ha

$$I = \mu_1 \int_0^{\zeta_0} \frac{d\zeta}{\zeta^2} A\,(C)\,.$$

Se ρ denota il raggio vettore che va da S ad un punto generico della curva di Hill $V = C$, l'area $A\,(C)$ racchiusa da questa è data da

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2\, d\vartheta$$

e si ha quindi

$$I = \mu_1 \int_0^{\zeta_0} \frac{d\zeta}{\zeta^2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2 \, d\vartheta .$$

La questione si pone dunque di esprimere il raggio vettore ρ in funzione di ϑ per la generica curva $V = C$, ossia, in definitiva, di assegnare ρ in funzione delle variabili ζ, ϑ.

A tale scopo poniamo

$$W = \frac{\rho}{\mu_1} \left[\frac{\mu_2}{r} + \frac{1}{2} \omega^2 (x_1^2 + x_2^2) \right]$$

ed esprimiamo W in funzione di ρ e ϑ.

Se si assume come unitaria la distanza S J e si indica con a l'ascissa di G rispetto ad S, si trova

$$\begin{cases} a = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} \\ \dfrac{1}{r} = (1 + \rho^2 - 2\rho \cos\vartheta)^{-\frac{1}{2}} \\ x_1^2 + x_2^2 = a^2 + \rho^2 - 2a\rho\cos\vartheta . \end{cases}$$

Si ha così

$$W(\rho, \vartheta) = \frac{\mu_2}{\mu_1} \rho \varphi(\rho, \vartheta) ,$$

avendo posto

$$k^2 = \frac{\omega^2}{\mu_2} ,$$

$$\varphi(\rho, \vartheta) = (1 + \rho^2 - 2\rho\cos\vartheta)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} k^2 (a^2 + \rho^2 - 2a\rho\cos\vartheta) .$$

La funzione $\varphi(\rho, \vartheta)$ al pari di W è analitica, regolare, qualunque sia ϑ, in un campo conveniente al quale sia interno il punto $\rho = 0$.

Lo sviluppo tayloriano di $\varphi(\rho, \vartheta)$ nell'intorno di questo punto è

$$\varphi(\rho, \vartheta) = \alpha + \beta\rho + \gamma\rho^2 + P_3(\cos\vartheta)\rho^3 + P_4(\cos\vartheta)\rho^4 + \cdots ,$$

essendo

$$\begin{cases} \alpha = 1 + \dfrac{1}{2} k^2 a^2 \\ \beta = (1 - ak^2)\cos\vartheta \\ \gamma = \dfrac{1}{2}(k^2 + 3\cos^2\vartheta - 1) \end{cases}$$

e $P_n(x)$ l'n — *mo* polinomio di Legendre.

Ciò posto, l'equazione (2) diviene

$$\rho = \zeta\,(1 + W(\rho, \vartheta)) \tag{5}$$

ed è del tipo

$$\rho = \zeta + \varkappa\, W(\rho, \vartheta).$$

Questa ammette la radice $\rho = \zeta$ per $\varkappa = 0$ e definisce ρ in funzione analitica di $\varkappa$, regolare in un intorno di $\varkappa = 0$ e riducentesi a ζ per $\varkappa = 0$.

Lo sviluppo tayloriano nell'intorno di questo punto di una funzione $f(\rho)$ è dato dalla celebre serie di Lagrange

$$f(\rho) = f(\zeta) + \sum_1^\infty{}_n \frac{\varkappa^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} \{ W^n(\zeta, \vartheta) f'(\zeta) \}.$$

Per il nostro scopo occorre lo sviluppo di ρ^2 nel quale si avrà cura di sostituire $\varkappa$ con ζ conformemente al tipo dell'equazione (5).

Integrando rispetto a ϑ, si ha

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2\, d\vartheta = \pi\zeta^2 + \sum_1^\infty{}_n \frac{\zeta^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} \left\{ \zeta \int_0^{2\pi} W^n(\zeta, \vartheta)\, d\zeta \right\}.$$

Dunque, in definitiva, l'invariante è

$$I = \pi\mu_1\zeta_0 + \mu_1 \sum_1^\infty{}_n \frac{\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^n}{n!} F_n(\zeta_0), \tag{6}$$

avendo posto

$$\begin{cases} f_n(\zeta) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi^n(\zeta, \vartheta)\, d\vartheta \\ F_n(\zeta_0) = \displaystyle\int_0^{\zeta_0} \zeta^{n-2} \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} \left(\zeta^{n+1} f_n(\zeta)\right) d\zeta. \end{cases}$$

Poichè è $f_n(0) \neq 0$, la funzione sotto il segno dell'integrale che dà $F_n(\zeta_0)$ è infinitesima di ordine n per $\zeta \to 0$ e quindi $F_n(\zeta_0)$ è infinitesima di ordine $n+1$ per $\zeta_0 \to 0$.

Si osserverà che, quando siano calcolate le funzioni $f_n(\zeta)$, il calcolo delle $F_n(\zeta_0)$, per $n > 2$, implica solo derivazioni.

Non possiamo qui intrattenerci sui dettagli algoritmici. Solo vogliamo osservare che, a norma della relazione (4), se si vogliono spingere i calcoli fino all'esattezza della 5ª cifra decimale, in conformità ai procedimenti usati da *Strömgren* e i suoi collaboratori, all'Osservatorio astronomico di Cope-

naghen, ritenendo per C valori maggiori di 10, basterà trascurare nella serie (6) i termini in ζ_0 infinitesimi del 6° ordine. Ciò equivale a considerare

$$\varphi(\rho, \vartheta) = \alpha + \beta\rho + \gamma\rho^2 .$$

Si trova

$$I = \mu_1 \left[\zeta_0 + \frac{\mu_2}{\mu_1} \alpha \zeta_0^2 + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right) \alpha^2 \zeta_0^3 + \right.$$

$$\left. + \left\{ \frac{1}{4} \frac{\mu_2}{\mu_1} \left(k^2 + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^3 \alpha^3 \right\} \zeta_0^4 + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^4 \alpha^4 \zeta_0^5 \right] .$$

Si osservi che, ponendo nella (6) $\omega = 0$, si ottiene l'invariante adiabatico del problema dei due centri fissi, il quale, come è noto, è integrabile.

Si osservi anche che se nella serie (6) si pone $\mu_2 = 0$ si ottiene il teorema di Levi–Civita che esprime l'invarianza del prodotto dell'asse maggiore dell'orbita kepleriana per la massa totale.

Invero, per $\mu_2 = 0$, si ha per la (4′) sostituendo C_0 con C

$$I = \mu_1 \zeta_0 = \frac{\mu_1^2}{C} = -\frac{f^2 m_1^2}{C} ;$$

ma $-C = E$ ed

$$E = -\frac{f m_1}{2a} ,$$

dunque

$$I = 2 f m_1 a .$$

Aggiungiamo che le considerazioni svolte nella presente Nota si possono adattare ad altri problemi dinamici a due gradi di libertà per i quali valga l'integrale delle forze vive.

Meccanica. — *Questioni di elasticità vincolata.* I. *Componenti di deformazione e potenziale elastico in coordinate qualsivogliano.* Nota di E. Volterra, presentata [1] dal Socio T. Levi-Civita.

1. Generalità.

In una precedente Nota preliminare pubblicata su questi « Rendiconti » [2], ho indicato un nuovo metodo generale di studio delle deformazioni dei solidi elastici allungati (ad asse sia rettilineo che curvilineo), il quale conduce in modo sistematico e semplice alla soluzione dei più importanti problemi di statica elastica.

Tale metodo, ha il vantaggio, dal lato analitico, di ricondurre i problemi dell'elasticità ad equazioni differenziali ordinarie (anzichè ad equazioni alle derivate parziali).

Mostrai allora come si potessero rapidamente assegnare le equazioni delle deformazioni dei solidi ad asse rettilineo ed accennai come, mediante la medesima ipotesi di elasticità vincolata, cioè ammettendo la conservazione delle sezioni piane normali, si potessero studiare molti casi interessanti le applicazioni pratiche. Ritorno ora più diffusamente sull'argomento per stabilire in primo luogo, nella forma che più conviene allo scopo, varie espressioni di elementi geometrici ed elastici che conseguono dalla ipotesi del vincolo geometrico, espressioni, mediante le quali si perviene alle equazioni differenziali ordinarie da cui dipende la deformazione, sotto una sollecitazione assegnata. In queste equazioni compariscono, oltre alle incognite, la curvatura e la torsione della direttrice, le costanti elastiche del materiale e alcune caratteristiche globali delle sezioni. Per gli sviluppi analitici mi servirò dei metodi del calcolo differenziale assoluto che permettono di arrivare fino alle equazioni differenziali con rapidità ed eleganza.

Incomincerò, in questa comunicazione, con richiami di cose note: componenti di deformazione e potenziale elastico di un corpo isotropo in coordinate generali, per potermene più agilmente servire in Note successive.

(1) Nella seduta del 2 dicembre 1934.

(2) Ved.: E. Volterra, *Elasticità vincolata e sua schematizzazione matematica.* « Rendiconti della R. Accademia Nazionale del Lincei », vol. XVI, ser. 6ª, settembre 1932; ved. pure: E. Volterra, *Elasticità libera ed elasticità vincolata. Applicazione del concetto di elasticità vincolata.* « Atti del Congresso Internazionale di Matematica di Zurigo », settembre 1932.

2. Spostamenti e deformazioni - Varie specie di componenti.

Nello spazio ordinario indichino x_i coordinate cartesiane di un generico punto P riferite a tre assi ortogonali, x^i coordinate curvilinee qualsivogliano dello stesso P ($i = 1, 2, 3$). Il quadrato dell'elemento lineare

$$(1) \qquad ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

sarà espresso in coordinate generali da una forma quadratica

$$(2) \qquad ds^2 = \sum_{1}^{3}{}_{ik} a_{ik}\, dx^i\, dx^k$$

essenzialmente positiva, i cui coefficienti a_{ik} sono ben determinate funzioni del posto. Supponiamo che il punto P subisca uno spostamento infinitesimo δP, e designiamone con u_{Pi} ($i = 1, 2, 3$) le componenti cartesiane che risulteranno in conformità funzioni delle tre coordinate, mentre con u_P^i indicheremo le componenti contravarianti, relative alle coordinate curvilinee x^i generiche. La posizione P′ occupata da P, a spostamento avvenuto, cioè il punto $P' = P + \delta P$ avrà coordinate cartesiane $x_i + u_i$ e coordinate curvilinee $x^i + u^i$. Per effetto di un tale spostamento si determinano (in generale) alterazioni di lunghezze e di angoli, desumibili (direttamente o indirettamente) dalla nuova espressione che assume il quadrato dell'elemento lineare (1) o (2), quando in esso si sostituiscano al posto delle coordinate della posizione primitiva (x_i o x^i) le coordinate della posizione finale ($x_i + u_i$ o $x^i + u^i$ rispettivamente).

Riferiamoci dapprima a coordinate cartesiane e calcoliamo l'incremento (infinitesimo) che subisce il secondo membro delle (1) quando si sostituiscono alle x_i le $x_i + u_i$, cioè per uno spostamento elementare di componenti u_i. Avremo:

$$(3) \qquad \delta(ds^2) = 2\sum_{1}^{3}{}_i dx_i\, \delta(dx_i) = 2\sum_{1}^{3}{}_i dx_i\, d\delta x_i =$$

$$= 2\sum_{1}^{3}{}_i dx_i\, du_i = 2\sum_{1}^{3}{}_{ik} dx_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k =$$

$$= \sum_{1}^{3}{}_{ik} dx_i\, dx_k \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right), \quad \text{ossia ponendo} \quad \gamma_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$$

$$\delta(ds^2) = 2\sum_{ik}^{1\,3} \gamma_{ik}\, dx_i\, dx_k . \tag{4}$$

Come è noto, i coefficienti γ_{ii} rappresentano allungamenti nel senso degli assi coordinati mentre, per $i \neq k$, le γ_{ik} rappresentano alterazioni angolari, essendo precisamente $\frac{\pi}{2} - \gamma_{ik}$ gli angoli che, a spostamento avvenuto, fanno due direzioni inizialmente parallele agli assi i e k rispettivamente.

L'analogo, essendo fatto in coordinate generali, porta ad introdurre, al posto delle γ_{ik}, le ausiliarie

$$\gamma_{ik} = \frac{1}{2} \sum_j \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial x^j} u^j + a_{ij} \frac{\partial u^j}{\partial x^k} + a_{jk} \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \right) \tag{5}$$

che attribuiscono al δds^2 la forma

$$\delta ds^2 = 2\sum_{ik}^{1\,3} \gamma_{ik}\, dx^i\, dx^k . \tag{6}$$

Questa forma ha necessariamente carattere invariante (cioè indipendente dalla scelta delle coordinate) per il significato del primo membro (che sempre coincide col primo membro delle (4)). Dall'invarianza del secondo membro della (6) segue per definizione il carattere tensoriale, anzi covariante, delle γ_{ik}, le quali si chiamano componenti covarianti di deformazione ed hanno un significato geometrico perfettamente analogo alle omologhe componenti cartesiane, con quelle varianti che provengono dalla circostanza che si deve tutto interpretare nella metrica (2) e non nella metrica euclidea (1).

Una ulteriore espressione delle γ_{ik} è collegata alla definizione di derivata covariante. Infatti valendo in coordinate cartesiane le (3) a definire la generica γ_{ik}, più generalmente in coordinate qualsivoglia sarà

$$\gamma_{ik} = \frac{1}{2} (u_{i/k} + u_{k/i}) \tag{7}$$

ove per definizione stessa di derivata covariante è:

$$u_{i/k} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \sum_j^{1\,3} \left\{ \begin{matrix} i & k \\ j & \end{matrix} \right\} u_j \tag{8}$$

e, ben s'intende, $\left\{ \begin{matrix} i & k \\ j & \end{matrix} \right\}$ designano simboli di Christoffel di seconda specie, spettanti alla forma (2).

3. Potenziale elastico.

Il potenziale elastico elementare è una forma quadratica nelle sei componenti di deformazione. Per un corpo isotropo, esso è espresso, in coordinate cartesiane, dalla funzione isotropa, cioè invariante rispetto alle orientazioni degli assi cartesiani: $\Phi = \frac{L}{2}\Theta^2 + K\psi$ ove L e K sono due costanti caratteristiche del mezzo in cui si produce la deformazione e Θ e ψ sono, a loro volta, funzioni isotrope, una di primo, l'altra di secondo grado nelle $\underset{ik}{\gamma}$. La funzione Θ, divergenza del vettore spostamento elastico, è data dall'espressione

$$\Theta = \sum_{i}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{i} \underset{ii}{\gamma} \tag{9}$$

mentre la funzione ψ, tensore di deformazione, è data dalla somma

$$\psi = \sum_{ik}^{3} \underset{ik}{\gamma^2}$$

od anche, per l'identità $\underset{ik}{\gamma} = \gamma_{ik} = \gamma^{ik}$ valida in coordinate cartesiane da

$$\psi = \sum_{ik}^{3} \gamma_{ik}\, \gamma^{ik}\,, \tag{10}$$

di cui è manifesto il carattere invariantivo. Anche a Θ si può ovviamente attribuire forma invariante, osservando che le $\underset{ik}{\gamma}$ possono considerarsi non soltanto componenti covarianti e contravarianti ma anche miste, e quindi essere designate con γ_k^i (ovvero γ_i^k). Comunque basta scrivere la (9)

$$\Theta = \sum_{i}^{3} \gamma_i^i \tag{9'}$$

perchè apparisca invariantiva. Per il calcolo effettivo può talora essere più conveniente l'espressione [1]

$$\Theta = \sum_{i}^{3} \left\{ \frac{\partial u^i}{\partial x^i} + \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \sqrt{a}}{\partial x^i} u^i \right\} \tag{11}$$

(1) Vedi Levi-Civita, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*. (Stock, Roma, 1925), p. 174 e sgg.

in cui intervengono direttamente le componenti contravarianti dello spostamento e le loro derivate ordinarie. Per quanto ho già avvertito, serve ancora la (10) ed esprimere il tensore di deformazione in coordinate qualsivogliano. Le componenti controvarianti dello spostamento γ^{ik} sono desumibili sia da

$$\gamma^{ik} = \frac{1}{2}\,(\underset{\sim}{u^{i/k}} + u^{k/i}) \tag{12}$$

sia da

$$\gamma^{ik} = \sum_{jh}\, a^{ij}\; a^{kh}\; \gamma_{jh}\,. \tag{13}$$

Potremo quindi anche esprimere il tensore di deformazione in funzione delle sole componenti controvarianti di deformazione mediante la formula.

$$\psi = \sum_{ik}\;\sum_{jh}\, a^{ij}\; a^{hk}\; \gamma_{jh}\; \gamma_{ik}\,. \tag{14}$$

Geodesia. — *Stazione astronomico-geodetica eseguita sul vertice di 1° ordine di Tortona nel luglio 1933-XI.* Nota di U. Barbieri, pres. dal Corrisp. E. Soler.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Definizione assoluta e significato fisico della costante di Hubble.* Nota di L. Laboccetta, presentata [1] dal Corrisp. G. A. Crocco.

1. *Risultati dei dati sperimentali.* – Le nebulose estragalattiche presentano il fenomeno di uno spostamento delle righe spettrali verso il rosso che cresce al crescere della loro distanza dalla terra.

Interpretando questo spostamento come indizio di un moto di recessione si conclude che le dette nebulose si allontanano da noi con una velocità che è tanto maggiore per quanto maggiore è la loro distanza.

Le misure finora eseguite conducono, come è noto, a ritenere che, al di là delle distanze fino alle quali i moti propri possono prevalere, o sono ancora di valore non trascurabile rispetto a quello del movimento generale, la velocità di allontanamento tende a divenire proporzionale alla distanza stessa, e il fattore di proporzionalità è la « *costante di Hubble* ».

In quanto segue assumerò che l'aumento della velocità di allontanamento sia di 558 chilometri al secondo per ogni megaparsec di aumento della distanza, essendo questo uno dei valori recentemente accettati [2].

Denotando con h la costante di Hubble, con r la distanza in cm. e con u la velocità in cm./sec., poichè un milione di parsec è cm. $3{,}083 \times 10^{24}$, la relazione $u = hr$, ponendo in essa i valori anzidetti, fornisce

$$h = 1.801 \times 10^{-17} \tag{1}$$

cosicchè risulta

$$u = 1.801 \times 10^{-17} \cdot r. \tag{2}$$

Questa relazione mostra che la velocità u diverrebbe uguale a quella della luce ad una distanza

$$r = \frac{2.998 \times 10^{10}}{1.801 \times 10^{-17}} = 1.664 \times 10^{27}. \tag{3}$$

Per meglio intendere il significato fisico di questa cifra sostituiamo al centimetro l'unità λ del sistema atomico gravitazionale indicato nella precedente mia Nota [3]; si ha così

$$r = 1.664 \times 10^{27} (1.222 \times 10^{-32})^{-1} = 1.379 \times 10^{79}. \tag{4}$$

(1) Nella seduta del 2 dicembre 1934.

(2) V. p. 18 di H. Mineur, *L'univers en expansion*, Paris, 1933.

(3) *Sulle costanti gravitazionali.* Questi « Rendiconti », vol. XX, p. 327.

Se si confronta questo numero col numero totale degli atomi elementari esistenti nell'universo [1] e cioè 1.29×10^{79} si trova che praticamente i due numeri coincidono.

Ricordando poi che nella precedente Nota, sulla definizione assoluta delle costanti dei campi gravitazionali, avevo chiamato « *sfera normale* » una sfera il cui raggio è uguale alla somma dei raggi degli atomi elementari costituenti la sua massa, e « *sfera dell' universo* » la sfera normale formata con la totalità degli atomi elementari esistenti nell'universo, risulta da quanto precede che l'universo reale coincide con la sfera normale ad esso corrispondente se il raggio di questa corrisponde al raggio che viene attribuito all'universo. Anche questa corrispondenza si verifica poichè all'universo viene attribuito [2] un raggio, iniziale, di 328 megaparsec, ossia in cm.

$$(5) \qquad 328 \times 3.083.10^{24} = 1.011224 \times 10^{27}$$

nel mentre al numero totale di atomi elementari innanzi indicato di 1.29×10^{79} corrisponde un raggio

$$(6) \qquad r = 1.29 \times 10^{79} \cdot 1.222 \times 10^{-52} = 1.576 + 10^{27}$$

di accordo [3] con quello (3) innanzi trovato.

2. *Definizione assoluta della costante di Hubble.* – Le coincidenze empiriche innanzi rilevate fanno pensare che per un osservatore che si trovi sulla terra, l'universo reale coincida con una sfera normale, avente la massa di esso, sfera dell'universo, ed in atto di dilatarsi con una velocità che, computata radialmente, alla superficie della sfera raggiunge la velocità della luce.

Chiamando R il raggio di questa sfera dell'universo e r la distanza di una nebulosa che si allontana con la velocità u, si dovrà avere

$$(7) \qquad h = c/\mathrm{R} \qquad u = cr/\mathrm{R}\,.$$

Formalmente queste relazioni corrispondono alla interpretazione dello spostamento verso il rosso come indizio di una velocità di allontanamento, ed a questo modo di esprimersi mi atterrò in quanto segue, per brevità e facilità di linguaggio. È però evidente che, non potendo assegnare alla terra

(1) Adottando il numero dato da EDDINGTON, *The expanding Univers*, Cambridge, 1933, p. 68.

(2) V. p. 67 di EDDINGTON, op. cit.

(3) Nella precedente Nota nella formola corrispondente alla (5) al termine del § 5, è stato indicato per il raggio il valore errato $2{,}479 \times 10^{27}$ invece di $1{,}576 \times 10^{27}$, che è il valore esatto, come del resto risulta dalla formola stessa. Questa rettifica mostra che l'accordo è migliore.

una posizione centrale, più giustificato sarebbe, allo stato delle cose, considerare h come un coefficiente che indica semplicemente la riduzione della frequenza della luce dipendente dal cammino percorso [1].

Comunque ciò sia, la prima delle (7) ci fornisce ad ogni modo una definizione assoluta della costante h di Hubble, poichè essa ci dice che *il valore di questa costante è dato dal rapporto fra velocità della luce e la lunghezza del raggio dell'universo.* Ovvero se per esprimere il valore di h ci serviamo delle unità atomiche gravitazionali, poichè con esse $c = \lambda / \tau$ e, trattandosi di una sfera normale, $R = N\lambda$, se è N il numero totale di atomi elementari esistenti oell'universo, viene

$$h = \frac{\lambda}{\tau N \lambda} = \frac{1}{N\tau} \tag{8}$$

e cioè

$$H = h\tau = \frac{1}{N} \tag{9}$$

dove si è indicato con H il valore di h espresso in unità gravitazionali. Si deduce da ciò che nel sistema di u. a. g. *la costante di Hubble è data da valore reciproco del numero totale di atomi elementari esistenti nell'universo.* Si ha cioè, con il valore di N innanzi adottato,

$$H = (1.29 \times 10^{79})^{-1} = 0.775 \times 10^{-79}. \tag{10}$$

La prima delle (7) mostra anche che h ha le dimensioni di una frequenza ($L\,T^{-1}\,L^{-1} = T^{-1}$), ma quale sia questa frequenza risulterà meglio da un esame del significato della velocità.

Infatti la seconda delle (7) mette in evidenza che, quando la distanza r della nebulosa raggiunge il valore del raggio R della sfera dell'universo, la sua velocità diventa uguale a quella della luce.

Ed appare chiaro quindi che se come unità si prendono le grandezze caratteristiche della sfera dell'universo, come indicate al § 4 della Nota precedente, poichè la seconda delle (7) può anche scriversi

$$\frac{u}{c} = \frac{r}{R} \tag{11}$$

e con le dette unità, la velocità unitaria è la velocità della luce, e l'unità di lunghezza è proprio il raggio della sfera, ne segue che u / c è proprio il valore β della velocità e r / R il valore ρ della distanza così espressa.

(1) W. de Sitter «Kosmos», p. 132, Cambridge, Mass., 1932.

La (11) diventa perciò

$$\beta = \rho . \tag{12}$$

Ovvero, nel sistema di unità cosmiche, costituito dalle costanti della sfera dell'universo, uno stesso numero, che è una frazione propria, esprime nello stesso tempo la distanza ρ e la velocità β della nebulosa. Vale a dire, in altre parole, che in questo sistema di unità la costante di Hubble ha il valore uno.

Si scorge pure da questa proprietà che le velocità radiali attribuite alle nebulose sono proporzionali alle velocità che esse avrebbero girando tutte intorno al centro della sfera dell'universo con la stessa velocità angolare di cui sarebbe animata una di esse che girasse con la velocità della luce a contatto della superficie della sfera. I tempi periodici sono dunque uguali per tutte e la stessa è la frequenza, che è la frequenza propria della sfera dell'universo cioè $\frac{1}{2\pi N}$ poichè è N il tempo proprio.

Il fattore 2π è inessenziale e si potrebbe far sparire adottando come unità di tempo il tempo periodico anzichè quello radiale.

Si può dunque dire anche che *la costante di Hubble non è altro che la frequenza propria della sfera dell'universo.*

Infine un'altra relazione importante ha la costante di Hubble con una delle caratteristiche della sfera dell'universo, e cioè con la curvatura di essa. Avendosi per la densità e la curvatura della sfera normale, come già si è visto nella Nota precedente, (19), (20), § 5,

$$\Delta N^2 = 1 \qquad \Delta = \frac{1}{L^2} \tag{13}$$

dove L sta per il raggio della sfera, che nelle u. a. g. ha il valore N, tenendo presente (9) si può scrivere

$$\left(\frac{1}{N}\right)^2 = H^2 \tag{14}$$

e quindi

$$H^2 = \frac{1}{L^2} \tag{15}$$

cioè *il quadrato della costante di Hubble è precisamente la curvatura, totale Gaussiana, della sfera dell'universo ed uguale anche alla densità media di essa.*

Si offre con ciò un altro mezzo di verifica delle relazioni trovate, consistente nel cercare se la densità che si deduce dal valore empirico di *h*

coincide con quella che, anche con rilevamenti empirici, viene attribuita alla sfera dell'universo.

Ora si ha (10)

$$H^2 = (0.775 \times 10^{-79})^2 = 0.6 \times 10^{-158} \tag{16}$$

ma questo è il valore della densità riferito a quella δ della sfera atomica presa come unità. Volendo avere la densità Δ riferita a quella dell'acqua normale bisogna moltiplicare per il valore di δ e viene

$$\Delta = H^2 \delta = 0.6 \times 10^{-158} \cdot 8.19 \times 10^{130}$$

$$\Delta = 0.49 \times 10^{-27} \tag{17}$$

in buon accordo coi valori ottenuti per altre vie. Partendo dalla relazione che teoricamente deve legare, nel tempo presente, la costante di Hubble alla densità media dello spazio Einstein [1] ottiene « un valore dell'ordine di 10^{-28}, e Eddington [2] dà come valore della densità, nelle condizioni iniziali dell'universo, 1.05×10^{-27}.

In conclusione si può dire che anche i risultati puramente sperimentali sembrano giustificare l'affermazione di Eddington [3] che debba esistere una relazione collegante le dimensioni di ogni struttura materiale con il raggio di curvatura dell'universo. Nel caso dell'atomo si è visto che questa relazione è semplicissima avendosi in unità atomiche gravitazionali: per il raggio $R = N$ e per la curvatura $R = N^{-2}$, la curvatura essendo quella della sfera dell'universo.

(1) A. Einstein, *Sur la structure cosmologique de l'espace*, p. 109, Paris, 1933.

(2) S. V., p. 68 di A. S. Eddigton, op. cit.

(3) A. S. Eddington, *The mathematical theory of relativity*, p. 153, 2nd Ed. Cambridge, 1924.

Fisiologia. — *Sugli effetti della distensione forzata dell'ingluvie nel colombo*[1]. Nota di A. Merlino, presentata[2] dal Corrisp. S. Baglioni.

Numerose osservazioni sperimentali e cliniche hanno messo in evidenza particolari modificazioni riflesse dell'attività cardiaca, per eccitamenti partenti da vari segmenti del tubo gastroenterico.

Tra quelle sperimentali meritano di essere ricordate le classiche esperienze di Goltz[3] sulla rana esculenta. Questo Autore vide, che il martellamento, eseguito sul peritoneo viscerale dello stomaco o dell'intestino, determina per via riflessa nella rana il rallentamento delle pulsazioni del cuore, fino all'arresto di esso in diastole; e che questo riflesso avviene per la via dei vaghi. Anche G. Martino[4], ripetendo ed estendendo nel *bufo viridis* le esperienze del Goltz, potè dimostrare, che le stimolazioni meccaniche, eseguite col martelletto su qualunque segmento del canale digerente, determinano un rallentamento nella frequenza del ritmo cardiaco; che però questo effetto non si ottiene con la distensione, dall'interno, dello stomaco o dell'intestino; che neanche le stimolazioni elettriche del tratto gastroenterico dimostrano alcuna azione riflessa sulla meccanica cardiaca; che invece si osservano sempre le modificazioni sudette per effetto di stimolazioni dello stomaco o dell'intestino con agenti chimici o termici; che infine queste modificazioni riflesse si verificano per la via dei vaghi.

Esistono osservazioni eseguite anche in animali omotermi, e tra queste alcune di F. Rosenfeld[5] nel cane, che qui ci pare interessante di ricordare. Questo Autore, esercitando una distensione dello stomaco nel cane mercè l'insufflazione di ossigeno, vide che in tali condizioni può osservarsi forte aumento della pressione sanguigna ed aritmia.

Con riferimento appunto a questi fatti bene accertati ci è sembrato utile studiare sperimentalmente nel colombo un fenomeno, che avevamo potuto osservare per incidenza nel corso di altre ricerche: l'alimentazione dei colombi con semi di leguminose (ceci, fagiuoli), se eseguita con la somministrazione forzata (per imbeccamento) di quantità rilevanti di essi allo stato

(1) Le presenti ricerche, eseguite durante il 1928 nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Messina (Dir. prof. G. Amantea), sono state ora elaborate, per la pubblicazione, nell'Istituto di Chimica fisiologica della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 2 dicembre 1934.

(3) F. Goltz, « Wirchow's Arch. f. path. Anat. u. Phys. », *26*, 1863.

(4) G. Martino, « Bollettino della Soc. Ital. di Biologia sper. », I, *190*, 1926.

(5) F. Rosenfeld, « Klin. Wochenschr. », I, *1026*, 1922.

secco, può determinare in poche ore la morte dell'animale con fenomeni generali di collasso, che coincide con la progressiva distensione dell'ingluvie, che si verifica mano a mano che i semi aumentano di volume per imbibizione, e perciò più prontamente quando l'animale, dopo l'imbeccamento, assume acqua.

Abbiamo istituito esperienze dirette a determinare in colombi distensioni di vario grado dell'ingluvie, a mezzo di un palloncino di gomma elastica connessa, per un tubo a T, con un insufflatore a doppia palla, e con un manometro a mercurio; e sia in questi, sia in altri animali, in cui la distensione fu provocata con la somministrazione di ceci, abbiamo sorvegliato il comportamento del polso, del respiro, e della temperatura cloacale. Le stesse prove sono state poi anche eseguite in animali operati di vagotomia cervicale, unilaterale o bilaterale, come risulta per ogni singolo caso dalla annessa tabella.

In questa sono riassunti tutti i risultati da noi ottenuti.

La distensione dell'ingluvie provocò sempre nel colombo un aumento di frequenza del polso, una diminuzione della frequenza del ritmo respiratorio e una ipotermia progressiva, che nelle prove di insufflazione raggiunse il massimo grado dopo 30'-60' minuti di distensione, per la somministrazione di ceci dopo circa due ore mezzo (esp. 1ª, 8ª). In quest'ultimo caso lo esperimento finì con la morte dell'animale, mentre nelle prove di insufflazione, la decompressione bastò sempre per la pronta reintegrazione del polso, del respiro e della temperatura normale.

Per il comportamento dei movimenti respiratorî si può escludere, che gli effetti gravi della distensione dell'ingluvie e la morte siano connessi con ostacolo meccanico alla respirazione (per compressione della trachea).

Il fenomeno invece ha tutta l'apparenza di un fatto riflesso; ed è da rimarcare che queste modificazioni del respiro, del polso e della temperatura coincidono – a parte differenze solo di grado – con quelle corrispondenti, che sogliono ottenersi nei medesimi animali con la recisione dei vaghi.

Tuttavia la distensione dell'ingluvie eseguita in animali vagotomizzati mostrò un'ulteriore accentuazione degli stessi effetti, che già erano stati indotti dalla vagotomia; cosicchè il risultato finale fu, per sommazione, di grado maggiore che negli animali medesimi in condizioni normali.

Pertanto non è improbabile, che i fenomeni descritti debbano attribuirsi a intervento del sistema antagonista (simpatico), le cui fibre decorrenti nella parete dell'ingluvie potrebbero rimanere eccitate e dalla distensione.

Abbiamo ritenuto utile riferire e fissare nella presente Nota queste poche osservazioni, di carattere evidentemente preliminare, ma che si prestano senza dubbio ad essere ulteriormente sviluppate: ciò per il momento non è dato di fare a noi, e pertanto speriamo di invogliare altri a riprenderle.

Tabella.

Numero progressivo dell'esperienza	Numero progressivo dell'animale	Condizione dell'animale su cui è stata eseguita la esperienza	Pressione, in mm. di Hg, raggiunta con l'insufflazione	Numero degli atti respiratorî		Numero dei battiti cardiaci		Temperatura		Osservazioni
				all'inizio della esperienza	al momento in cui la variazione si è presentata più accentuata	all'inizio della esperienza	al momento in cui la variazione si è presentata più accentuata	all'inizio della esperienza	al momento in cui la variazione si è presentata più accentuata	
1ª	1	normale	—	—	—	—	—	39°.8	32°.8	Distensione eseguita con ceci. Muore dopo 2h, 30′.
2ª	2	normale	15	70	44	—	—	41°.8	40°.1	Variazioni massime: dopo 90′ di distensione.
3ª		normale	30	70	44	155	180	42°.4	40°.6	Variazioni massime: dopo 60′ di distensione.
4ª	3	normale	30	66	20	162	194	39°.9	36°.2	Variazioni massime: dopo 45′ di distensione.
5ª		normale	40	62	23	155	197	42°.0	38°.3	
6ª		vagotomizzato	20	18	10	192	204	41°.4	40°.5	Vagotomia bilaterale.
7ª	4	vagotomizzato	30	18	14	160	228	41°.6	39°.6	» »
8ª		vagotomizzato	40	18	18	196	224	39°.5	35°.5	» »
9ª		vagotomizzato	—	—	—	172	222	41°.5	35°.5	Distensione eseguita con ceci. Muore dopo 2h, 30′.
10ª	5	normale	25	39	21	120	177	43°.1	39°.4	Colombo giovane di un mese.
11ª		vagotomizzato	25	3	2	189	240	40°.5	38°.2	Vagotomia bilaterale.
12ª	6	normale	20	44	30	128	204	42°.0	40°.7	Colombo giovane, a sviluppo incompleto.
13ª		vagotomizzato	20	32	24	192	219	42°.5	41°.4	Vagotomia unilaterale.
14ª	7	normale	25	73	59	117	124	43°.3	40°.9	Variazioni massime: dopo 30′ di distensione.
15ª		normale	30	70	52	120	142	43°.0	40°.1	Vagotomia bilaterale.
16ª		vagotomizzato	30	18	9	188	224	40°.3	38°.9	» »

Fisiologia (Chimica fisiologica). — *Sulla possibilità di identificare e dosare piccole quantità di galattosio come acido mucico* [1]. Nota di A. Salvatori e G. Lapponi, presentata [2] dal Corrisp. S. Baglioni.

È noto che quando una soluzione di galattosio si fa bollire con acido nitrico di densità 1.15, fino a che il suo volume si sia ridotto ad un terzo, si forma un precipitato bianco, sabbioso, e che al microscopio rivela struttura cristallina caratteristica. La nuova sostanza formatasi è costituita da acido mucico, l'acido bicarbossilico corrispondente al galattosio. Questo stesso acido si ottiene anche partendo da lattosio, raffinosio, galattani ecc., e in una parola, da qualunque materiale che, per idrolisi, può fornire galattosio.

In tutti i trattati e manuali pratici di Chimica fisiologica ed anche di Chimica organica, viene riportata questa nozione, così, in forma più o meno vaga, e cioè, senza precisare le modalità della reazione, la quantità limite di galattosio che è possibile svelare attraverso l'acido mucico ottenuto, la natura delle sostanze che impediscono od ostacolano la precipitazione dello stesso, e per lo più, la reazione viene descritta per il lattosio.

Qualche cenno più esteso, si può trovare nell'aureo trattato del Lippmann [3], ma anche quì non è detto il limite inferiore della reazione, e l'esempio portato da questo autore, si riferisce a 5 gr. di galattosio.

Anche Fischer [4] accenna alla reazione di ossidazione del galattosio, ma egli si riferisce al lattosio ed il suo esempio parte da gr. 100 di lattosio.

Tutto ciò per quanto riguarda la reazione portata su soluzioni di galattosio o lattosio. Per quanto si riferisce ai liquidi biologici, qualche cenno si trova sul dosaggio del lattosio e galattosio nell'orina [5], cenno che consiste semplicemente nel dire, che, dopo aggiunta di 20 cc. di acido nitrico concentrato a 100 cc. di orina, concentrando a bagnomaria fino ad un terzo, si ottiene la precipitazione di acido mucico. Ora, poichè è noto che questa precipitazione è ostacolata, e talvolta anche completamente impedita, dalla

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisiologica della R. Università di Roma.

(2) Presentata nella seduta del 2 dicembre 1934.

(3) Lippmann, *Die Chemie der Zuckerarten*. Vol. I, pp. 719 e 760. Ed. 1904.

(4) E. Fischer, *Auleitung zur darstellung Organischer Präparate*. Ed. 1908, pp. 82.

(5) T. Bertrand, *Guide pour les manipulations de Chimie Biologique*, p. 63 (1910); Van Slyke, *Quantitative Clinical Chemistry*, pp. 81-86 (1931); Rona, *Prakticum der Phisiologischen Chemie*, p. 490 (1929); Hawk & Bergheim, *Practical Physiological Chemistry*, p. 85 (1927).

presenza di sostanze organiche, è ovvio, che in un liquido così ricco di queste, come è l'orina, non si potrà ottenere precipitazione di acido mucico, se non quando il galattosio o il lattosio, vi siano contenuti in notevole proporzione. Sicchè è da presumere, che in un'orina povera di galattosio (o lattosio, o altra sostanza che per idrolisi fornisca galattosio) debba essere molto difficile, se non addirittura impossibile, dosare il galattosio.

Noi abbiamo voluto riprendere la questione col preciso scopo appunto, di vedere quanto galattosio e in quale concentrazione, si può dosare come acido mucico, sia partendo da soluzioni di solo galattosio, e sia da orine cui esso era stato aggiunto. Alle prime è applicabile il citato metodo del Lippmann, con una sola modificazione relativa alla concentrazione dell'acido nitrico. Infatti questo autore consiglia di usare un acido nitrico di densità 1.15; ma noi abbiamo potuto osservare che, con un acido così diluito, non è possibile ottenere acido mucico, quando il galattosio presente è inferiore a 200 mgr. circa. Usando invece acido nitrico di densità 1.40, abbiamo potuto dosare anche 25 mgr. di galattosio, ottenendo il 77 % circa di acido mucico, come di regola si osserva per quantità dell'ordine del grammo, per concorde affermazione di tutti gli autori che si sono occupati di questa reazione.

Accertata così la possibilità di poter dosare anche 25 mgr. di galattosio partendo da galattosio puro, e avendo potuto nel corso di queste prove preliminari, acquistare sufficiente cognizione dell'andamento della reazione di ossidazione, siamo passati a sperimentare su orine, cui era stato aggiunto galattosio in quantità diverse, ma sempre inferiori o uguali ai 250 mgr.

Un primo tentativo di applicare integralmente gli accenni di tecnica contenuti nei comuni manuali sopra citati, ci ha messi di fronte ad una difficoltà insormontabile, quella, cioè, di pervenire ad un liquido assolutamente inadatto alla cristallizzazione.

Anche partendo non già da 100; ma da 50 cc. di orina, e concentrando fino a raggiungere il limite di solubilità dell'acido mucico (1/300), si otteneva un liquido, che, dopo raffreddamento, lasciava precipitare una massa formata da grosse scaglie (presumibilmente nitrato di urea), miste a filamenti colorati in giallo carico, e a goccioline di aspetto lipidico. Diluendo con acqua distillata, la massa andava completamente in soluzione, ma contemporaneamente si osservava la precipitazione di materiale filamentoso, untuoso al tatto e fortemente colorato in giallo. Con un liquido così improprio, non era difficile prevedere che non si sarebbe potuta ottenere la precipitazione dell'acido mucico, e l'esperienza ha confermato questa previsione.

Abbiamo allora tentato di semplificare l'orina, precipitando l'urea e le altre sostanze azotate. Ma anche così operando, non siamo riusciti ad ottenere un liquido atto alla cristallizzazione. Uguale sorte ha avuto l'espediente di eliminare l'urea per mezzo dell'ureasi.

Dopo ciò ci siamo posti il problema, se l'acido nitrico, di per se stesso ed in opportune condizioni, non potesse permettere di trasformare l'orina in un liquido atto alla cristallizzazione. Qualche esperienza preliminare ci confortò in questa ipotesi, e un successivo sviluppo in questo senso ci portò a buoni risultati.

Diamo ora la tecnica da noi in definitiva adottata, descrivendola nei più minuti particolari, perchè ognuno di questi ha la sua importanza:

25 cc. di orina fresca, vengono messi in un comune cristallizzatore di 3 cm. di diametro e 4 cm. di altezza. Si concentra su bagnomaria fino quasi a secchezza, e dopo raffreddamento si aggiungono 5 cc. di acido nitrico di densità 1.4. Si osserva una vivace reazione con abbondante sviluppo di vapori nitrosi e contemporaneamente un voluminoso precipitato, che, però, mano a mano scompare, per dar posto ad un liquido intensamente colorato in rosso scuro, perfettamente limpido. La reazione viene aiutata agitando con una bacchettina di vetro, in modo che l'acido nitrico venga a contatto con tutta la massa di precipitato. Quando lo sviluppo di vapori nitrosi è cessato, si mette ancora su bagnomaria bollente, avendo cura di inclinare il cristallizzatore il più che sia possibile. Dopo pochi minuti il liquido incomincia a bollire, e si osserva un ulteriore sviluppo di vapori nitrosi; si agita allora di tanto in tanto per favorirne l'eliminazione. Si concentra fino a piccolo volume e si aggiungono di nuovo 5 cc. di acido nitrico concentrato (densità 1.4), si agita di nuovo e si concentra a piccolo volume. Già dopo il primo trattamento si ottiene un liquido limpido, senza masse filamentose e untuose, il quale, col secondo trattamento, migliora molto nel senso, che dopo raffreddamento il precipitato che sempre si osserva, è ridotto a modestissime proporzioni. Con orine poco colorate e che lasciano alla prima concentrazione, un residuo solido modesto, è sufficiente questo trattamento. Con orine intensamente colorate e che lasciano un notevole residuo solido, occorre ripetere l'aggiunta di acido nitrico ancora una volta, e per orine ancora più complesse, l'acido nitrico complessivamente aggiunto deve raggiungere i 15 cc.

Ottenuto così un liquido, che dopo raffreddamento lascia un piccolissimo residuo solido, si aggiungono 2 cc. di acqua distillata e qualche decimilligrammo di cristallini di acido mucico puro. Dopo ciò si potrebbe abbandonare il liquido alla cristallizzazione; ma in questa maniera l'acido mucico precipita in forma di grosse scaglie fortemente aderenti al cristallizzatore e inglobanti il liquido in cui sono immerse. Questo fatto è da evitarsi, perchè induce a ripetere troppe volte il lavaggio con acqua distillata, onde eliminare la maggior parte delle impurezze, mentre è necessario che nel lavaggio stesso non si ecceda, se non si vuole andare incontro a perdite, dato che la insolubilità dell' acido mucico non è assoluta (1/300).

Si avrà cura allora, di avviare la precipitazione agitando il liquido con una bacchettina di vetro, sfregandola sul fondo e intorno alla parete del cristallizzatore, in modo da rompere eventuali equilibri di soprassaturazione.

Contemporaneamente si raffredderà sotto acqua corrente.

La precipitazione è molto lenta ad iniziarsi ed anche a compiersi, e per questo occorre agitare e raffreddare con pazienza, fino a che il liquido si intorbidi e si osservi al fondo del cristallizzatore un piccolo deposito bianco e sabbioso. Avviata così la precipitazione, si abbandona il liquido alla cristallizzazione per tre giorni agitando di tanto in tanto. In questa maniera il precipitato si ottiene in forma finissima, dimodochè il lavaggio riesce molto facile, ed è sufficiente ripeterlo tre o quattro volte con 2 o 3 cc. di acqua distillata ben raffreddata. Data la natura del liquido di partenza, non è possibile stabilire un criterio per giudicare della fine del lavaggio; ad ogni modo, sono, a questo riguardo, indizi sufficienti, la negatività della reazione dell'acido nitrico col solfato ferroso nel liquido di scolo ed il suo colore che da giallo nelle prime porzioni, va mano mano diventando incolore.

Il precipitato si raccoglie su filtro preventivamente seccato e pesato; si pone poi in stufa a 100° e dopo raffreddamento si pesa.

Il precipitato da noi ottenuto con questa tecnica, è certamente acido mucico, perchè presenta proprietà fisiche e chimiche caratteristiche di questo composto. Esso infatti è solubile in carbonato sodico, carbonato ammonico e ammoniaca caldi; da queste soluzioni esso riprecipita per aggiunta di acido cloridrico fino a neutralizzazione. Inoltre al microscopio presenta, sebbene in maniera non nettissima, ma che non offre dubbi ad un occhio sperimentato, la caratteristica forma di aghetti fini ed acutissimi. Il punto di fusione in tutte le nostre esperienze ha oscillato da 204 a 208, quando si determinava a riscaldamento lento; e da 212 a 215, quando invece si riscaldava rapidamente, cifre queste, che sono in buonissimo accordo con quelle date dagli autori per l'acido mucico puro nelle due condizioni di riscaldamento.

L'espressione riscaldamento lento, noi l'abbiamo interpretata con l'assegnare alla fusione il tempo massimo di 45'–50', e regolando la fiamma in modo che da 198° circa fino a fusione completa, il termometro salisse di un grado ogni minuto primo.

Per quanto riguarda la prova microscopica dobbiamo aggiungere, che si può osservare in maniera nettissima la caratteristica forma di tavolette prismatiche monocline, quando l'osservazione viene portata sul precipitato ottenuto dall'azione dell'acido cloridrico sulle soluzioni alcaline del prodotto ottenuto con la tecnica da noi data.

Tutto ciò che abbiamo ora detto, ci permette di concludere, che non solo la sostanza da noi ottenuta è acido mucico, ma anche che essa è costituita praticamente soltanto da acido mucico, e quindi il risultato della pesata può prendersi come dato quantitativo.

Perchè questo dato sia, però, servibile per risalire da esso alla quantità di galattosio presente, occorre che sia il 77 °/₀ circa di questo e che questa proporzione si mantenga costante.

Da questo punto di vista come vanno le cose nel nostro caso? Alla concentrazione dell' 1 °/₀ e partendo da 25 cc. di orina, i risultati da noi ottenuti sono i seguenti:

Galattosio presente mgr.	Acido mucico ottenuto mgr.	Rapporto Percentuale	Caratteristiche dell'orina in esame
250	101	40.4	Orina di media coloraz. e medio residuo solido.
»	99	39.6	» » » » » »
»	121	47.6	Orina poco colorata e con medio residuo solido.
»	103	41.2	Orina di media coloraz. e medio residuo solido.
»	133	53.2	Orina poco colorata e con piccolo residuo solido.
»	139	55.6	Stessa orina.
»	140	56.0	Stessa orina.
»	135	54.0	Orina poco colorata e con piccolo residuo solido.
Media . . .	120	48.4	

Da queste cifre si vede, che il rendimento non è stato del 77 °/₀ circa, e ciò era da prevedersi, data la notevolissima complessità del liquido, su cui si è portata la reazione di ossidazione. Anche la costanza del rendimento a rigore non si è ottenuta, ma pure le quantità di acido mucico trovate non offrono scarti considerevoli, dimodochè si può fare la media di essi. Si ottiene così un valore di 120 mgr. che corrisponde al valore medio percentuale del 48,4 °/₀.

Alla concentrazione del 0,5 °/₀; ecco i valori ottenuti:

Galattosio presente mgr.	Acido mucico ottenuto mgr.	Rapporto Percentuale	Caratteristiche dell'orina in esame
125	73	58.4	Orina poco colorata e con piccolo residuo solido.
»	79	63.2	» » » » »
»	65	52 2	Orina di media coloraz. e medio residuo solido.
»	68	54.4	Orina di media coloraz. e con piccolo residuo solido.
»	65	52.2	Stessa orina.
»	66	52.8	Stessa orina.
»	55	44.0	Orina intensamente colorata e con notevole residuo solido.
Media . . .	67	53.8	

A questa concentrazione il rendimento è stato un pochino più elevato, e noi attribuiamo questo fatto alle caratteristiche delle orine esaminate, che nella maggior parte erano di media colorazione e piccolo residuo solido, circostanza quest'ultima, che necessariamente doveva favorire la precipitazione dell'acido mucico.

Alla concentrazione del 0,25 % i valori ottenuti sono i seguenti:

Galattosio presente mgr.	Acido mucico ottenuto mgr.	Rapporto Percentuale	Caratteristiche dell'orina in esame
62.5	28	44.8	Orina di media coloraz. e medio residuo solido.
»	21	33 6	Orina molto colorata e notevole residuo solido.
»	26	41.6	Orina di media coloraz. e medio residuo solido.
»	28	44.8	Stessa orina.
»	25	40.0	Stessa orina.
»	20	32.0	Orina molto colorata e notevole residuo solido.
Media . . .	24	39.4	

A questa concentrazione il rendimento è stato un po' più basso di precedenti, e anche qui noi attribuiamo questo fatto alle caratteristiche delle orine esaminate, che erano nella maggior parte di media colorazione,

ma con residuo solido notevole, circostanza questa che doveva ovviamente sfavorire la precipitazione dell'acido mucico. Oltre a ciò bisogna tener presente che in questo caso si incominciano a sentire gli effetti della più piccola concentrazione. A concentrazioni infatti, del 0,1 °/₀ il rendimento è praticamente zero, perchè si ottiene un precipitato appena percettibile, tale da consentire si, il riconoscimento qualitativo al microscopio, ma da non permettere il maneggio per i necessari lavaggi. Dopo questa serie di esperienze condotte su orine normali, abbiamo voluto prendere in considerazione delle orine patologiche, ed abbiamo scelto a questo scopo, come è ovvio, delle orine di diabetici.

I risultati concordano con quelli ottenuti con orine normali; con la differenza che essendo di regola, in questo caso, le orine poco colorate e con piccolissimo residuo solido, abbiamo potuto spingere la reazione fino ad ottenere un risultato positivo qualitativamente e quantitativamente, anche alla concentrazione del 0,1 °/₀. I risultati ottenuti sono riportati nella seguente tabella:

Galattosio presente mgr.	Acido mucico ottenuto mgr.	Rapporto Percentuale	Caratteristiche dell'orina in esame
250	110	44	Orina col 10 °/₀₀ di glucosio.
125	65	52	» » 20 °/₀₀ » »
125	70	56	Stessa orina
125	71	56.8	Stessa orina.
125	65	52	Orina col 20 °/₀₀ di glucosio.
62.5	30	48	» » 15 °/₀₀ » »
62.5	38	60	» » 66 °/₀₀ » »
62.5	43	69	Stessa orina.
62.5	41	65.6	Stessa orina.
62.5	35	56	Orina col 20 °/₀₀ di glucosio.
25	12	48	» » 15 °/₀₀ » »
25	12	48	Stessa orina.
Media complessiva	percentuale	54.6	

La caratteristica di queste orine, di essere poco colorate e più di lasciare un piccolissimo residuo solido, ha influito favorevolmente sul rendimento della reazione, in accordo con quanto si era potuto osservare in quelle orine normali, che presentavano questa stessa caratteristica. Dobbiamo

però aggiungere, che in questo caso, contenendo le orine una notevole quantità di glucosio, poichè la reazione di ossidazione di questo è identica alla reazione di ossidazione del galattosio, e sola differenza vi è nel fatto, che l'acido saccarico che si ottiene dal primo è solubile, mentre l'acido mucico che si ottiene dal secondo è insolubile, si può pensare che rispetto all'acido nitrico la quantità globale di glucosio e di galattosio offriva una maggiore superficie di attacco, venendosi così a beneficiare in tutto e per tutto come di una maggiore concentrazione.

Ciò premesso, dando uno sguardo complessivo ai risultati ottenuti si ricava, che le medie percentuali, ottenute partendo da varie concentrazioni e con le più diverse orine, sono: 48,4 – 53,8 - 39,4 – 54.6. Queste cifre non offrono un notevole scarto tra di loro e quindi è lecito fare la loro media; si ottiene allora, che la media percentuale di tutte le determinazioni eseguite è 49.

Il rapporto dunque tra galattosio ed acido mucico è $\frac{100}{49}$ cioè 2,04.

Avuto riguardo al fatto che questo numero rappresenta un risultato medio, possiamo dire che, in generale, non si andrà molto lontano dal vero, deducendo la quantità di galattosio eventualmente presente in un'orina, moltiplicando per due la quantità di acido mucico ottenuto con la nostra tecnica.

A conclusione del nostro lavoro possiamo perciò affermare:

I). Che con la tecnica da noi usata è possibile svelare sia in soluzioni pure, che nell'orina (normale o diabetica) l'eventuale presenza di quantità di galattosio fino a 25 mgr. (partendo da 25 cm^3 di orina), in maniera certa e controllabile con prove di solubilità, coll'osservazione microscopica e con la determinazione del punto di fusione.

(Non è possibile con la medesima tecnica fare distinzione circa la provenienza del galattosio, e cioè se questo è presente come tale o provenga, per idrolisi, da carboidrati complessi).

II). Che avendo di mira uno scopo non rigidamente quantitativo, ma eminentemente pratico o clinico, si può conoscere la quantità di galattosio presente, moltiplicando per due la quantità di acido mucico ottenuto con la nostra tecnica, e nelle condizioni sperimentali più sopra descritte.

Fisiologia. — *L'azione dell'insulina sulla alcoolemia provocata nell'uomo normale.* Nota di E. Serianni, pres. dal Corrisp. S. Baglioni.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Variazione sull'attività cardiaca in rapporto con lo stato asfittico.* Nota di A. Galamini, pres. dal Corrisp. S. Baglioni.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Marchiafava presenta a nome dell'autore il volume dedicato dal prof. Claudio Fermi, prof. d'igiene della R. Università di Sassari, all'illustrazione del problema malarico in Sardegna. Presenta anche in omaggio un suo opuscolo dal titolo « Note sulla malaria » e ne espone il contenuto.

L'Accademico Segretario aggiunto prof. Lo Surdo presenta le opere inviate in dono all'Accademia segnalando l'opuscolo « Sobre funcions de dues variables complexes » del Socio F. Severi, pubblicato dall'Institut d'Estudis Catalans; alcune pubblicazioni dell'Istituto di topografia e geodesia del R. Politecnico di Milano, diretto dal Socio Cassinis; « Ricerche di biologia » di A. Rodolico; alcuni volumi dell'Accademia Sovietica di Leningrado.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci Crocco, Levi-Civita, Severi.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 2 dicembre 1934

Ameghino Florentino. — Obras completas y correspondencia cientifica. Vol. XIII. La Plata, 1932. 8°, pp. 999.

Arcangeli Alceste. — Anaphiloxia sicula, nuova specie di isopodo umicolo della Sicilia. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXVIII, pp. 151–158). Spoleto, 1934. 8°.

Battaglia Mario. — Cura della tubercolosi col vaccino selezionato e stabilizzato. Breve relazione al Direttore della Clinica chirurgica della R. Università di Napoli Prof. Giovanni Pascale. Napoli, s. d. 8°, pp. 1–24.

Battaglia M. — Eumices tuberculosis. (Note III) (Estr. dal « Bollettino della Sezione Italiana della Società internazionale di Microbiologia ». Fasc. V, maggio 1934). Milano, 1934. 8°, pp. 1–4.

Betti Mario e Bonino G. B. — Le acque minerali dell'Alto Adige e del Trentino. Indagini chimiche e chimico-fisiche. (Estr. dalle « Memorie della R. Accademia d'Italia, Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali». Vol. V). Roma, 1932. 8°, pp. 1–56.

Bua Gaetano. — I fattori meteorologici e la mosca dell'olivo. (Estr. dalla Rivista « La Meteorologia pratica » Anno XV). Perugia, 1934. 8°, pp. 1–12.

Bunzel H. H. — Vedi Mathews Albert P.

Cafafer W. M. — Bibliographical biography of Peter Ludvic Panum (1820–1885), epidemiologist and physiologist. (Reprinted from « Bulletin of the Institute of the History of Medicine ». (Volume II, pp. 258-280), s. l. 1934. 8°.

Cafafer W. M. — Kenelm Digby, seventeenth century psychotherapist. (Reprinted from « Human Biology ». Vol. V, pp. 506-515). Baltimore, 1933. 8°.

Cafafer W. and Doull F. A. — A note on the stability of resistance to Colds. (Reprinted from « Sciences ». Volume LXXVIII). S. l. 1933. 8°, pp. 1-4.

Cafafer W. M. and Doull J. A. — Stability of resistance to the common Cold. (Reprinted from the « American Journal of Hygiene ». 1933, pp. 712-726). Lancaster, 1933. 8°.

Contardi Angelo e Doldi Sandbo. — Sulla pressione di scoppio di alcuni carburanti a base di alcool. (Estr. dai « Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere ». Vol. LXVII). Milano, 1934, 8°, pp. 1–11.

Daniel E. — Verso la « forza gratuita ». Ricerca scientifica (dattilografata). Cerreto Sannita, 1934. 8°, pp. 1–15.

Dalton Mary. — Mortality in New Jork City a century and a quarter aga. (Reprinted from « Human Biology ». Volume VI, pp. 87–97). Baltimore, 1934. 8°.

Desicello Narciso — Etere o elettroni? La neve cosmica (Estr. dalla Rivista « L'Industria ». Vol. XLVIII). Milano, 1934. 8°, pp. 1–16.

Doldi Sandro — Vedi Contardi Angelo.

Doull J. A. — Vedi Cafafer W. M.

Doull J. A. and Herman N. R. — Minor respiratory diseases in a selected adult group: prevalence, 1928-1932, and clinical characteristics as observed in 1929–1930. (Reprinted from the « American Journal of Hygiene ». Vol. XVII, pp. 536–561). Lancaster, 1933. 8°.

Doull J. A. and Volkenburgh V. A, — Abnormalities of the upper respiratory diseases. (Reprinted from « Annals of Otology; Rhinology and Laryngology ». Vol. XLII). Baltimore, 1933. 8°, pp. 1-3.

Doull J. A. and Volkenburgh A. V. — Relationship of abnormalities of the upper respiratory tract to minor respira-

tory diseases. (Reprinted from the « American Journal of Hygiene ». Volume XVII, pp. 743–760). Lancaster, 1933. 8°.

Edwards D. L. — Variations in the spectrum of 42 Camelopardalis. (Reprinted from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Vol. 93, pp. 729–735). Edinburgh, 1933, 8°.

Favaro Josephvs. — De processibus haemalibus ossis coccygis hominis. (Sonderabdruck ans « Handbuch der Anatomie des Menschen » Band. IV, pp. 429–435). Jena, 1934. 8°.

Fermi Claudio — Sardegna. Regioni malariche, decadenza, risanamento e spesa. Vol. I. Roma, Tipografia Editrice S. A. 1934. 4°, pp. I–XXXI, 1–1344.

Gams H. — Risultati dello studio dei pollini fossili in rapporto colla storia della vegetazione e del clima d'Europa. Traduzione di G. Negri. Firenze, 1929. 8°, pp. 1–46.

Gerhartz Heinrich. — Belastungsproben des Kreislaufes. (Sonderdruk aus « Handbuch der biologischen Arbeitsmethoden ». Abt. V, Teil IX, pp. 89-190). Berlin, 1928. 8°.

Gerhartz Heinrich. — Belastungsproben der Atmung. (Sonderdruck aus « Handbuch der biologischen Arbeitsmethoden ». Abt. V, Teil IX, 1928). Berlin, 1928. 8°, pp. 1–88.

Gerhartz Heinrich. — Zur Pathogenese der amyotrophischen Lateralsklerose und multiplen Sklerose. (Sonderabdruck aus « Medizinische Klinik ». Jahrg. 1932, N. 41–42). Berlin, 1932. 8°, pp. 1–15.

Gerhartz Heinrich. — Gehirnschädigung beim Erhängen. (Sonderabdruck aus der « Deutschen Zeitschrift für Nervenheilkunde ». Bd. 128, pp. 109–117). Berlin, 1932. 8°.

Gerhartz Heinrich. — Corticale spastische Reflexe. (Sonderdruck aus der « Deutschen Zeitschrift für Nervenheilkunde ». Bd. 128, pp. 293–295). Berlin, 1932. 8°.

Gerhartz Heinrich. — Enterokokkeninfiltration der Lunge. (Sonderabdruck aus « Medizinische Klinik ». 1933, N. 12). Berlin, 1933. 8°, pp. 1–4.

Gerhartz Heinrich. — Friendländer–Pneumonie. (Sonderabdruck aus « Medizinische Klinik ». Jahrg. 1933, N. 5). Berlin, 1933. 8°, pp. 1–16.

Gerhartz Heinrich. — Pleuraempyem durch Bacillus cloacae. (Sonderabdruck aus « Medizinische Klinik ». Jahrg. 1833, N. 46). Berlin, 1933. 8°, pp. 1–3.

Gerhartz Heinrich. — Ein neuer isolierter Reflex bei spastischen Zuständen. (Sonderabdruk aus (Medizinische Klinik ». Jahrg. 1932, N. 37). Berlin, 1932. 8°. pp. 1–9.

Gerhartz Heinrich. — Neue Tuberkuloseforschung. (Sonderabdruck aus « Medizinische Klinik ». Jahrg. 1933, N. 47). Berlin, 1933. 8°. pp. 1–12.

Gerhartz Heinrich. — Atypische Silikose. (Sonderabdruck aus « Medizinische Klinik ». Jahrg. 1933, N. 38). Berlin, 1933. 8°, pp. 1–3.

Gerhartz Heinrich. — Tuberkulosoide. (Sonderabdruck aus « Beiträge zur Klinik der Tuberkulose und spezifischen Tuberkulose-Forschung ». Band. 84, pp. 26–61). Berlin, 1933. 8°.

Gerhartz Heinrich. — Akute Enterokokkenpneumonie unter dem Bilde des Typhus. (Sonderabdruck aus « Deutsche Medizinische Wochenschrift ». Jahrg. 1934, N. 61. Berlin, 1934. 8°, pp. 1–4.

Gerhartz Heinrich. — Cronische Enterakokkenentzündung. der Lunge. (Sonderabdruck aus « Medizinische Klinik ». Jahrg. 1934. N. 2). Berlin, 1934. 8°. pp. 1–7.

Gerhartz Heinrich. — Fortschrifte der Tuberkuloseforscheng. (Sonderabdruck aus « Medizinische Klinik ». Jahrg. 1934. N. 36). Berlin, 1934. 8°. pp. 1–14.

Gerhartz Heinrich. — Chemic der postembryonalen Organe der Blutzellenbildung. (Abdruck aus « Handbuch der Biochemie des Menschen und der Tiere ». Band II, pp. 133–142). Berlin, 1934. 8°.

Gerhartz Heinrich. — B. Sexualdrüsen. Männliche Geschlechtsorgane. (Abdruck aus « Handbuch der Biochemie des Menschen und der Tiere ». Band II, pp. 353–354). Berlin, 1934, 8°.

Gerhartz Heinrich. — Chemie der Lymphe. (Abdruck aus « Handbuch der Bio-

chemie des Menschen und der Tiere ». Band II, pp. 117–129). Berlin, 1934. 8°.

GERHARTZ HEINRICH. — Chemie der Transsudate und Exsudate. (Abdruck aus « Handbuch der Biochemie des Menschen und der Tiere ». Band II, pp. 130–132). Berlin, 1934. 8°.

HERMAN N. R. — Vedi DAULL J. A.

IVALDI GAETANO. — La scienza relativa all'esperienza. Preliminari della matematica relativa all'esperienza. Genova, 1934. 8°, pp. 1–34.

JUSTE E. und LAUE (von) M. — Neuartige Phasenumwandlungen bei einheitlichen Stoffen. (Sonderausgabe aus den « Sitzungsberichten der Preussischen Akademie der Wissenschaften ». Phys.-Math. Klasse XVII). Berlin, 1934. 8°, pp. 1–15.

LAUE (von) M. — Das Elektron im homogenen Magnetfelde nach der Diracschen Theorie. (Sonderausgabe aus den « Sitzungsberichten der Preussischen Akademie der Wissenschaften ». Phys.-Math. Klasse XVIII). Berlin, 1934. 8°, pp. 1–17.

MARCHIAFAVA E. — Note sulla malaria. (Estr. dalla Rivista « Croce Rossa ». Anno IX, n. 3). Roma, 1934. 8°. pp. 1–24.

MATHEWS ALBERT P. — On Wurtz's method for the differentation of bacillus typhi abdominalis from bacillus coli communis and its application to the examination of contaminated drinking water. (From « Technology Quarterly ». Vol. VI, pp. 241–342). New Jork, 1894. 8°.

MATHEWS ALBERT P. — Internal secretions considered in relation to variation and development. (Reprinted from « Science ». Vol. V, pp. 683–685), s. l. 1897. 8°.

MATHEWS ALBERT P. — The physiology of secretion. (Reprinted from « Annals N. V. Acad. Scien. ». Vol. XI, n. 14, pp. 293–368). Lancaster, 3898. 8°.

MATHEWS ALBERT P. und KASSEL A. — Zur Kenntniss der Trypsinwirkung. (Separatabdruck- aus « Hoppe–Seyler's Zeitschrift für physiologische Chemie ». Band. XXV, Heft 3 und 4, pp. 190-194). Strassburg, 1898. 8°.

MATHEWS ALBERT P. — A contributions to the chemistry of cytological staining. Reprinted from the « American Journal of Physiology ». Vol. I, 1898, pp. 445–454). S. l. 1898. 8°.

MATHEWS ALBERT. — The changes in structure of the pancreas cell. (Reprinted from « Journal of Morphology ». Supplement to Vol. XV, pp. 171-218). Boston, 1899. 8°.

MATHEWS ALBERT. — The physiology of secretion. (Reprint from « Biological Lectures », 1899, pp. 165–183). Boston, 1900, 8°.

MATHEWS ALBERT. — The origin of fibrinogen. (Reprinted from the « American Journal of Physiology ». Vol. III, pp. 53–85). S. l. 1899, 8°.

MATHEWS ALBERT P. — Artificially produced mitotic division in unfertilized Arbacia eggs. (Reprinted from the « Journal of the Boston Society of medical Sciences ». Vol. V). Boston, 1900. 8°, pp. 1–5.

MATHEWS ALBERT P. — Some ways of causing mitotic division in unfertilized Arbacia eggs. (Reprinted from the « American Journal of Physiology ». Vol. IV, pp. 343-347). S. l. 1900. 8°.

MATHEWS ALBERT P. — The relation between conductivity and the inorganic salts of the nerve. (Reprinted from the « Journal of the Boston Society of medical Sciences ». Vol. V). Boston, 1901. 8°, pp. 1–5.

MATHEWS ALBERT P. — Artificial parthenogenesis produced by mechanical agitation. (Reprinted from the « American Journal of Physiology ». Vol. VI, pp. 142-154), s. l. 1901. 8°.

MATHEWS ALBERT P. — The so-called cross fertilization of Asterias by Arbacia. (Reprinted from the « American Journal of Physiology ». Vol. VI, pp. 216-299), s. l. 1901. 8°.

MATHEWS ALBERT P. — Electrical polarity in the hydroids. (Reprinted from the « American Journal of Physiology ». Vol. VIII, pp. 294–299). S. l. 1903. 8°.

MATHEWS ALBERT P. — The action of pilocarpine and atropine on the embryos of the star-fish and the seaurchin. (Reprinted from the « American Journal of

Physiology ». Vol. VI, pp. 207-215). Chicago, 1901, 8°.

MATHEWS ALBERT P. — The nature of nerve stimulation and of changes in irritability. (Reprinted from « Science ». Vol. XV). Chicago, 1902. 8°, pp. 1-7.

MATHEWS ALBERT P. — The nature of nerve irritability and of chemical and electrical stimulation. Part II. (Reprinted from « Sciences ». Vol. XVII). Chicago, 1903. 8°, pp. 1-5).

MATHEWS ALBERT P. und WHITCHER B. R. — The importance of mechanical shock in protoplasmic activity. (Reprinted from the « American Journal of Physiology ». Vol. VIII, pp. 301-306), Chicago, 1903. 8°.

MATHEWS ALBERT P. — The cause of the harmacological action of the iodates, bromates, chlorates, other oxidizing substances and some organic drugs. (Reprinted from the « American Journal of Physiology ». Vol. XI, pp. 237–249). Chicago, 1904. 8°.

MATHEWS ALBERT P. — The nature of chemical and electrical stimulation. I. The physiological action of an ion depends upon its electrical state and its electrical stability. (Reprinted from the « American Journal of Physiology ». Vol. XI, pp. 455–496). Chicago, 1904. 8°.

MATHEWS ALBERT P. — A theory of the nature of protoplasmic respiration and growth. (Reprinted from « Biological Bulletin ». Vol. VIII, pp. 331-346). S. l. 1905. 8°.

MATHEWS ALBERT P. — The toxic and antitoxic of salts. (Reprinted from the «American Journal of Physiology ». Vol. XII, pp. 419–443). Chicago, 1905. 8°.

MATHEWS ALBERT P. — The nature of chemical and electrical stimulation. II. The tension coefficient of salts and the precipitation of colloids by electrolytes. (Reprinted from the « American Journal of Physiology ». Vol. XIV, pp. 203–230). Chicago, 1905. 8°.

MATHEWS ALBERT P. — A contribution to the general principles of the pharmacodynamics of salts and drugs. (Reprinted from « Biological Studies », pp. 81–118). Boston, 1906. 8°.

MATHEWS ALBERT P. — A note on the susceptibility of segmenting Arbacia and Asterias eggs. to cyanides. (Reprinted from « Biological Bulletin ». Vol. XI pp. 137–140). S. l. 1906. 8°.

MATHEWS ALBERT P. — The cause of the pharmacological action of ammonium salts. (Reprinted from the « American Journal of Physiology ». Vol. XVIII, pp. 58–63). Chicago, 1907. 8°.

MATHEWS ALBERT P. — A contribution to the chemistry of cell division, maturation and fertilization. (Reprinted from the « American Journal of Physiology », vol. XVIII, pp. 89–111). S. l. 1907. 8°.

MATHEWS ALBERT P. — An apparent pharmacological « action at a distance » by metals and metalloids. (Reprinted from the « American Journal of Physiology ». Vol. XVIII, pp. 39-46). Chicago, 1907. 8°.

MATHEWS AEBERT P. — The influence of some amino-acids on the development of echinoderms. (Reprinted from « Biological Bulletin ». Vol. XVI, pp. 44–46). S. l. 1908, 8°.

MATHEWS ALBERT P. and BUNZEL H. H. — The mechanism of the oxidation of glugose by bromine in neutral and acid solutions. (Reprinted from the « Journal of the American Chemical Society », Vol. XXXI, pp. 464–479). S. l. 1909. 8°.

MATHEWS ALBERT P. — The spontaneous oxidation of the sugars. (Reprinted from the « Journal of Biological Chemistry ». Vol. VI). S. l. 1909. 8°, pp. 1–28).

MATHEWS ALBERT P. and WALKER SYDNEY. — The action of cyanides and nitriles on the spontaneous oxidations of cystein. (Reprinted from the « Journal of Biolo-ical Chemistry ». Vol. VI, pp. 29–37). S. l. 1909. 8°.

MATHEWS ALBERT P. and WALKER SYDNEY. — The action of metals and strong salt solutions on the spontaneous oxidation of cystein. (Reprinted from the « Journal of Biological Chemistry ». Vol. VI, pp. 299–312). S. l. 1909. 8°.

MATHEWS ALBERT P. — Science and morality. (Reprinted from « Popular Science Monthly ». March, 1909, pp. 284–289). S. l. 1909. 8°.

Merrell Margaret. — On certain relationships between and for the point binomial. (Reprinted from the « Annals of Mathematical Statistics », 1933, pp. 217-228). Michigan, 1913. 8°.

Negri Giovanni. — Il Cerastium lineare All. (Estr. dal « Malpighia ». Vol. XVIII). Torino, 1904. 8°, pp. 1-13.

Negri Giovanni. — Sulla flora briologica della Penisola Sorrentina. (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ». Vol. XLI). Torino, 1906. 8°, pp. 1-22.

Negri Giovanni. — Sulle forme piemontesi del genere « Ephedra L. ». (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ». Vol. XLII). Torino, 1907. 8°, pp. 1-16.

Negri Giovanni et Pitard M. J. — Contribution à l'étude des Muxinées des îles Canaries. (Extr. de « Bulletin de la Société botanique de France ». Tome LIV). Paris, 1907. 8°, pp. 1-28.

Negri Giovanni. — Le stazioni di piante microterme della pianura torinese. (Estr. dagli « Atti del Congresso dei Naturalisti Italiani ». Milano, 15-19 settembre 1906). Milano, 1907. 8°, pp. 1-27.

Negri Giovanni. — Contributo alla briologia delle isole Tremiti. (Estr. dagli « Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino ». Vol. XLIII). Torino, 1908. 8°, pp. 1-23.

Negri Giovanni. — Il botanico Giovanni Francesco Re. Che cosa sia « Ponteutilla venariensis ». (Estr. dalla pubblicazione commemorativa « Il botanico Giovanni Francesco Re »). Torino, 1909. 8°, pp. 1-8.

Negri Giovanni. — L'azione protettiva della vegetazione forestale. (Estr. dal « Giornale di Geologia pratica ». Anno X, pp. 57-87). Parma, 1912. 8°.

Negri Giovanni. — Variazioni nel limite altitudinare inferiore di vegetazione del faggio verso la pianura Padana. (Estr. dal Bull. della Soc. bot. italiana ». Adunanza del 18-X-1912). Firenze, 1912. 8°, pp. 1-3.

Negri Giovanni. — Colonie di fanerogame alofile nell'alta pianura Padana. (Estr. dal « Bull. della Soc. bot. italiana ». Adunanza del 18-X-1912). S. l. 1912. 8°, pp. 1-5.

Negri Giovanni. — Appunti di una escursione botanica nell'Etiopia meridionale, marzo-agosto 1909. (Ministero delle Colonie. Monografie e rapporti coloniali. N. 4, 1913). Roma, 1913. 8°, pp. 1-176.

Negri Giovanni. — I mais degli S. U. d'America alla esposizione internazionale di Torino del 1911. (Estr. dagli « Annali della R. Accademia di Agricoltura di Torino ». Vol. LV). Torino, 1913. 8°, pp. 1-49.

Negri Giovanni. — I frutti apireni. (Estr. dagli « Annali della R. Accademia di Agricoltura di Torino ». Vol. LV). Torino, 1913. 8°, pp. 1-67.

Negri Giovanni. — Sopra alcuni legni fossili del Gebel tripolitano. (Estr. dal « Bollettino della Società Geologica italiana ». Vol. XXXIII, pp. 321-344). Roma, 1914. 8°.

Negri Giovanni. — Le unità ecologiche fondamentali in fitogeografia. (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ». Vol. XLIX). Torino, 1914. 8°, pp. 1-44.

Negri Giovanni. — Ricerche sperimentali sull'agente eziologico di un micetoma a grani neri (Penicillium mycetogenum n. f.). (Estr. dal « Giornale della R. Accademia di Medicina di Torino ». Vol. XXI). Torino, 1915. 8°, pp. 1-7.

Negri Giovanni. — Sulla possibile coltivazione in Italia del piretro di Dalmazia. (Estr. dal Giornale « L'Economia rurale ». Anno 1920), Torino, 1920. 8°, pp. 1-8.

Negri Giovanni. — Il « Prunus brigantiaca Vill. » nell'alta valle di Susa. (Estr. dagli « Annali della R. Accademia d'Agricoltura di Torino ». Vol. LXV). Torino, 1923. 8°. pp. 1-55.

Negri Giovanni. — Contributo alla briologia della Cirenaica (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ». Vol. LVII). Torino, 1922. 8°, pp. 1-8.

Negri Giovanni. — L' « acer opalus Mill. » nel bosco submontano di valle di Susa. (Estr. dagli « Annali della R. Accade-

mia di Agricoltura di Torino». Vol. LXIV). Torino, 1921. 8°, pp. 1–14.

Negri Giovanni. — Il componente atlantico della flora piemontese. (Estr. dagli «Atti della Reale Accad. delle Scienze di Torino». Vol. LXIII, pp. 32–51). Torino, 1928. 8°.

Negri Giovanni. — Recenti contributi alla concezione sinecologica dei Consorzi vegetali. (Pubblicato in «Nuovo Giornale Botanico Italiano». (Vol. XXXIV). Firenze, 1927. 8°, pp. 1–14.

Negri Giovanni. — Come si possa ricostruire la fisonomia della vegetazione della Toscana durante il periodo etrusco. (Estr. da «Studi Etruschi». Vol. I). Firenze, 1927, 8°, pp. 1–16.

Negri Giovanni. — Nel cinquantenario della morte di Filippo Parlatore. (Pubblicato in «Nuovo Giornale Botanico Italiano». Vol. XXXIV). Firenze, 1927. 8°, pp. 1-27.

Negri Giovanni. — L'«echium creticum» di Moris. (Pubblicato in «Nuovo Giornale Botanico». Vol. XXXV, pp. 135–168). Firenze, 1928. 8°.

Negri Giovanni. — Popolamento vegetale ed animale delle alte montagne. Relazione illustrativa delle proposte presentate dal Comitato geografico naz. Italiano al Congresso Internaz. di Cambridge, luglio 1928. Firenze, 1928. 8°, pp. 1–17.

Negri Giovanni. — Caratteri generali dell'azione umana sulla vegetazione. (Estr. dagli «Atti dell'XI Congresso Geografico Italiano». Vol. I). Napoli, 1930. 8°, pp. 1–19.

Negri Giovanni. — Contributo alla conoscenza della distribuzione del faggio nell'Alto Adige. (Estr. dal «Bollettino dalla R. Società Geografica Italiana». Vol. VII). Roma, 1930. 8°, pp. 1–8.

Negri Giovanni. — Orifite, ipsofite e piante alpine. (Estr. dagli «Atti dell'XI Congresso Geografico Italiano». Vol. II). Napoli, 1930. 8°, pp. 1–11.

Negri Giovanni. — Rapport du Président de la Commission du peuplement végétal et animal des montagnes. (Extr. du «Comptes Rendus du Congres International de Géographie». Tome II). Paris, 1931. 8°, pp. 1–10.

Negri Giovanni. — Luigi Calamai ceraiolo e naturalista fiorentino. (Estr. dagli «Atti della Società Colombaria»). Firenze, 1932. 8°, pp. 1–15.

Negri Giovanni. — Sulla definizione dei piani altimetrici della vegetazione nei gruppi montuosi. (Estr. dal «Nuovo Giornale Botanico Ital.». Vol. XXXIX), Firenze, 1932. 8°, pp. 1–5.

Negri Giovanni. — Ricerche sulla vegetazione dei dintorni di Firenze. (Estr. dal «Nuovo Giornale Botanico Italiano». Vol. XXXIX, pp. 613-630). Firenze, 1932. 8°.

Negri Giovanni. — Musei. (Estr. dal volume I dell'opera il «Ruwenzori». Relazioni scientifiche). Milano, s. d. 8°, pp. 1-26, tav. I–II.

Negri Giovanni. — La vegetazione dell'oasi glaciale di Terám Scer. (Caracorum). (Estr. dalla «Spedizione Italiana De Filippi nell'Imalaia. Caracorum e Turchestan Cinese» (1913–1914). Serie II. Vol. H, pp. 181–190). Firenze, 1934. 4°.

Negri Giovanni. — La vegetazione della colline di Torino. (Estr. delle «Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino». Tomo LV, pp. 113–188). Torino, 1905. 4°.

Negri Giovanni. — La vegetazione delle colline di Crea. (Estr. dalle «Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino». Tomo LVI, pp. 387–437). Torino, 1906. 4°.

Negri Giovanni. — Lo stato attuale delle conoscenze sulla vegetazione dell'Italia e proposte per la costituzione di un Comitato permanente «Pro Flora italica» per la regolare sua esplorazione. Relazione e programma. (Estr. dagli «Atti della Società Italiana per il progresso delle Scienze». II riunione, Firenze, ottobre 1908). Roma, 1909. 8°, pp. 1–107.

Negri Giovanni. — Contributo alla briologia dell'isola di Rodi. (Estr. dagli «Annali di Botanica del Prof. Pirotta». Vol. XII, pp. 69–77). S. l. 1913. 8°.

Negri Giovanni. — La vegetazione di Monte Bracco (Saluzzo). (Estr. dalle « Memorie della Società italiana delle Scienze detta dei XL ». Serie II, tomo XXI). Roma, 1920. 4°, pp. 1-103.

Negri Giovanni. — Su un musco cavernicolo crescente nell'oscurità assoluta. (Estr. dai « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ». Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Volume XXIX, pp. 159–162). Roma, 1920. 8°.

Negri Giovanni. — Sociologia vegetale o sinecologia? (Estr. dagli « Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze ». Riunione XV, Bologna 30 ottobre–5 novembre 1926). Pavia, 1927. 8°, pp. 1–31.

Negri Giovanni. — La vegetazione e le oscillazioni del clima nel più recente passato geologico. (Estr. dagli « Atti della Società Italiana per il progresso delle Scienze ». Riunione XVIII, Firenze, settembre 1929). Pavia, 1930. 8°. pp. 1–15.

Palmer Carroll E. — Growth and the economic depression. A study of the weight of elementary school children in 1921–27 and in 1933. (Ruprint from the « Public Health Reports. Vol. 48). Washington, 1934. 8°, pp. 1–16.

Palmer Carroll E. — Note on the statistical significance of the difference of two series of comparable means. (Reprinted from « Human Biology ». Volume VI, n. 2, 1934). Baltimore, 1934. 8°.

Palmer Carroll E. — Temporal cycles of growth. (Reprint from « School Physicians' Bulletin ». Vol. III). S. l. 1932. 8°, pp. 1-5.

Palmer Carroll E. — Variations of growth in weight of elementary school children 1921–1928. (Reprint from the « Public Health Reports ». Vol. 48). Washington, 1933. 8°, pp. 1–13.

Picone M. — I compiti dell'Istituto per le applicazioni del calcolo nella ricerca scientifica e tecnica. (Estr. da « L'Elettrotecnica ». Vol. XXI). S. d. 1934. 4°, pp. 1-8.

Picone M. — Trattazione elementare dell'approssimazione lineare in insiemi non limitati. (Estr. dal « Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari ». Anno V. 1934). Roma, 1934. 8°, pp. 1-43.

Resoconti del II convegno Nazionale di Radiologia, 23-24 febbraio 1934. Roma, 1934. 8°, pp. 1–30.

Riggio Antonino. — Su alcuni sistemi di carichi combinati (concentrati e ripartiti) da considerare nel calcolo dei ponti per strade ordinarie. (Estr. dalla Rivista " L'Ingegnere ". Vol. VIII). Roma, 1934. 4°, pp. 1-8.

Rocci Ubaldo e Turati Emilio. — Le leucanidi del gruppo zeae Dup. e la cosiddetta « nattua del granturco ». Parte I e II. (Estr. dalle « Memorie della Società Entomologica Italiana ». Vol. XII, pagine 273-293; XIII, pp. 1–22). Genova, 1934. 8°.

Rodolico Antonino. — Ricerche di Biologia. Firenze, 1934. 8°, pp. 1-xiv, 1–153. Tav. I-X.

Severi F. — Sobre funcions de dues variables complexes. Conferencies donades el maig del 1933. (Institut d'Estudis Catalans. Secciò de Ciencies). Barcelona, 1934. 8°, pp. 1-34.

Silvestri Filippo. — Description of a new species of Thysanura (Campodeidae) from the Hawaïcán Island. (Reprinted from the « Proceedings Haw. Ent. Soc. ». Vol. VIII, pp. 519–522). S. l. 1933. 8°.

Silvestri Filippo — Marquesan Thysanura. (Reprinted from the « Bernice P. Bishop Museum ». Bulletin 114, pp. 305–312). S. d. t. 8°.

Turati Emilio. — Lepidotteri della spedizione di S. A. R. il Duca di Spoleto al Caracorum nel 1929. (Estr. dagli « Atti delle Soc. Ital. di Scienze Naturali ». Vol. LXXII, pp. 191–208). Milano, 1933. 8°.

Turati Emilio. — Note critiche di Lepidotterologia. (Estr. dalle « Memorie della Società Entomologica Italiana ». Volume XIII, pp. 65–77). Genova, 1934. 8°.

Turati Emilio. — Novità di Lepidotterologia in Cirenaica. (Estr. dagli « Atti della Soc.

Ital. di Scienze Naturali ». Vol. LXXIII, pp. 159-212). Milano, 1934. 8°.

Turati Emilio. — Vedi Rocci Ubaldo.

Valenti Tommaso. — Inventario di un « Aromataria » di Foligno (1470) con documento inedito e glossario. (Estr. dal « Bollettino dell' Istituto Storico Italiano dell'Arte Sanitaria » allegato alla Rassegna di Clinica. Anno XXXIII), Roma, 1934. 8°, pp. 1-19.

Verriest G. — Évarist Galois et la théorie des équations algébriques. (Extr. de la « Revue des Questions scientifiques », mai-juillet 1934). Louvain, 1934. 8°, pp. 1-58.

Volkenburgh V. A. — Vedi Daull J. A.

Walker Sydney. — Vedi Mathews Albert P.

Whitcher B. R. — Vedi Mathews Albert P.

Winants Marcel. — Équations du troisième ordre à caractéristiques réelles. (Extr. des « Bulletins de l'Académie royale de Belgique ». Classe des Sciences, Serie V, t. XX, pp. 207-221). Bruxelles, 1934. 8°.

Winants Marcel. — Quelques propriétés des équations hyperboliques du deuxième et du troisième ordre. (Extr. des « Bulletins de l'Académie royale de Belgique ». Classe des Sciences, Serie V, t. XIX, pp. 1034-1043). Bruxelles, 1933. 8°.

Winants Marcel. — Surface intégrale déterminée par trois caractéristiques concourantes. (Extr. des « Bulletins de l'Académie Royale de Belgique ». Classe des Sciences, Serie V, tome XVII, pp. 1195-1205). Bruxelles, 1931. 8°.

Winants Marcel. — Résolution d'un nouveau problème à deux courbes pour une certaine équation hyperbolique du troisième ordre. (Extr. des « Bulletins de l'Academie royale de Belgique ». Classe des Sciences, Serie V, tome XX, pp. 103-105). Bruxelles, 1934. 8°.

Winants Marcel. — Contribution à la théorie des équation hyperboliques du second ordre. (Extr. des « Bulletins de l'Academie royale de Belgique ». Classe des Sciences. Serie V, tome XVII, pp. 788-792). Bruxelles, 1931. 8°.

Winants Marcel. — Quelques équation linéaires aux dérivées partielles possédant trois familles distinctes de caractéristiques réelles. (Extr. des Bulletins de l'Academie royale de Belgique ». Classe des Sciences. Serie V, tome XVI, pp. 175-793). Bruxelles, 1930. 8°.

Winants Marcel. — Application de la méthode des approximations successives à l'intégration de certaines équations linéaires trinomes aux derivées partielles d'ordre quelconque. (Extr. des « Bulletins de l'Académie royale de Belgique ». Classe des Sciences. Serie V, tome XVI, pp. 394-412). Bruxelles, 1930. 8°.

Winants Marcel. — Nouvelles applications de la théorie des équations intégrales. (Extr. des « Bulletins de l'Académie royale de Belgique ». Classe des Sciences. Serie V, tome XVI, pp. 1001-1011). Bruxelles, 1930. 8°.

Winants Marcel. — Nouvelles recherches relatives a la généralisation de l'équation de Fredholm. (Extr. du « Bulletin des Sciences mathématiques ». Serie 2ª, tome LV). Paris, 1931. 8°, pp. 1-65.

Winants Marcel. — Sur l'équation de Fredholm généralisée avec une application a l'équation différentielle linéaire du troisième ordre. (Extr. du « Bulletin des Sciences mathématiques ». Serie 2ª, tome LIV). Paris, 1930. 8°, pp. 1-12.

Winants Marcel. — Sur l'équation de Fredholm généralisée. (Extr. du « Bulletin des Sciences mathématiques ». Serie 2ª, tome LIV). Paris, 1930. 8°, pp. 1-24.

Winants Marcel. — Généralisation de l'équation de Fredholm avec application a l'intégration de certaines equations linéaires trinomes d'ordre quelconque. (Extr. du « Bulletin des Sciences mathématiques ». Serie 2ª, tome LIV). Paris, 1930. 8°, pp. 1-12.

Winants Marcel. — Une généralisation de l'équation de Fredholm. (Extr. des « Bulletins de l'Académie royale de Belgique ». Classe des Sciences. Serie 5ª, t. XV, pp. 561-566). Bruxelles, 1929. 8°.

Winants Marcel. — A propos d'un catalogue paradoxal. (Extr. de l' « Enseignement mathématique ». Année XXXI, pp. 267-270). Paris, 1932. 8°.

Winants Marcel. — Équation différentielle

linéaire du troisième ordre et courbe intégrale passant par trois points donnés. (Extr. des « Comptes rendus des seances de l'Academie des Sciences ». Tome 190). Paris, 1930. 4°, pp. 1-3.

WINANTS MARCEL. — Détermination d'une fonction de fonctions par la moyen d'une équation intégrale. (Extr. des « Comptes rendus des seances de l'Académie des Sciences »). Paris. 1931. 4°, pp. 1-2.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 16 dicembre 1934 (anno XIII)

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica (Geometria). — *Proprietà in grande delle linee piane convesse: Le orbiformi e le corrispondenze equilonghe fra ovali* [1]. Nota II di B. SEGRE, presentata [2] dal Socio F. SEVERI.

1. Due punti distinti di un'ovale in cui le relative tangenti risultino parallele, si diranno fra loro opposti; la distanza fra due qualunque tangenti parallele di un'ovale, prenderà il nome di larghezza dell'ovale nella direzione comune a quelle tangenti; infine un'ovale che abbia la medesima larghezza in tutte le direzioni, si chiamerà un'ovale di larghezza costante od anche brevemente – seguendo EULERO – un'orbiforme. Si ha allora che:

Per una qualsiasi ovale, che non sia di larghezza costante, valgono le limitazioni:

$$s < d < \frac{l}{\pi} < D < S,$$

ove l denota la lunghezza dell'ovale, d e D sono rispettivamente la sua minima e la sua massima larghezza, infine s ed S indicano ordinatamente il minimo ed il massimo della somma dei raggi di curvatura dell'ovale in due punti fra loro opposti. Invece per un'orbiforme le 5 quantità che figurano come membri delle suddette limitazioni, risultano sempre uguali fra loro [3].

(1) Cfr. specialmente per la terminologia, la Nota dell'autore pubblicata in questi « Rendiconti », ser. 6ª, to. 20 (1934), p. 407. Tale Nota verrà in seguito semplicemente richiamata come « Nota I ».

(2) Nella seduta del 2 dicembre 1934.

(3) La limitazione $l \leq \pi D$, insieme al fatto che $l = \pi D$ caratterizza le orbiformi, trovansi già in A. ROSENTHAL–O. SZÁSZ, *Eine Extremaleigenschaft der Kurven kostanter Breite.* « Jahres. der Deutschen Math.–Ver. », to. 25 (1916), p. 278.

Questa proposizione fornisce senz'altro varie proprietà estremali delle orbiformi, che, per brevità, non stiamo ad enunciare; da essa inoltre si trae subito il corollario:

Per un'ovale qualsiasi valgono le limitazioni:

$$m \leqq \frac{s}{2} \leqq \frac{d}{2} \leqq \frac{l}{2\pi} \leqq \frac{D}{2} \leqq \frac{S}{2} \leqq M,$$

ove m è il minimo ed M il massimo raggio di curvatura dell'ovale, e gli altri simboli hanno i significati dianzi specificati.

A complemento di questo corollario, poggiando su quanto è stato detto in *a*) al n. 4 della Nota I, si ottiene che:

Data un'ovale qualsiasi, fra la sua minima larghezza d, la sua massima larghezza D, il suo minimo raggio di curvatura m ed il suo massimo raggio di curvatura M, intercede sempre la catena di disuguaglianze:

$$m < \frac{d}{2} \leqq \frac{D}{2} < M,$$

tranne che l'ovale sia una circonferenza, nel qual caso le 4 quantità che in quella compaiono risultano uguali fra loro.

Rileviamo la seguente proprietà estremale del cerchio, implicita in ciò che precede:

Fra tutte le ovali aventi un dato minimo (massimo) raggio di curvatura, la circonferenza avente tale raggio è caratterizzata dalla proprietà di ammettere la più piccola (la più grande) larghezza.

2. Due ovali $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ (distinte o sovrapposte) si possono sempre – in infiniti modi – riferire fra loro mediante una corrispondenza conservante le deflessioni, ossia tale da mutare un qualunque arco di $\mathcal{C}$ in un arco di $\mathcal{C}'$ avente deflessione uguale a quella del primo. È chiaro (v. il n. 1 della Nota I) che un riferimento siffatto fra $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$, insieme a due qualsiasi punti omologhi di $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, associa sempre fra loro i punti ad essi rispettivamente opposti; in altri termini, un riferimento fra $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ che conservi le deflessioni, fa corrispondere a due qualunque tangenti parallele di $\mathcal{C}$, due tangenti di $\mathcal{C}'$ pure parallele fra loro: qualora sempre accada che la distanza fra le prime due tangenti sia uguale alla distanza fra le ultime due, la corrispondenza fra $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ verrà brevemente denominata una corrispondenza equilonga.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una corrispondenza fra due ovali conservante le deflessioni sia equilonga, è che la somma dei raggi di curvatura della prima ovale in due qualunque punti opposti, risulti sempre uguale alla somma analoga relativa ai due punti (pure opposti) omologhi di quelli sulla seconda ovale.

Ne consegue che:

Due ovali trasformabili l'una nell'altra mediante una corrispondenza equilonga, hanno necessariamente lunghezze uguali.

La suddetta proposizione, inoltre, permette assai semplicemente di determinare tutte le trasformate equilonghe di un'ovale assegnata; senza soffermarci su questo punto, rileviamo soltanto che:

Un'ovale ammette sempre infinite trasformate equilonghe, fra le quali ve n'è una dotata di centro (individuata a meno di moti rigidi).

Siccome poi, ovviamente, è la medesima cosa dire che un'ovale è una orbiforme, o dire ch'essa è trasformata equilonga di una circonferenza, così da quanto precede si ha in particolare che:

Tutte le orbiformi di larghezza d, hanno (come la circonferenza) lunghezza uguale a πd. Condizione necessaria e sufficiente affinchè un'ovale abbia larghezza costante d, è che la somma dei raggi di curvatura in due suoi punti opposti qualsiasi risulti sempre uguale a d. Non vi sono orbiformi dotate di centro, all'infuori delle circonferenze [1].

3. Una proprietà notevole delle corrispondenze equilonghe fra ovali è espressa dal seguente teorema:

Se fra due ovali, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$, intercede una corrispondenza equilonga, esistono sempre su $\mathcal{C}$ almeno 6 punti distinti, in ciascuno dei quali la curvatura di $\mathcal{C}$ risulta uguale a quella che $\mathcal{C}'$ ha nel punto omologo. Si ha anzi, di più, che – se si esclude che $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ si possano portare a sovrapporre in modo che punti corrispondenti vengano a coincidere – *la differenza fra il raggio di curvatura di $\mathcal{C}$ in un punto mobile su questa ovale, ed il raggio di curvatura di $\mathcal{C}'$ nel punto omologo, ammette sempre su $\mathcal{C}$ (almeno) tre massimi positivi alternati con tre minini negativi* (onde questi 6 estremi sono necessariamente separati da almeno 6 zeri della suddetta funzione).

Ogni ovale ammette sempre almeno una trasformazione equilonga non identica in sè, tale essendo manifestamente la corrispondenza involutoria che associa punti dell'ovale fra loro opposti. Applicando ad essa il teorema precedente, si ottiene che:

Lungo un'ovale, che non sia a centro, la differenza fra la curvatura nei singoli suoi punti e la curvatura nei punti rispettivamente opposti, ammette sempre almeno tre massimi positivi alternati con tre minimi negativi. Ne consegue che *su ogni ovale vi sono sempre (almeno) tre coppie di punti, tali che nei punti di ogni coppia le tangenti risultano parallele e le curvature uguali* [2].

(1) Alcuni dei risultati contenuti in questo enunciato sono noti; cfr., ad esempio, T. Bonnesen-W. Fenchel, *Theorie der konvexen Körper*. « Ergebnisse der Math. », to. III, 1 (Berlin, Springer, 1934), § 15, n. 65.

(2) La seconda parte di questo corollario è già stata enunciata da W. Blaschke, « Archiv der Math. und Phys. » (3), to. 26 (1917), p. 65, probl. 540, e poscia direttamente stabilita da G. Szegö, « Archiv der Math. und Phys. » (3), to. 28 (1920), p. 183. Vedasi

Ogni orbiforme può (in infiniti modi) venir riferita, mediante una corrispondenza equilonga, ad una circonferenza avente diametro uguale alla sua larghezza. Impiegando in tal caso il teorema dato in principio, si deduce che:

Ad una qualunque ovale di larghezza d costante, appartengono sempre (almeno) 6 punti distinti in cui il raggio di curvatura è uguale ad $\frac{1}{2}d$. Di più, se l'orbiforme che si considera non è una circonferenza, *lungo essa il raggio di curvatura ammette sempre (almeno) 3 massimi maggiori di* $\frac{1}{2}d$, *alternati con 3 minimi minori di* $\frac{1}{2}d$; *il minimo numero dei vertici di un'orbiforme risulta di conseguenza uguale a 6* [1].

Ogni corrispondenza conservante le deflessioni fra due orbiformi aventi larghezze uguali, è manifestamente una corrispondenza equilonga; tale è dunque, in particolare, una qualunque delle infinite trasformazioni conservanti le deflessioni, che mutano un'orbiforme in se stessa. Applicando il teorema enunciato in principio alle corrispondenze concordi di quest'ultimo tipo, si prova agevolmente che:

Un'orbiforme contiene sempre almeno 6 archi, aventi una deflessione totale assegnata arbitrariamente (fra 0 *e* 2π) *e tali che per ciascuno di essi le curvature negli estremi risultino uguali fra loro.*

Applicando invece quel teorema alle corrispondenze discordi del tipo dianzi considerato, risulta che:

Su di una qualunque orbiforme esistono sempre almeno due archi parziali tali che ciascuno di essi abbia nei due estremi curvature uguali, e venga diviso in due archi aventi deflessioni uguali da un punto arbitrariamente prefissato sull'ovale.

pure W. Süss, « Jahres. der Deutschen Math.-Ver. », to. 33 (1924), p. 32; W. Süss, « Tôhoku Math. Journ. », to. 24 (1924), p. 66 e to. 28 (1927), p. 216.

(1) Il fatto che un'orbiforme possiede sempre almeno 6 vertici (così denominansi i punti ove la curvatura ha un estremo), è già stato enunciato da W. Blaschke, « Archiv der Math. und Phys. » (3), to. 21 (1913), p. 288, probl. 449, e poi dimostrato da Jordan e Fiedler, « Archiv der Math. und Phys. » (3), to. 22 (1914), p. 362. L'esistenza, su di un'orbiforme di larghezza d, di almeno 6 punti ove il raggio di curvatura è uguale ad $\frac{1}{2}d$, trovasi già in S. Mukhopadhyaya, *Circles Incident on an Oval of undefined Curvatures.* « Tôhoku Math. Journ. », to. 34 (1931), p. 115, oppure *Collected geometrical papers.* Part II (Calcutta, University Press, 1931), p. 294.

Matematica (Geometria). — *Sulle quaterne di Salmon nelle cubiche piane di genere 1.* Nota di J. Rey Pastor, presentata [1] dal Socio F. Enriques.

Si sa bene come si forma l'equazione del gruppo di tangenti ad una cubica piana $f = 0$ per un punto P_0. Dati i due punti $P_0(x_0, y_0, z_0)$ $P(x, y, z)$, i punti $P_0 + \lambda P$ ove la retta $P_0 P$ taglia la cubica, vengono determinati dall'equazione

$$\lambda^3 f + \lambda^2 D_0 f + \lambda D f_0 + f_0 = 0$$

e scrivendo il discriminante nella forma

$$\Delta = \overline{Df_0^2}(\overline{D_0 f^2} - 4f \cdot Df_0) + \tag{1}$$
$$+ f_0(18 f \cdot \overline{D_0 f} \cdot \overline{Df_0} - 4\overline{D_0 f^3} - 27 f_0 \cdot f^2) = 0$$

questa equazione di sesto grado rappresenta le sei tangenti (o pseudotangenti se vi è punto nodale o cuspidale) tracciate per P_0. Se il punto P_0 si trova su f e la cubica è di genere 1, scontando la tangente che ha P_0 come punto di contatto, la quaterna di tangenti rimanenti (quaterna di Salmon) viene data dall'equazione

$$F = \overline{D_0 f^2} - 4f \cdot Df_0 = 0 .$$

La retta polare dal punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ rispetto a questa quaterna è rappresentata dall'equazione

$$DF_1 = xF'_{x_1} + yF'_{y_1} + zF'_{z_1} = 0$$

ma

$$F'_x = 2 D_0 f (x_0 f''_{xx} + y_0 f''_{yx} + z_0 f''_{zx}) - 4 f'_x Df_0 - 4f \cdot f'_{x_0}$$
$$F'_y = 2 D_0 f (x_0 f''_{xy} + y_0 f''_{yy} + z_0 f''_{zy}) - 4 f'_y Df_0 - 4f \cdot f'_{y_0}$$
$$F'_z = 2 D_0 f (x_0 f''_{xz} + y_0 f''_{yz} + z_0 f''_{zz}) - 4 f'_z Df_0 - 4f \cdot f'_{z_0}$$

e, se P_1 è situato nell'hessiana, e P_2 è il suo coniugato di Steiner, si hanno le relazioni:

$$\begin{cases} x_2 f''_{x_1 x_1} + y_2 f''_{y_1 x_1} + z_2 f''_{z_1 x_1} = 0 \\ x_2 f''_{x_1 y_1} + y_2 f''_{y_1 x_1} + z_2 f''_{z_1 x_1} = 0 \\ x_2 f''_{x_1 z_1} + y_2 f''_{y_1 z_1} + z_2 f''_{z_1 z_1} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

(1) Nella seduta del 4 novembre 1934.

tenendo in conto queste uguaglianze e quell'altra $D_2 f_1 = 0$ risulta la seguente semplice relazione:

$$D_2 F_1 = -4 f_1 \cdot D_2 f_0 .$$

Risulta, dunque, $D_2 F_1 = 0$ in due casi:

1° Se $f_1 = 0$, cioè se P_1 è punto d'inflessione o punto multiplo.

2° Se $D_2 f_0 = 0$, cioè, se P_2 appartiene alla retta tangente ad f in P_0.

Otteniamo, dunque, due teoremi:

I. – *Le rette polari di ogni punto d'inflessione* P_1 *di una cubica* f *di genere* 1 *rispetto tutte le quaterne di tangenti di Salmon formano un fascio lineare, il cui vertice è il coniugato di* P_1, *cioè, il punto d'intersezione della sua tangente colla sua retta armonica.*

Se P_1 è un punto doppio di f questa proprietà sussiste; ma in questo caso è triviale, giacchè per un dato punto P_0 passano due o tre tangenti che coincidono con $P_0 P_1$ e pertanto la retta polare di P_1 è la stessa $P_1 P_0$.

La seconda condizione $D_2 f_0 = 0$ esprime che la retta tangente nel punto P_0 contiene il P_2 e conduce a questo risultato:

II. – *Ad ogni punto* P_1 *della hessiana di* f *corrispondono sei quaterne di Salmon, tali che le sei rette polari di* P_1 *per rapporto a queste quaterne concorrono nello coniugato steineriano di* P_1.

In particolare, se P_1 è il coniugato di un flesso P_2 una delle quaterne è formata dalla tangente in P_2 e delle tre tangenti restanti tracciate per P_2, essendo dunque retta polare la stessa retta $P_2 P_1$.

Come corollario di I risulta facilmente:

III. – *Se* f *è una cubica equianarmonica, il primo gruppo polare della retta* $P_0 Q$ *che congiunge un punto di* f *con il punto di concorso di tre tangenti di flesso con rispetto alla corrispondente quaterna di Salmon, è la terna che proietta i tre flessi.*

Diremo che un insieme definito algebricamente di gruppi g_i di n elementi di una retta o di qualunque altra forma fondamentale di prima specie F formano una involuzione ∞^1 di ordine n e rango r se ogni elemento di F appartiene a r gruppi. La equazione $g(x, \alpha, \beta) = 0$ dove $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ è un'equazione algebraica tale che il sistema $g(x, \alpha, \beta) = 0$, $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ abbia r soluzioni $(\alpha, \beta) \cdots (\alpha, \beta)$ per ogni x, rappresenta un'involuzione di rango r.

I gruppi polari di ogni ordine di un punto fisso rispetto ai gruppi g_i vengono dati da una equazione che contiene i parametri α, β con lo stesso grado che l'equazione dell'involuzione e formano pertanto un'involuzione che è in generale dello stesso rango r.

Consideriamo in particolare le quaterne di punti determinate dalle quaterne di Salmon sopra una retta qualunque s. Per ogni punto della retta s passano sei tangenti, ognuna delle quali ha un solo punto residuale la cui quaterna corrispondente di Salmon contiene il punto dato. Dunque, le quaterne determinate sopra una retta secante generica dalle quaterne di Salmon formano una involuzione di ordine 4 e rango 6.

Se noi partiamo dell'equazione canonica

$$y^2 = x^3 + (hx + k)^2$$

la quaterna di Salmon dal punto P_0 si esprime coll'equazione

$$[x_0(3x^2 + 2h^2x + 2hk) + y_0(-2y) + z_0(-y^2 + h^2x^2 + 4hkx + 3k^2)]^2 =$$
$$= 4[x^3 - y^2 + (hx + k)^2][x(3x^2 + 2h^2x_0 + 2hk) - 2yy_0 +$$
$$+ (-y_0^2 + h^2x_0^2 + 4hkx_0 + 3k^2)]$$

e sulla retta di flessi $x = 0$ risulta l'involuzione di rango 6:

$$y^4 - 4y_0y^3 + (12hkx_0 + 6k^2 + 4h^2x_0^2)y^2 - (4k^2y_0 + 8hkx_0y_0)y +$$
$$+ (28hk^3x_0 + 4k^2y_0^2 - 3k^4) = 0$$

ma i punti polari del flesso P_1 hanno $y = y_0$, come risulta dal teorema I, formano, dunque, un'involuzione di ordine 1 e rango 3, cioè ognuno dei punti polari y_0 corrisponde a tre quaterne.

Se la retta secante s è la tangente d'inflessione $z = 0$ risulta analogamente un'involuzione d'ordine 4 e rango 6:

$$(3x_0x^2 - y^2 - h^2x^2) - 4x^3[x(3x_0^2 + 2h^2x_0 + 2hk) - 2yy_0] = 0$$

ma i punti polari di P_1 coincidono tutti col $y = 0$. Per consequenza:

IV. – *Le quaterne di Salmon determinano sopra ogni retta secante un'involuzione di quarto ordine e rango 6. Se la secante è una retta di flessi i punti polari di ognuno dei tre flessi formano un'involuzione di ordine 1 e rango 3. Se la secante è una tangente di flesso i poli coincidono col coniugato del flesso.*

Se la cubica è equianarmonica, cioè, $h = 0$, l'equazione dell'involuzione sulla retta di flessi $x = 0$ non contiene la variabile x_0 e dunque i sei punti di f corrispondenti ad ognuno dei punti della retta di flessi sono tre a tre allineati col punto $Q(1, 0, 0)$ dove concorrono le tre tangenti d'inflessione.

Questo fatto completa il noto teorema di Slawyk e Milinowski. In vero, si sa che i punti d'intersezione delle sei tangenti ad f tracciate per un punto P_0 soddisfano l'equazione ottenuta facendo $f = 0$ nella (1)

$$\overline{Df_0^2} \cdot \overline{D_0 f^2} - 4 f_0 \cdot \overline{D_0 f^3} = 0$$

e scontando i sei punti di contatto nei quali $D_0 f = 0$, i sei punti residuali, soddisfano l'equazione:

$$\overline{Df_0^2} = 4 f_0 \cdot \overline{D_0 f} \tag{3}$$

che rappresenta una conica bitangente alla prima polare di P_0 nei punti d'intersezione colla retta polare.

Ma, se la cubica è equianarmonica, le tre tangenti nei flessi allineati concorrono in un punto Q; la retta polare di un punto generico P_0 della retta di flessi $P_1 P_2 P_3$, è la stessa che rispetto alla terna di raggi QP_1, QP_2, QP_3 e la conica polare di P_0 rispetto di f è la stessa che rispetto di questa terna, cioè è formata da due raggi che passano per Q. L'equazione (3) dimostra dunque:

V. - *I sei punti residuali delle sei tangenti ad una cubica equianarmonica per ogni punto di una retta che contiene tre flessi giacciono tre a tre sopra due rette che concorrono colle tangenti nei tre flessi. Queste due rette formano una coppia di raggi della involuzione quadratica determinata dalla prima polare di* P_0 *e dalla retta polare considerata come doppia.*

Finalmente, come consequenza dal fatto di non contenere la coordinata x_0 l'equazione dell'involuzione sopra la retta di flessi, risulta:

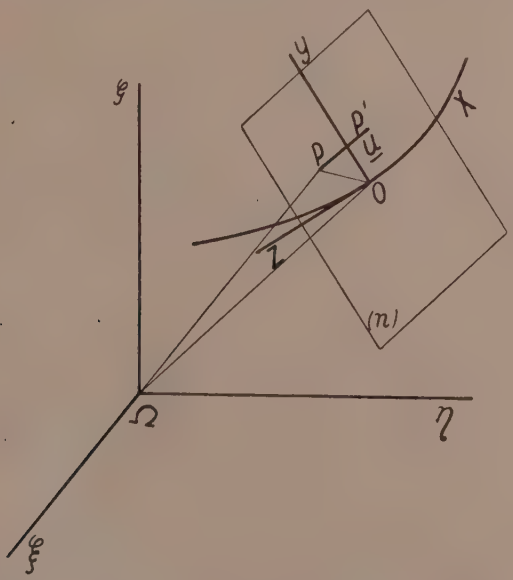
VI. - *Le tre quaterne di Salmon corrispondenti alle tre punti di una cubica equianarmonica f, nei quali è tagliata da una retta qualunque s concorrente con tre tangenti d'inflessione, sono perspettive di una stessa quaterna sulla retta di allineazione di flessi; il primo gruppo polare di questa quaterna con rispetto al punto dove s incontra la retta di flessi, è la terna di questi flessi.*

Meccanica. — *Questioni di elasticità vincolata.* - II. *Forma appropriata del ds^2 e conseguenze del vincolo geometrico.* Nota di E. VOLTERRA, presentata [1] dal Socio T. LEVI-CIVITA.

4. - ESPRESSIONE DEL ds^2.

I corpi elastici isotropi, di cui vogliamo studiare le deformazioni, sono solidi allungati ad asse sia curvilineo che rettilineo. Indichiamone con c e τ rispettivamente la prima e la seconda curvatura della fibra media (baricentrica) nel punto generico O e con $\frac{1}{c} = R$ e $\frac{1}{\tau} = T$ i raggi di curvatura e di torsione.

Riferiamoci ad una terna fissa (ortogonale) $\Omega\xi\eta\zeta$ [2] (vedi figura) e scegliamo come coordinate curvilinee $Oxyz$ il sistema destro in cui x



coincide colla fibra media baricentrica del solido (ed ha per verso il verso fissato come positivo della fibra media), y coincide colla normale princi-

(1) Nella seduta del 16 dicembre 1934.

(2) Nella Nota I abbiamo indicato per brevità di notazione le coordinate cartesiane ortogonali ξ, η, ζ, con x_1, x_2, x_3; le coordinate curvilinee xyz con x^1, x^2, x^3.

pale dalla parte del centro di curvatura in O e la z coincide con la binormale in O. Troviamo l'espressione del quadrato dell'elemento lineare nelle coordinate xyz. Sia P il punto generico del solido, avente appunto le coordinate x, y, z e si designino al solito con $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ i tre versori fondamentali della tangente, della normale e della binormale alla fibra media baricentrica nel punto O, piede della normale calata dal punto generico P sulla detta fibra baricentrica.

Ciò premesso, prendiamo in considerazione uno spostamento elementare $d\mathrm{P}$ del punto P. Per il principio dei moti relativi, tale spostamento, riferito al triedro fisso $\Omega\xi\eta\zeta$, potrà pensarsi decomposto in due altri $d_1\mathrm{P}$ e $d_2\mathrm{P}$, il primo relativo al triedro (mobile) $Oxyz$, ed il secondo proveniente dal trascinamento di P solidalmente col detto triedro $Oxyz$.

Essendo

$$\mathrm{P} - \mathrm{O} = y\boldsymbol{n} + z\boldsymbol{b} \tag{1}$$

avremo (in quanto $\mathrm{O}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ sono elementi del triedro cui si intende riferito $d_2\mathrm{P}$, e sono quindi da trattarsi come costanti)

$$d_1\mathrm{P} = dy\,\boldsymbol{n} + dz\,\boldsymbol{b}. \tag{2}$$

D'altra parte, per definizione della coordinata x del punto P, $dx\,\boldsymbol{t}$ rappresenta lo spostamento che subisce il piede della perpendicolare, ossia l'origine O del triedro mobile, per effetto dello spostamento attribuito a P. L'atto di moto rigido del triedro $Oxyz$ si può (assunto O come centro di riduzione) risguardare caratterizzato dalla traslazione elementare $dx\,\boldsymbol{t}$ e da una rotazione elementare $dx\,\boldsymbol{\omega}$ dove, per le note formule di Frenet,

$$\boldsymbol{\omega} = -\tau\boldsymbol{t} + c\,\boldsymbol{n}. \tag{3}$$

La formula fondamentale della cinematica dei moti rigidi, ci dà

$$d_2\mathrm{P} = dx\,[\boldsymbol{t} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathrm{P} - \mathrm{O})]$$

da cui, sostituite per $\boldsymbol{\omega}$ e $(\mathrm{P} - \mathrm{O})$ le loro espressioni (3) e (1), segue

$$d\mathrm{P} = d_1\mathrm{P} + d_2\mathrm{P} = \boldsymbol{t}(1 - yc)\,dx + \boldsymbol{n}(dy + z\tau\,dx) + \boldsymbol{b}(dz - y\tau\,dx). \tag{4}$$

Il quadrato dell'elemento lineare si identifica in ogni caso con $d\mathrm{P} \times d\mathrm{P}$. In base alla (4) se ne ha senz'altro l'espressione nelle coordinate qua adottate, sotto la forma

$$ds^2 = d\mathrm{P} \times d\mathrm{P} = dx^2\{(1 - yc)^2 + (y\tau)^2 + (z\tau)^2\} + dy^2 + dz^2 - \\ - 2y\tau\,dx\,dz + 2z\tau\,dx\,dy. \tag{5}$$

Nel caso in cui la fibra baricentrica risulta piana ($\tau = 0$) l'espressione del ds^2 si semplifica notevolmente nella:

$$ds^2 = dx^2 (1 - yc)^2 + dy^2 + dz^2. \tag{6}$$

5. - Conseguenze del vincolo geometrico.

Indichiamo con $\boldsymbol{u}$ il vettore spostamento elastico del punto generico P e rivolgiamo la nostra attenzione ai casi di elasticità vincolata, nei quali si suppone che la deformazione elastica del solido sia soggetta al vincolo geometrico che le sezioni normali alla fibra media si debbano conservare piane.

Dico che a tale condizione si soddisfa supponendo che $\boldsymbol{u}$ dipenda linearmente dalle coordinate y e z, ossia che si abbia:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\lambda} y + \boldsymbol{\mu} z + \boldsymbol{\nu} \tag{7}$$

ove $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\nu}$ sono tre vettori, funzioni *a priori* incognite della sola x.

Infatti il punto P a deformazione avvenuta si porterà in $P' = P + \boldsymbol{u}$ (vedi figura) e sarà: $(P' - O) = (P - O) + \boldsymbol{u}$, dove per le (1) e (7)

$$P' = O + y(\boldsymbol{n} + \boldsymbol{\lambda}) + z(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\nu} \tag{8}$$

la quale (per la linearità rispetto alle due coordinate y e z) sta appunto ad esprimere la *condizione di elasticità vincolata*: che tutti i punti P situati in una medesima sezione normale alla direttrice (cioè aventi la stessa coordinata x) si portano per effetto della deformazione in punti P' ancora situati su di un medesimo piano.

Per evitare ambiguità, senza introdurre nuove lettere, indicheremo rispettivamente con $\underset{i}{\lambda}, \underset{i}{\mu}, \underset{i}{\nu}$; λ^i, μ^i, ν^i; λ_i, μ_i, ν_i $(i = 1, 2, 3)$ le componenti cartesiane (rispetto alla terna $\Omega\xi\eta\zeta$), controvarianti e covarianti rispetto alle coordinate (curvilinee) x, y, z, dei tre vettori incogniti $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\nu}$.

Dalla (7) scende in particolare

$$u^i = \lambda^i y + \mu^i z + \nu^i. \tag{9}$$

La deformazione elastica del solido sarà completamente determinata allorchè risultino conosciute le 9 funzioni incognite della sola x: λ^i, μ^i, ν^i. Tutto si riduce pertanto a caratterizzare queste nove funzioni in base ad una assegnata sollecitazione esterna. Troveremo in seguito nove equazioni differenziali ordinarie determinatrici delle dette funzioni.

6. – Relazioni tra le varie specie di componenti dei tre vettori λ, μ e ν.

Vogliamo rendere esplicite le relazioni che passano tra le componenti cartesiane, le controvarianti e covarianti dei tre vettori λ, μ e ν. Indichiamo con ξ, η, ζ le coordinate del punto generico P con $\xi_0(x), \eta_0(x), \zeta_0(x)$ le coordinate del piede O della normale alla fibra media del solido condotta da P, rispetto agli assi fissi $\Omega\xi\eta\zeta$ e con $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ i coseni direttori della tangente, della normale e della binormale.

Proiettando la (1) sugli assi $\Omega\xi, \Omega\eta, \Omega\zeta$ avremo:

$$(10) \qquad \begin{cases} \xi = \xi_0(x) + y\alpha_2 + z\alpha_3 \\ \eta = \eta_0(x) + y\beta_2 + z\beta_3 \\ \zeta = \zeta_0(x) + y\gamma_2 + z\gamma_3 . \end{cases}$$

Ove queste formole si moltiplichino rispettivamente per $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, e poi si sommino si ottiene:

$$(11) \qquad \begin{cases} y = \alpha_2[\xi - \xi_0(x)] + \beta_2[\eta - \eta_0(x)] + \gamma_2[\zeta - \zeta_0(x)] \\ z = \alpha_3[\xi - \xi_0(x)] + \beta_3[\eta - \eta_0(x) + \gamma_3[\zeta - \zeta_0(x)] \\ \xi\alpha_1 + \eta\beta_1 + \zeta\gamma_1 = \xi_0(x)\alpha_1 + \eta_0(x)\beta_1 + \zeta_0(x)\gamma_1 . \end{cases}$$

Le prime due dànno:

$$(12) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial \xi} = \alpha_2 \quad , \quad \dfrac{\partial y}{\partial \eta} = \beta_2 \quad , \quad \dfrac{\partial y}{\partial \zeta} = \gamma_2 \\ \dfrac{\partial z}{\partial \xi} = \alpha_3 \quad , \quad \dfrac{\partial z}{\partial \eta} = \beta_3 \quad , \quad \dfrac{\partial z}{\partial \zeta} = \gamma_3 . \end{cases}$$

Indicando poi con ρ_0 la distanza ΩO (vedi figura) abbiamo

$$\frac{1}{2}\frac{d\rho_0^2}{dx} = \xi_0(x)\alpha_1 + \eta_0(x)\beta_1 + \zeta_0(x)\gamma_1 ,$$

e quindi, per l'ultima delle (11), $\dfrac{1}{2}\dfrac{d\rho_0^2}{dx} = \xi\alpha_1 + \eta\beta_1 + \zeta\gamma_1$. Da questa derivando rispetto alla ξ si ottiene:

$$\alpha_1 + (\xi\alpha_2 + \eta\beta_2 + \zeta\gamma_2)\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\frac{d^2\rho_0^2}{dx^2}\frac{\partial x}{\partial \xi}$$

e quindi

$$(13) \qquad \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\alpha_1}{\frac{1}{2}\frac{d^2\rho_0^2}{dx^2} - (\xi\alpha_2 + \eta\beta_2 + \zeta\gamma_2)\,c}$$

ed analogamente derivando rispetto a η e ζ:

$$(13)\quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\beta_1}{\frac{1}{2}\frac{d^2\rho_0^2}{dx^2} - (\xi\alpha_2 + \eta\beta_2 + \zeta\gamma_2)\,c} \Big/ \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\gamma_1}{\frac{1}{2}\frac{d^2\rho_0^2}{dx^2} - (\xi\alpha_2 + \eta\beta_2 + \zeta\gamma_2)\,c}.$$

Per ricavarci le relazioni che passano tra le componenti cartesiane e covarianti dei vettori λ, μ e ν, partiamo dall'espressione invariante $\lambda \times d\mathrm{P}$ (dP spostamento arbitrario), la quale in coordinate cartesiane si scrive $\sum_1^3{}_i \lambda_i d x_i$, mentre in coordinate curvilinee generiche è data dal trinomio $\sum_1^3{}_i \lambda_i dx^i$. Dall'identità $\lambda_1 d\xi + \lambda_2 d\eta + \lambda_3 d\zeta = \sum_1^3{}_i \lambda_i d x^i$ segue:

$$(14) \qquad \lambda_i = \lambda_1 \frac{\partial \xi}{\partial x^i} + \lambda_2 \frac{\partial \eta}{\partial x^i} + \lambda_3 \frac{\partial \zeta}{\partial x^i}.$$

Per trovare le formule equivalenti che ci permettono di esprimere le componenti controvarianti dei tre vettori λ, μ e ν in funzione delle componenti cartesiane, partiamo dall'espressione invariante: prodotto scalare del gradiente di una funzione arbitraria f per un generico vettore. Abbiamo così

$$\lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = \lambda^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + \lambda^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + \lambda^3 \frac{\partial f}{\partial x^3}$$

da cui, assumendo f eguale ad x^i, segue in particolare

$$(15) \qquad \lambda^i = \lambda_1 \frac{\partial x^i}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial x^i}{\partial x_2} + \lambda_3 \frac{\partial x^i}{\partial x_3} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Biologia. — *Sulla sistematica degli Attinomiceti: « Asteroides n. g. »* [1]. Nota di V. Puntoni e D. Leonardi presentata [2] dal Corrisp. S. Baglioni.

Dopochè, secondo la proposta di Gasperini (1892), il genere *Streptothrix* Cohn, 1875, venne assorbito nel genere *Actinomyces* Harz, 1877, quest'ultimo acquistò una estensione molto vasta.

Studi successivi, effettuati soprattutto col metodo culturale, portarono ad un primo smembramento, nel senso di conservare il genere *Actinomyces* per designare gli attinomiceti aerobi, e di adottare un nuovo genere per gli attinomiceti anaerobi del tipo Wolff–Israel. Venne così creato il genere *Actinobacterium* Haass 1906, che deve prevalere, per legge di priorità, sulla denominazione generica *Cohnistreptothrix* Pinoy 1913, benchè quest'ultima sia accettata da molti AA.

Ma ancorchè sminuito delle specie anaerobie, tipo Wolff–Israel, il genere *Actinomyces* continua a conservare una notevole eterogeneità ed una troppo vasta estensione, tantochè alcuni micrologi lo suddividono nelle tre sezioni: *majora, minora* e *breviora*.

L'esame sistematico di un grande numero di ceppi attinomicetici aerobi esistenti nella collezione dell'Istituto di Batteriologia della R. Università di Roma, condotto col metodo delle colture su lamine di vetro, secondo Unna e secondo Rivalier–Seydel, oltrechè con gli ordinari mezzi di colorazione e di coltura, ci ha rivelato differenze così profonde fra varie specie, da consigliarci di separare dal genere *Actinomyces, sensu stricto*, vari attinomiceti riportabili al gruppo dell'*Actinomyces asteroides* di Eppinger, pei quali proponiamo l'istituzione del nuovo genere *Asteroides*.

In base al nostro studio, l'ordine *Microsyphonales* Vuillemin, 1912, può essere così suddiviso in generi:

Genere *Actinomyces* Harz, 1877, *sensu stricto, emend.* In coltura, micelio vegetativo composto di sottili filamenti (massimo 1 micron di spessore) molto lunghi e ben ramificati dicotomicamente o ad angolo retto, che con gli ordinari mezzi di osservazione non presentano differenziamento strutturale (costituzione di ordine batterico) e che ordinariamente non hanno tendenza alla frammentazione. A vegetazione avanzata *si differenzia di norma*

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Batteriologia della R. Università di Roma.
(2) Nella seduta del 16 dicembre 1934.

un micelio aereo che può determinare un totale cambiamento di colore della superficie colturale ed un aspetto cretaceo o polverulento di essa; a spese di questo micelio aereo ha luogo la *fruttificazione con formazione di artroconidi* (actinospore di Puntoni). Sono Gram–resistenti, ma non acido-resistenti e di norma mancano granulazioni metacromatiche.

Le colture su terreni solidi (all'agar, patata ecc.) sono molto consistenti, talora coriacee, difficilmente dissociabili e molto aderenti al terreno, nel quale penetrano. Nelle colture liquide si formano colonie o pellicole superficiali assai compatte. Non sono saccarolitici, mentre di solito hanno azioni proteolitiche lente. Spesso emanano odor di muffa o speciali odori aromatici che tendono al putrefattivo. Sono aerobi, e si ritrovano comunemente nell'ambiente.

Allo stato parassitario determinano tanto micromicetomi con tipici grani clavati, quanto pseudo-attinomicosi nelle quali il fungo appare in forma di cespuglietti costituiti da lunghi filamenti ramificati, talora frammentati.

Il loro potere patogeno è, sperimentalmente, quasi nullo.

Specie tipo *Actinomyces albus* (Rossi Doria) (= *Actinomyces bovis p. p.*).

Genere *Actinobacterium* Haass, 1906, (= *Cohnistreptothrix* Pinoy, 1913). — In coltura, micelio rudimentale costituito in massima parte da articoli bacilliformi, a tipo difteroide, talora con accenni a ramificazioni. Assenza di micelio aereo e di sporificazione. Si ha resistenza al Gram, non acido–resistenza, presenza di granuli metacromatici.

Le colture, che si sviluppano prevalentemente o esclusivamente in *anaerobiosi,* sono poco consistenti e facilmente dissociabili per mancanza di lunghi filamenti. Non si sviluppano su patata.

Allo stato parassitario, i miceti di questo genere determinano tanto micromicetomi con tipici grani clavati, quanto pseudoattinomicosi, nelle quali il fungo assume la forma filamentosa lunga e ramificata, come nel genere precedente, spesso con tendenza alla frammentazione. Possono riprodurre sperimentalmente l'attinomicosi. La loro presenza nell'ambiente non è stata ancora svelata.

Specie tipo: *Actinobacterium Israeli* (Kruse) Sampietro, 1908; (= *Cohnistreptothrix Israeli* Pinoy, 1913).

Questo genere si ricollega ad alcune batteriacee, quali i corinebatteri.

Genere *Asteroides.* — In coltura si sviluppa un micelio costituito da filamenti più corti e con ramificazioni disposte ad angolo retto, meno abbondanti che nel genere *Actinomyces,* con disposizione radiata (donde il nome del genere), i quali a vegetazione avanzata si frammentano disordinatamente in articoli bacilliformi, oppure si risolvono in articoli coccoidi che conservano la disposizione dei filamenti, dando l'aspetto di una fruttificazione artrosporica, che può determinare il cambiamento d'aspetto della

superficie colturale, la quale può divenire polverulenta. *Manca tuttavia la formazione di un vero micelio aereo differenziato.* I miceti di questo genere sono Gram–resistenti, parzialmente acido–resistenti (in ispecie nelle colture su patata glicerinata) e presentano, più o meno abbondanti, granulazioni metacromatiche.

Le colture su terreni solidi all'agar o su patata sono poco consistenti, spesso friabili e poco aderenti al terreno, talora simili a quelle dei micobatteri. Nei terreni liquidi formano pellicola superficiale per lo più friabile. Le attività saccarolitiche sono scarse o assenti e mancano proprietà proteolitiche. Lo sviluppo avviene in aerobiosi. Si ritrovano assai frequentemente nell'ambiente.

Allo stato patogeno possono produrre micromicetomi con grani di solito non clavati, oppure pseudo–attinomicosi con cespugli a filamenti corti e poco ramificati. Sperimentalmente possono riprodurre l'attinomicosi.

Questo genere si ricollega soprattutto ai micobatteri ed in parte ai corinebatteri.

Specie tipo: *Asteroides asteroides* (Eppinger).

Riguardo alle specie che possono essere riportate al nuovo genere *Asteroides*, noi proponiamo per ora le seguenti:

Asteroides asteroides (Eppinger) è la specie tipo.

Sinonimie: *Cladothrix asteroides* Eppinger 1890; *Streptothrix eppingeri* Rossi Doria 1891; *Oospora asteroides* Sauvageau et Radais 1892; *Actinomyces asteroides* (Eppinger) Gasperini 1894; *Actinomyces carneus* Gasperini 1896, *nec* Rossi Doria; *Nocardia asteroides* Blanchard 1895; *Streptothrix hominis* Sabrazès e Rivière 1895; *Mycobacterium asteroides* Lehmann e Neumann 1896; *Streptothrix freeri* Musgrave e Clegg 1907; *Actinomyces caprae* (Silberschmidt).

Studiato in colture su lamine di vetro (metodo Rivalier–Seydel), forma colonie a brevi filamenti, ramificati scarsamente e ad angolo retto, che poi si frammentano in articoli bacilliformi (più di rado coccoidi), senza nessuna tendenza alla formazione di micelio cereo.

Rispetto alla colorazione presenta tipicamente i caratteri del genere.

Le colture (optimum a 37°, condizioni aerobie) producono pigmento aranciato, tendente al roseo, e caratteri che le riavvicinano a quelle dei micobatteri (friabilità, mancanza di aderenza al terreno ecc.).

Le attività biochimiche sono pressochè negative tanto dal punto di vista proteolitico che saccarolitico.

A questa specie riportiamo gli attinomiceti denominati: *Actinomyces asteroides* (Eppinger), di derivazione umana; l'*Actinomyces carneus* Gasperini, *nec* Rossi Doria, di derivazione ambientale; e l'*Actinomyces caprae* (Silberschmidt) di derivazione animale.

Allo stato patogeno, questo micete può determinare tanto dei micromicetomi con grani per lo più sprovvisti di clave, quanto pseudo–attinomicosi con semplici cespugli sparsi.

Asteroides pseudocarneus, nobis. — È la specie del genere *Asteroides* che più si avvicina al genere *Actinomyces,* nello stesso modo che l'*Actinomyces carneus* (Rossi Doria) è la specie di *Actinomyces* che maggiormente si accosta al genere *Asteroides.*

Dal punto di vista morfologico (colture alla Rivalier–Seydel) differisce dalla specie precedente perchè presenta un micelio a filamenti più lunghi e più ramificati, tendenti a prendere un decorso ondulato (assai simili in ciò all'*Actinomyces carneus*). Ma non si osserva mai la formazione di un micelio aereo differenziato, e la fruttificazione avviene per semplice risoluzione del micelio vegetativo in elementi coccoidi (più di rado batteroidi).

In relazione al suo micelio più sviluppato, le colonie su terreni solidi, e le pellicole in terreni liquidi, hanno scarsa somiglianza con le colture dei micobatteri, e per la loro discreta consistenza ed aderenza ai terreni solidi, si riavvicinano maggiormente alle colture del genere *Actinomyces.*

Pigmentazione delle colture, caratteri biochimici e caratteri tintoriali, sono identici a quelli della specie precedente.

A questa specie riportiamo un ceppo denominato *Actinomyces carneus,* stipite Dessy, proveniente dall'Istituto di Patologia Generale di Firenze, e diverso dal vero *Actinomyces carneus* (Rossi Doria) soprattutto per l'assenza di micelio aereo; ed un ceppo di derivazione idrica, isolato dall'acqua di un pozzo del deposito tramviario del Littorio di Roma.

Asteroides liskeyi. — È un attinomicete ricevuto dall'Istituto di Patologia generale di Firenze, come *Actinomyces liskey,* e di cui ignoriamo la provenienza.

Studiato col metodo di Rivalier–Seydel, presenta colonie a brevi filamenti, poco ramificati, che talora si frammentano in articoli bacilliformi, tal'altra si risolvono in articoli coccoidi, dando l'impressione di una buona fruttificazione artrosporica. È Gram–positivo, parzialmente acido–resistente e produce granuli metacromatici.

Le colture sono caratteristiche per la produzione di un pigmento color mattone carico, che volge quasi al rosso–lacca, e per il loro aspetto liscio ed umido, a patina sottile e friabile, senza aderenza alcuna ai terreni solidi, così da somigliare alquanto a quella di alcuni paratubercolari.

Manca di proprietà proteolitiche e saccarolitiche.

Asteroides puntonii (Lopez). — Fu isolato da Lopez da un caso di ascesso polmonare. Studiato col metodo di Rivalier–Seydel, presenta colonie caratteristiche raggiate, con filamenti brevi, poco ramificati e terminanti a

clava, che poi si risolvono in articoli difteroidi e coccoidi. È Gram-positivo, parzialmente acido-resistente e produce scarsissimi granuli metacromatici.

Le colture non producono pigmento; in terreni liquidi sono granuliformi con produzione incostante di pellicola friabile; sui terreni all'agar talora presentano aderenza al mezzo, talora sono invece ben distaccabili dalla superficie, ed hanno aspetto pieghettato e raggiato; su patata si ha coltura scarsissima, inapparente, che si svela soltanto con l'esame microscopico del prodotto del raschiamento dalla superficie di coltura.

Dal punto di vista biochimico, mentre mancano proprietà proteolitiche, si rivelano proprietà saccarolitiche essendovi la fermentazione, con produzione di acidi, ma non di gas, del galattosio, glucosio, maltosio e saccarosio (non dell'arabinosio, glicerina, inulina, lattosio, mannite e raffinosio).

Fisiologia. — *Tirossinuria umana*[1]. Nota di M. Mitolo, presentata[2] dal Corrisp. S. Baglioni.

Ho avuto di recente l'opportunità di richiamare l'attenzione sul problema dell'eliminazione degli increti attraverso gli emuntori[3], rilevando la scarsezza delle ricerche e dei risultati intorno alla presenza di alcuni ormoni nell'urina. Questo genere di indagine acquista speciale importanza per la considerazione che il contenuto urinario di increto può ritenersi in funzione del quantitativo ormonico del sangue e del lavoro di elaborazione della rispettiva ghiandola a secrezione interna. A tale importanza strettamente scientifica è connesso anche un interesse pratico, riguardante problemi tecnici ed economici di increto terapia, per cui l'urina può ritenersi una sorgente di estrazione degli ormoni, preferibile, sotto certi punti di vista, anche agli stessi organi endocrini ove l'ormone viene elaborato (C. Foà). Un altro aspetto della medesima questione riguarda la fisiopatologia delle ghiandole a secrezione interna, per quanto si riferisce specialmente alle condizioni di eccesso o di difetto di produzione degli ormoni ed alle sindromi o malattie relative. Infine, secondo le moderne vedute sul terreno costituzionale, anche la dottrina delle costituzioni o temperamenti iper- o ipoormonici, che sta ai confini tra la fisiologia e la patologia, è direttamente interessata.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 16 dicembre 1934.

(3) M. Mitolo, *Eliminazione dei principali increti attraverso gli emuntori.* Relazione alla XXIII Riunione della Società ital. per il progresso delle scienze, Napoli, 1934; «Fisiol. e Medic.», V, 669, 1934.

Riserbandomi di portare in seguito contributi alla soluzione del problema con altre ricerche sperimentali sull'argomento, ho intrapreso lo studio sistematico dell'eliminazione, con le urine, di uno degli ormoni tiroidei, la *tirossina*, che oggi è il meglio noto dal punto di vista della composizione chimica e degli effetti provocati. Recentemente Elmer e Scheps [1] hanno eseguito due sole determinazioni di iodio tirossinico in due campioni di urina (rispettivamente di cc. 5480 e di cc. 1700) di uomini normali, concludendo che non è stato loro possibile svelare l'ormone nell'urina; essi però ammettono che, non essendovi dubbio che una porzione dello iodio urinario sia di origine endogena (Sturm), minime quantità di iodio tirossinico possono far parte di questo iodio endogeno, ma che esse si eliminano in forma già decomposta.

Scopo di queste prime mie indagini è stato quello di controllare l'esistenza, o meno, di tirossina nell'urina di soggetti umani normali, senza studiarne di proposito il contenuto individuale e le eventuali oscillazioni. All'uopo mi son servito di un campione di 20 litri di urina, eliminati nel corso di tre giorni, da quindici persone, di cui dodici erano di sesso maschile (di età compresa tra i 7 ed i 59 anni) e tre di sesso femminile (età: 24–36–60 anni); la contribuzione dei singoli soggetti è stata quantitativamente differente da persona a persona.

Per il dosaggio, ho dovuto mettere senz'altro da parte tutti i metodi biologici utilizzati per svelare la tirossina, sia perchè generalmente privi di specificità, sia perchè essi sono soltanto grossolanamente quantitativi. Ho adoperato invece, un metodo chimico, basato sull'estrazione selettiva della tirossina mediante alcool butilico normale, e che a Leland e Foster [2] ha dato buoni risultati per la determinazione dell'increto nella ghiandola tiroide. Il metodo pecca per difetto, in quanto, secondo gli AA., vi è inevitabile distruzione di una parte di ormone durante l'idrolisi alcalina che precede l'estrazione; ma la quantità perduta, giudicata da prove di ricupero, è per la tiroide non superiore al 15 % del contenuto totale di tirossina; d'altra parte non ho trovato nella letteratura metodi chimici più attendibili. Ho applicato la tecnica di Leland e Foster all'urina, dopo aver concentrato l'escreto a bagno-maria bollente; mi riserbo di renderne noti i dettagli in altra Memoria.

Dalla determinazione fatta è risultato che nel campione di 20 litri di urina umana impiegato erano contenuti γ 35,95 di I tirossico, ossia γ 55 di tirossina, con un valore di γ 1,79 di I tirossinico, e rispettivamente di γ 2,75 di tirossina per litro. Queste cifre, corrispondenti ad una miscela, non esattamente calcolata, di urine umane di diversa provenienza, non possono essere certamente considerate come definitive; al riguardo sono in corso ricerche sistematiche sul contenuto ormonico individuale nell'escreto renale.

(1) A. Wl. Elmer et M. Scheps, « Compt. Rend. Soc. Biol. », CXV, 968, 1934.
(2) J. P. Leland and G. L. Foster, « Journ. of biol. Chem. », XCV, 165, 1932.

Scopo di questa Nota è di comunicare che, nell'uomo in condizioni normali, una certa quantità di tirossina abbandona l'organismo per la via renale e compare nell'urina; sembra quindi lecito introdurre il termine di *tirossinuria* umana. Le quantità eliminate sono piccolissime, corrispondendo solo a pochi γ; ciò mette sull'avviso di eseguire i dosaggi su almeno 10 litri di escreto, senza di che o non si riesce a determinare, nel concentrato, I tirossinico, oppure si dosano quantità tanto piccole da rientrare nei limiti di errore tecnico del metodo impiegato.

Non posso escludere, secondo l'ipotesi (non sufficientemente documentata con dimostrazioni) di Elmer e Scheps, che una certa parte di tirossina sia presente nell'urina umana in forma decomposta; ma, al contrario dei due AA. polacchi, ritengo chimicamente provata dalle mie ricerche l'esistenza di unatirossinuria umana normale.

Fisiologia (Chimica fisiologica). — *Sul diverso comportamento del sangue di varie specie animali nei riguardi della cristallizzazione della carbossiemoglobina.* [1] Nota di E. Biocca presentata [2] dal Corrisp. S. Baglioni.

È noto che la carbossiemoglobina si può ottenere cristallizzata. Nei trattati classici si parla di questi cristalli, e in molti di essi si propongono anche dei metodi per ottenerli prontamente. Il *Bürker* [3] afferma che si possono avere con la stessa facilità e con la stessa tecnica, con cui si ottengono i cristalli di emoglobina, qualora si faccia gorgogliare preventivamente, nel sangue emolizzato, ossido di carbonio. *Reichert* e *Brown* [4] inoltre li studiarono anche cristallograficamente pel sangue di « Didelfis Virginiana », « Equus caballus » e « Oturia Gillepsi »; perciò solamente in tre specie fra le numerose da loro prese in esame per l'emoglobina. Anche G. Amantea li ottenne e li studiò in parecchi sangui.

Comunque, nessuno di coloro, che finora hanno preso in considerazione i cristalli di carbossiemoglobina, ha esteso più oltre e sistematicamente le ricerche, e si è proposto di accertare, se esistessero norme generali, che ne regolassero la cristallizzazione; ciò che sarebbe potuto derivare dallo studio di molti sangui, appartenenti a specie diverse, comparandone i risultati,

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisiologica della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 16 dicembre 1934.

(3) K. Bürker in « Tigerstdt's Handbuch der Physiol. Methodik », Leipzig, 1910.

(4) E. T. Reichert and. A. Brown, « Pubbl. of the Carnegie Institution of Washington », N. 116.

così, come è stato fatto da *G. Amantea* [1] per la cristallizzazione del pigmento ematico sotto forma di emoglobina ridotta o di ossiemoglobina.

Precisamente *G. Amantea*, utilizzando il noto metodo delle saponina (elaborato insieme con *C. Krzyszkowsky*) ha potuto studiare separatamente, per molti sangui, i cristalli di ossiemoglobina e di emoglobina ridotta, indagando il comportamento, a questo riguardo, delle singole e numerose specie considerate. — Appunto il metodo della saponina gli permise di eseguire osservazioni con tecnica uniforme, adatta a stabilire confronti adeguati, nonchè a porre delle regole, senza dubbio valevoli per le condizioni adottate.

Egli è riuscito così a stabilire, che i cristalli di emoglobina ridotta e quelli di ossiemoglobina non si ottengono sempre e con la stessa facilità in ogni caso. Da questo punto di vista risultarono anzi differenze di comportamento nette, che permisero la distinzione di quattro tipi diversi di sangui: 1) quelli in cui, nelle sue condizioni di tecnica, l'emoglobina cristallizza in tutte e due le forme (ossiemoglobina ed emoglobina ridotta); 2) quelli in cui l'emoglobina cristallizza solo come ossiemoglobina; 3) quelli in cui cristallizza solo come emoglobina ridotta; 4) quelli che non dànno mai cristalli nè di emoglobina ridotta nè di ossiemoglobina.

Ispirandoci a questi fatti, e per consiglio dello stesso prof. *G. Amantea*, ci siamo proposti di osservare, come precisamente si comportassero tutti i quattro tipi di sangue sopra ricordati, per ciò che concerne la cristallizzazione della carbossiemoglobina, e se, per caso, qualcuno di essi offrisse a considerare differenze di interesse scientifico, o eventualmente anche pratico (medico legale).

A tale scopo si rendevano necessarie osservazioni su più sangui appartenenti a ciascuno dei gruppi sopra ricordati, e precisamente, nelle esatte condizioni di tecnica, da *G. Amantea* già attuate ed adottate. Abbiamo sperimentato pertanto come segue:

Abbiamo utilizzato sangue fresco defibrinato, ovvero anche sangue coagulato, frammentando con una pinzettina minutamente, in questo secondo caso, il coagulo su un robusto portaoggetti di grande dimensione. Quindi aggiungevamo una piccola quantità di saponina (dalla « saponaria officinalis ») in polvere, per ottenere la completa emolisi, e allestivamo il preparato, sovrapponendo un copri-oggetti, pure di grande dimensione, e lasciando in ambiente e posizione (orizzontale), adatti per la cristallizzazione. Così pei

(1) G. Amantea e C. Krzyszkowsky, *Sulla cristallizzazione dell'emoglobina.* « Arch. di Fisiologia », vol. XVIII, fasc. I–VI, 1919–1920; G. Amantea, *Sulla cristallizzazione dell'emoglobina nell'intestino di alcuni ematofagi* (« Bollett. Soc. It. Biol. Sperim. », vol. I, fasc. I–II, 1926); U. Falaschi e C. Mele, *La cristallizzazione dell'emoglobina umana in rapporto all'età e a varie condizioni patologiche.* « Arch. di Fisiol. », vol. XXI, fasc. V, 1923; G. Amantea, *La cristallizzazione dell'emoglobina studiata col metodo della saponina.* « Ibid. », vol. XXI, fasc. II, 1923.

preparati, che dovevano servire di controllo, fornendo – o non – cristalli di emoglobina ridotta o ossiemoglobina. Per quelli che dovevano servire alle osservazioni sulla carbossiemoglobina, si seguiva lo stesso procedimento sostanziale; ma con la differenza, che, dopo avere emolizzato quantità sufficienti di sangue, nella massa si faceva gorgogliare CO (ricorrendo, come sorgente, al gas illuminante), fino ad ottenere la voluta trasformazione dell'emoglobina in carbossiemoglobina. Col sangue così trattato, di regola, si allestivano più preparati sempre per ciascuna esperienza.

Abbiamo trovato sufficiente e pratico, per raggiungere il risultato, l'espediente di valerci, come sorgente di CO, del comune gas illuminante, facendolo gorgogliare nel sangue defibrinato o nella poltiglia di coagulo frammentato, previo trattamento con saponina. Per tale motivo abbiamo rinunziato a valerci di altri mezzi e dispositivi più o meno complicati da altri proposti, e riportati pure dal *Burker*.

Dopo aver fatto gorgogliare il gas e dopo aver atteso che l'eccesso rimasto nel liquido, sotto forma di bollicine sospese, fosse scomparso, come nel caso dei preparati di controllo, pure in questo, si versavano alcune goccie del sangue, o una congrua quantità della poltiglia di coagulo, su un vetro portaoggetti di 8 o 10 cm. di lato. Si allontanavano pazientemente le ultime bollicine rimaste, e si copriva con un altro vetro simile, ma alquanto più piccolo, esercitando sopra una dolce pressione, fino a che un po' di liquido debordasse uniformemente dai margini. Dopo un tempo, variabile colla concentrazione del pigmento presente, colla temperatura e lo stato igrometrico dell'ambiente, si ottenevano, nei casi positivi, i cristalli. Quelli di carbossiemoglobina in generale si differenziano da quelli di emoglobina ridotta per la maggior prontezza con cui compaiono; mentre, per il più lungo periodo di persistenza, si differenziano poi anche da quelli di ossiemoglobina. Inoltre per quelli di carbossiemoglobina il colore è sempre caratteristico e inconfondibile. Comunque l'esame col microspettroscopio può eventualmente soccorrere in caso di incertezza. I risultati così ottenuti sono stati concordi e netti, e li riassumiamo e prospettiamo sinteticamente nella tabella annessa.

ANIMALI ESPLORATI	Cristallizzazione dell'emoglobina ridotta	Cristallizzazione dell'ossiemoglobina	Cristallizzazione della carbossiemoglobina
I. Gruppo:			
Cavallo	+	+	+
Asino	+	+	+
Mulo	+	+	+
Bardotto	+	+	+
Pecora	+	+	+
Colombo	+	+	+
II. Gruppo:			
Coniglio	—	—	—
Bue	—	—	—
III. Gruppo:			
Cane	—	+	+
Ratto	—	+	+
Cavia	—	+	+
Gallo	—	+	+
IV Gruppo:			
Uomo (adulto)	+	—	—
Uomo (neonato)	+	—	—
Maiale	+	—	—
Gatto	+	—	—

Molti dei sangui di animali da noi presi in esame (cavallo, asino, mulo, bardotto, pecora, colombo), corrispondentemente con le osservazioni di *G. Amantea* sopra citate, prima del trattamento con CO si dimostrarono capaci di dare cristalli sia di ossiemoglobina che di emoglobina ridotta: ebbene, in questi, senza eccezione, ottenemmo anche cristalli di carbossiemoglobina. Alcuni altri, come il cane, il ratto, la cavia e il gallo, che non davano cristalli di emoglobina ridotta, ma li davano di ossiemoglobina, ci diedero pure sempre cristalli di carbossiemoglobina. Solo per due degli animali esplorati, il bue e il coniglio, il risultato doveva essere, e fu affatto

negativo, prima del trattamento con CO, sia pei cristalli di ossiemoglobina che di emoglobina ridotta: ebbene, per questi, quasi mancasse ogni possibilità a dare qualsiasi tipo di cristalli, in numerose prove, non riuscimmo ad avere pure mai i cristalli di carbossiemoglobina. Per l'ultimo gruppo, per quello cioè che ci interessa più da vicino, perchè vi rientra l'uomo (oltre il gatto, il maiale ecc.), d'accordo coi risultati di *G. Amantea* fallì costantemente la cristallizzazione dell'ossiemoglobina mentre costantemente si ebbe quella di emoglobina ridotta, prima del trattamento con CO: ma anche la cristallizzazione della carbossiemoglobina fallì in tutte le numerosissime prove eseguite.

Da queste osservazioni evidentemente risulta che i sangui capaci di dare, col metodo di *G. Amantea*, cristalli sia di emoglobina ridotta che di ossiemoglobina, dànno, sempre, pure cristalli di carbossiemoglobina; parimenti quelli che dànno unicamente cristalli di ossiemoglobina. Ma invece la cristallizzazione della carbossiemoglobina fallisce costantemente sia in quei sangui, come l'umano, che non dànno normalmente, col metodo della saponina, cristalli di ossiemoglobina, sia in quelli, che normalmente non dànno alcun tipo di cristalli, cioè nè di ossiemoglobina nè di emoglobina ridotta.

Si nota così la perfetta corrispondenza tra la cristallizzazione dell'ossiemoglobina e della carbossiemoglobina, nel senso cioè, che, nei casi in cui è possibile ottenere cristalli per l'una è anche possibile ottenerli per l'altra; d'altra parte si osserva la completa indipendenza di comportamento della emoglobina ridotta.

Questa regola di cristallizzazione ci è sembrata meritevole di considerazione, oltre che dal lato scientifico, anche da quello pratico, cioè per possibili applicazioni medico-legali. Il sangue umano, infatti, è uno di quelli capaci di dare cristalli di emoglobina ridotta, ma incapace di darli di carbossiemoglobina; e, di conseguenza, tutte le volte che si ottengono cristalli di carbossiemoglobina, nelle nostre condizioni di tecnica, si può escludere che si tratti di sangue umano.

Questo rilievo, che a noi sembra di particolare interesse e che è derivato netto, e senza eccezione, dalle nostre esperienze, crediamo utile pertanto segnalarlo all'attenzione dei cultori di medicina legale.

Ci riteniamo dunque autorizzati ad affermare che:

1) Utilizzando il metodo della saponina di *G. Amantea*, la cristallizzazione della carbossiemoglobina si ottiene costantemente solo per quei sangui, che, esplorati in condizioni ordinarie, cioè senza il trattamento con CO, sono capaci di fornire cristalli di ossiemoglobina (diano o non diano insieme pure quelli di emoglobina ridotta).

2) La cristallizzazione della carbossiemoglobina non si ottiene mai da sangui, che, nelle stesse condizioni e senza CO, non dànno cristalli di sorta, ovvero li dànno soltanto di emoglobina ridotta.

3) Di conseguenza, siccome il sangue umano appartiene a quest'ultima categoria, e cioè al gruppo di sangui che, col metodo della saponina, dànno soltanto cristalli di emoglobina ridotta e mai di ossiemoglobina, ne deriva questa regola di applicazione medico-legale:

« *Un sangue che, emolizzato con saponina, e trattato con CO, si riveli capace di fornire cristalli di carbossiemoglobina,* NON È SANGUE UMANO ».

INDICE DEL VOLUME XX, SERIE VI. — RENDICONTI

1934. Secondo Semestre.

INDICE PER AUTORI

A

Amantea G. — « Sugli effetti della lenta e ripetuta asfissia in ambiente confinato ». 220.

Amantea G., Zagami V., Baglioni A., Famiani V., Zanghì G. e Ravasini L. — « Sul quoziente beri-berico (Q_b) del colombo in condizioni normali ». 134.

Andrissi G. L. — « Misure di stelle doppie ». 266.

B

Baglioni A. — Vedi Amantea G.

Bambacioni-Mezzetti V. — « Azione dei sali di Berillio, Zirconio e Palladio sulla sensibilità geotropica delle radici ». 125.

Barbieri A. G. — « Sui composti intermedi tra i ferrocianuri e le ferroammine ». 273.

Barbieri U. — « Stazione astronomico-geodetica eseguita sul vertice di 1° ordine di Tortona nel luglio 1933-XI ». 428.

Baroni A. — « Sugli ossialogenuri di piombo ». 384.

Belardinelli G. — « Su una classe di funzionali analitici ». Nota I. 251. Nota II. 301. Nota III. 377.

Biocca E. — « Sul diverso comportamento del sangue di varie specie animali nei riguardi della cristallizzazione della carbossiemoglobina ». 474.

Biraghi A. — « Ricerche citologiche sulla germinazione delle clamidospore di " Urocystis tritici " Koern ». 343.

Borghetto V. N. — Vedi Sandonnini C.

Broggi U. — « Sulla trasformata generalizzata di Eulero delle serie prodotto di due altre ». 78.

Bruni G. — « Sulla possibilità di separare D_2O da H_2O per congelamento frazionato ». 73.

C

Cavinato A. — « Contributo alla conoscenza petrografica della Sardegna. Un caratteristico filone kersantitico a " facies " prasinitica del Sarrabus ». Nota II. 205.

Cimmino A. — Vedi Mazza F. P.

Consiglio A. — « Formule generali per il calcolo delle azioni dinamiche esercitate da una corrente piana non stazionaria su un ostacolo mobile ». 310.

Id. — « Ostacolo ellittico mobile investito da una corrente piana irrotazionale ». 315.

Cotronei G. e Perri T. — « Prime ricerche sulle compatibilità ed incompatibilità embrionali negli Anfibi studiate col metodo degli espianti ». 346.

Crocco G. A. — « Stabilità statica e stabilità cinetica nei motovelivoli ». 149.

Id. — « Il concetto di " fuoco " nella stabilità dei velivoli ». 233.

Id. — « La sicurezza dei velivoli all'incontro con una raffica ascendente ». 403.

D

Dragone-Testi G. — « Azione di alcuni sali sulla germinazione di embrioni di grano staccati dalla cariosside ». 59.

F

Famiani V. — « Ulteriori osservazioni sul rapporto tra manifestazione dello scorbuto sperimentale e quantità di alimento elaborato ». 129.

Famiani V. — Vedi Amantea G.

Fano U. — « Sul calcolo dei termini ottici, e in particolare dei potenziali di ionizzazione dei metalli bivalenti, per mezzo del potenziale statistico di Fermi ». 35.

Ferrari C. — « Sulla teoria della turbolenza ». 100.

Finikoff S. — « Couples des surfaces dont les asymptotiques correspondent et les tangentes asymptotiques homologues se coupent ». 164.

Fouillade A. — « Certains aspects de l'itération des transformations fonctionnelles linéaires, et quelques notions qui s'en dégagent ». 82.

Franchetti S. — « Forze interatomiche e frequenze di oscillazione degli atomi nei reticolati ». 186.

Fréchet M. — « Sur l'équation fonctionnelle de S. Chapman et sur les problèmes des probabilités en chaîne ». 95.

G

Garcia G. — « Correzione einsteiniana del tempo nel movimento planetario ». Nota II. 174.

Gheorghiu Gh. Th. — « Sur un cas spécial des fonctions métasphériques ». 161.

Ghermanesco M. — « Sur les équations fonctionnelles linéaires d'ordre infini ». 89.

Ghiron D. e Grischott D. — « Borofosfati di rame e piombo ($Me^{II}BPO_5$) ». 391.

Gigante D. — « Osservazioni sul decorso dei processi ricostruttivi nel colombo ». 226.

Giordani M. — « Il pigmento respiratorio dell' " Aspergillus Niger " ». 340.

Godeaux L. — « Sur les surfaces de genres un possédant une involution de bigenre un ». 93.

Grischott D. — Vedi Ghiron D.

Guareschi C. — « Processi di " ripresa " e loro limiti nelle esperienze di centrifugazione nella ninfosi degli insetti ». 56.

L

Laboccetta L. — « Definizione assoluta e significato fisico delle costanti gravitazionali di Newton, Einstein, Keplero e della curvatura dello spazio ». 327.

Id. — « Sulla unificazione delle funzioni espresse da serie che convergono in intervalli fra loro complementari ». 333, 373.

Id. — « Definizione assoluta e significato fisico della costante di Hubble ». 429.

Lampariello G. — « L'invariante adiabatico di Gibbs-Hertz nel problema ristretto dei tre corpi ». 416.

Lapponi G. — Vedi Salvatori A.

Leonardi D. — Vedi Puntoni V.

Levi-Civita T. — « Perfezionamento della regola di equivalenza fra moti einsteiniani e moti newtoniani ». 398.

M

Madon V. F. e Sapegno E. — « Sul metabolismo degli idrati di carbonio in alta montagna. – II. Azione dell'adrenalina (e contenuto in K e Ca del sangue) ». 119.

Manià B. — « Sopra le equazioni differenziali dipendenti da una curva ». 3.

Manunta C. — « Sull'origine dell'acido urico nelle uova ibernanti di bachi da seta ». 283.

Masotti A. — « Sul moto piano discontinuo indotto da una sorgente addossata ad una lamina rettilinea indefinita ». 169.

Mazza F. P. e Cimmino A. — « Sull'attività deidrogenasica del "B. Coli communis " sugli acidi grassi superiori ». Nota II. 113.

Medi E. — « Apparecchio per la misura del campo elettrico terrestre ». 381.

Merlino A. — « Sugli effetti della distensione forzata dell'ingluvie nel colombo ». 434.

Mirri A. — « Diagnosi delle brucellosi negli animali: la Brucellina Mirri ». 210.

Mitolo M. — « Tirossinuria umana ». 472.

Moisseiev N. — « Sulle curve definite da un sistema di equazioni differenziali di secondo ordine ». Nota I « Intorno ad

un metodo di analisi qualitativa applicato ai problemi dinamici con due gradi di libertà». 178. Nota II «Qualche proprietà delle traiettorie nel problema dei tre corpi del Hill». 256. Nota III «A proposito d'un metodo di studio delle curve integrali nel sistema di tre equazioni differenziali di secondo ordine». 261. Nota IV «Di alcune proprietà delle traiettorie nel problema del moto centrale di un punto riferito ad un sistema di assi rotanti». 321.

Monforte F. — Vedi Scagliarini G.

Montalenti G. — «La partenogenesi sperimentale dell'uovo di Lampreda. Analisi citologica dell'attivazione semplice». 54.

O

Onicescu O. — «Proprietà topologiche delle trasformazioni puntuali dello spazio». 87.

P

Palozzi G. — «Sull'applicabilità proiettiva di due superficie». 305.

Parisi E. e De Vito G. — «Contributo alla conoscenza della maturazione dei formaggi. – I. Proteasi, dichetopiperazine e peptidi prolinici». 44.

Peretti G. — «Gruppi di onde associati a sciami di elettroni». 411.

Perri T. — Vedi Cotronei G.

Pincherle L. — «La larghezza naturale delle linee di raggi X». 29.

Pontecorvo B. — «Effetto del vapore di mercurio sopra i termini alti degli alcalini». 105.

Principi P. — «Alcune osservazioni sulle analogie esistenti fra i terreni terziari dell'Albania e quelli dell'Italia centrale». 200.

Puntoni V. e Leonardi D. — «Sulla sistematica degli attinomiceti: "Asteroides n. g."». 468.

R

Racah G. — «Sul cosiddetto momento elettrico dell'elettrone». 39.

Id. — «Numero dei tensori isotropi ed emisotropi in spazi a più dimensioni». Nota II. 109.

Ragno M. – Vedi Scagliarini G.

Ravasini E. — Vedi Amantea G.

Restaino S — «I solfati doppi delle terre rare e dei metalli alcalini: Solfati di praseodimio e potassio. – Solfati di praseodimio e rubidio. – Solfati di praseodimio e cesio. – Solfati di samario e sodio». 192.

Rey Pastor J. — «Sulle quaterne di Salmon nelle cubiche piane di genere I». 309, 459.

Rios S. — «Sopra l'ultraconvergenza delle serie di Dirichlet». 158.

Rizzo G. B. — «Influenza dell'atmosfera terrestre sopra l'effetto di latitudine nella intensità della radiazione cosmica». 183.

Rosenblatt A. — «Sopra le equazioni alle derivate parziali del tipo parabolico con due variabili indipendenti». 22.

Roverето G. — «Epirogenesi postpliocenica delle Alpi marittime e della Riviera ligure». 153.

Russo A. — «Prevalenza del pronucleo femminile in alcune fecondazioni sperimentali dei Metazoi e nella coniugazione di un Unicellulare». 75.

Id. — «Eliminazione di sostanza nucleare ed adesione dei gameti in un Ciliato in relazione all'agglutinazione nella fecondazione dei Metazoi». 238.

S

Salvatori A. e Lapponi G. — «Sulla possibilità di identificare e dosare piccole quantità di galattosio come acido mucico». 437.

Sandonnini C. e Borghello V. N. — «Dealogenazione elettrolitica di sostanze organiche semplici». Nota I. 334.

Sapegno E. — Vedi Madon V. F.

Sarantopoulos S. — «Un théorème se rattachant à la méthode par récurrence (induction complète)». 242.

Id. — «Quelques théorèmes relatifs à la méthode par récurrence». 293.

Savelli R. — «Osservazioni su alcuni elaborati delle cellule del clorenchima». 215.

Sbrana F. — « arallelismo monodromo sopra una superficie di rotazione ». 367.
Scagliarini G. e Monforte F. — « Sulla reazione fra nitritopentacianuro sodico e solfuri alcalini ». Nota IV. 41.
Id. e Ragno M. — « Influenza della temperatura sulla formazione dei composti di addizione ». 278.
Scorza G. — « Sopra un teorema fondamentale della teoria delle algebre ». 65.
Id. — « Sulla struttura delle algebre pseudonulle ». 143.
Segre B. — « Proprietà in grande delle linee piane convesse: Sulla curvatura degli archi convessi soggetti a date condizioni agli estremi ». Nota I. 407.
Id. — « Proprietà in grande delle linee piane convesse: Le orbiformi e le corrispondenze equilonghe fra ovali ». Nota II. 455.
Serra G. — « Osservazioni sull'apparato masticatorio del genere Orthopsis ». 51.
Sestini G. — « Osservazione sopra due funzioni analitiche che soddisfano ad una particolare condizione ». 404.
Severi F. — « Caratterizzazione geometrica, topologica e trascendente delle serie di equivalenza sopra una superficie ». 287.
Id. — « Ancora sulla caratterizzazione topologica e trascendente delle serie di equivalenza sopra una superficie ». 395.
Severini C. — « Sulle serie doppie di funzioni ortogonali e normali ». Nota II. 18.

T

Toscano L. — « Sulla integrazione delle successioni ricorrenti del secondo ordine, lineari ed omogenee ». Nota II. 14.

V

Villa M. — « Sulla teoria delle ipersuperficie iperalgebriche ». 9.
Volterra E. — « Questioni di elasticità vincolata. I. Componenti di deformazione e potenziale elastico in coordinate qualsivogliano ». 424.
Id. — « Questioni di elasticità vincolata II. Forma appropriata del ds^2 e conseguenze del vincolo geometrico ». 463.

Z

Zagami V. — Vedi Amantea G.
Zanghì G. — Vedi Amantea G.

INDICE PER MATERIE

A

Astronomia. — « Misure di stelle doppie ». Andrissi G. L. 266.

B

Biologia. — « Ricerche citologiche sulla germinazione delle clamidospore di " Urocystis tritici" " Koern ». Biraghi A. 343.

— « Prime ricerche sulla compatibilità ed incompatibilità embrionali negli Anfibi studiate col metodo degli espianti ». Cotronei G. e Perri T. 346.

— « Processi di " ripresa " e loro limiti nelle esperienze di centrifugazione nella ninfosi degli insetti ». Guareschi C. 56.

— « Su l' origine dell'acido urico nelle uova ibernanti di bachi da seta ». Manunta C. 283.

— « Diagnosi delle brucellosi negli animali: la Brucellina Mirri ». Mirri A. 210.

— « La partenogenesi sperimentale dell'uovo di Lampreda. Analisi citologica dell'attivazione semplice ». Montalenti G. 54.

— « Sulla sistematica degli attinomiceti: " Asteroides n. g. " ». Puntoni V. e Leonardi D. 468.

— « Prevalenza del pronucleo femminile in alcune fecondazioni sperimentali dei Metazoi e nella coniugazione di un Unicellulare ». Russo A. 75.

— « Eliminazione di sostanza nucleare ed adesione dei gameti in un Ciliato in relazione all'agglutinazione nella fecondazione dei Metazoi ». Id. 238.

Bollettino bibliografico. — 353, 446.

Botanica. — « Azione di alcuni sali sulla germinazione di embrioni di grano staccati dalla cariosside ». Dragone-Testi G. 59.

Botanica. — « Osservazioni su alcuni elaborati delle cellule del clorenchima ». Savelli R. 215.

C

Chimica. — « Sui composti intermedi tra i ferrocianuri e le ferroammine ». Barbieri A. G. 273.

— « Sugli ossialogenuri di piombo ». Baroni A. 384.

— « Sulla possibilità di separare D_2O da H_2O per congelamento frazionato ». Bruni G. 73.

— « Borofosfati di rame e piombo ($Me^{II}BPO_5$) ». Ghiron D. e Grischott D. 391.

— « Il pigmento respiratorio dell' " Aspergillus Niger " ». Giordani M. 340.

— « Sull' attività deidrogenasica del " B. Coli communis " sugli acidi grassi superiori ». Nota II. Mazza F. P. e Cimmino A. 113.

— « Contributo alla conoscenza della maturazione dei formaggi. – I. Proteasi dichetopiperazine e peptidi prolinici » Parisi E. e De Vito G. 44.

— « I solfati doppi delle terre rare e dei metalli alcalini: Solfati di praseodimio e potassio. – Solfati di praseodimio e rubidio. – Solfati di praseodimio e cesio – Solfati di samario e sodio ». Restaino S. 192.

— « Dealogenazione elettrolitica di sostanze organiche semplici ». Nota I. Sandonnini C. e Borghello V. N. 334.

— « Sulla reazione fra nitritopentacianuro sodico e solfuri alcalini ». Nota IV. Scagliarini G. e Monforte F. 41.

— « Influenza della temperatura sulla formazione dei composti di addizione ». Scagliarini G. e Ragno M. 278.

F

Fisica. — « Sul calcolo dei termini ottici, e in particolare dei potenziali di ionizzazione dei metalli bivalenti, per mezzo del potenziale statistico di Fermi ». Fano U. 35.
— « Forze interatomiche e frequenze di oscillazione degli atomi nei reticolati » Franchetti S. 186.
— « Definizione assoluta e significato fisico delle costanti gravitazionali di Newton, Einstein, Keplero e della curvatura dello spazio ». Laboccetta L. 327.
— « Definizione assoluta e significato fisico della costante di Hubble ». Id. 429.
— « Apparecchio per la misura del campo elettrico terrestre ». Medi E. 381.
— « La larghezza naturale delle linee di raggi X ». Pincherle L. 29.
— « Effetto del vapore di mercurio sopra i termini alti degli alcalini ». Pontecorvo B. 105.
— « Sul cosiddetto momento elettrico dell'elettrone ». Racah G. 39.
— « Numero dei tensori isotropi ed emisotropi in spazi a più dimensioni ». Nota II. Id. 109.
Fisiologia. — « Sul quoziente beri-berico (Q_B) del colombo in condizioni normali ». Amantea G., Zagami V., Baglioni A., Famiani V., Zanghì G. e Ravasini L. 134.
— « Sugli effetti della lenta e ripetuta asfissia in ambiente confinato ». Amantea G. 220.
— « Azione dei sali di Berillio, Zirconio e Palladio sulla sensibilità geotropica delle radici ». Bambacioni-Mezzetti V. 125.
— « Sul diverso comportamento del sangue di varie specie animali nei riguardi della cristallizzazione della carbossiemoglobina ». Biocca E. 474.
— « Ulteriori osservazioni sul rapporto tra manifestazione dello scorbuto sperimentale e quantità di alimento elaborato ». Famiani V. 129.
— « Variazione sull'attività cardiaca in rapporto con lo stato asfittico ». Galamini A. 444.
— « Osservazioni sul decorso dei processi ricostruttivi nel colombo ». Gigante D. 226.
Fisiologia. — « Sul metabolismo degli idrati di carbonio in alta montagna. - II. Azione dell'adrenalina(e contenuto in K e Ca del sangue) ». Madon V. F. e Sapegno E. 119.
— « Sugli effetti della distensione forzata dell'ingluvie nel colombo ». Merlino A. 434.
— « Tirossinuria umana ». Mitolo M. 472.
— « Sulla possibilità di identificare e dosare piccole quantità di galattosio come acido mucico ». Salvatori A. e Lapponi G. 437.
— « L'azione dell'insulina sulla alcoolemia provocata nell'uomo normale ». Serianni E. 444.

G

Geodesia. — « Stazione astronomico-geodetica eseguita sul vertice di 1° ordine di Tortona nel luglio 1933-XI ». Barbieri U. 428.
Geofisica. — « Influenza dell'atmosfera terrestre sopra l'effetto di latitudine nella intensità della radiazione cosmica ». Rizzo G. B. 183.
Geologia. — « Alcune osservazioni sulle analogie esistenti fra i terreni terziari dell'Albania e quelli dell'Italia centrale ». Principi P. 200.
— « Epirogenesi postpliocenica delle Alpi marittime e della Riviera ligure ». Rovereto G. 153.
Geometria. — « Proprietà in grande delle linee piane convesse: Le orbiformi e le corrispondenze equilonghe fra ovali ». Nota II. Segre B. 455.

M

Matematica. — « Su una classe di funzionali analitici ». Nota I, II e III. Belardinelli G. 251, 301, 377.
— « Sulla trasformata generalizzata di Eulero delle serie prodotto di due altre ». Broggi U. 78.
— « Couples des surfaces dont les asymptotiques correspondent et les tangentes

asymptotiques homologues se coupent ». Finikoff S. 164.

Matematica. — « Certains aspects de l'itération des transformations fonctionnelles linéaires, et quelques notions qui s'en dégagent ». Fouillade A. 82.

— « Sur l'équation fonctionnelle de S. Chapman et sur les problèmes des probabilités en chaine ». Fréchet M. 95.

— « Sur un cas spécial des fonctions métasphériques ». Gheorghiu Gh. Th. 161.

— « Sur les équations fonctionnelles linéaires d'ordre infini ». Ghermanesco M. 89.

— « Sur les surfaces de genres un possédant une involution de bigenre un ». Godeaux L. 93.

— « Sulla unificazione delle funzioni espresse da serie che convergono in intervalli fra loro complementari ». Laboccetta L. 333, 373.

— « Sopra le equazioni differenziali dipendenti da una curva ». Manià B. 3.

— « Proprietà topologiche delle trasformazioni puntuali dello spazio ». Onicescu O. 87.

— « Sull'applicabilità proiettiva di due superficie ». Palozzi G. 305.

— « Sulle quaterne di Salmon nelle cubiche piane di genere I ». Rey Pastor J. 309, 459.

— « Sopra l'ultraconvergenza delle serie di Dirichlet ». Rios S. 158.

— « Sopra le equazioni alle derivate parziali del tipo parabolico con due variabili indipendenti ». Rosenblatt A. 22.

— « Un théorème se rattachant à la méthode par récurrence (induction complète) ». Sarantopoulos S. 242.

— « Quelques théorèmes relatifs à la méthode par récurrence ». Id. 293.

— « Parallelismo monodromo sopra una superficie di rotazione ». Sbrana F. 367.

— « Sopra un teorema fondamentale della teoria delle algebre ». Scorza G. 65.

— « Sulla struttura delle algebre pseudonulle ». Id. 143.

— « Proprietà in grande delle linee piane convesse: Sulla curvatura degli archi convessi soggetti a date condizioni agli estremi ». Nota I. Segre B. 407.

— « Osservazione sopra due funzioni analitiche che soddisfano ad una particolare condizione ». Sestini G. 404.

Matematica. — « Caratterizzazione geometrica, topologica e trascendente delle serie di equivalenza sopra una superficie ». Severi F. 287.

— « Ancora sulla caratterizzazione topologica e trascendente delle serie di equivalenza sopra una superficie ». Id. 395.

— « Sulle serie doppie di funzioni ortogonali e normali ». Nota II. Severini C. 18.

— « Sulla integrazione delle successioni ricorrenti del secondo ordine, lineari ed omogenee ». Nota II. Toscano L. 14.

— « Sulla teoria delle ipersuperficie iperalgebriche ». Villa M. 9.

— « Questioni di elasticità vincolata. — II. Forma appropriata del ds^2 e conseguenze del vincolo geometrico ». Volterra E. 463.

Meccanica. — « Formule generali per il calcolo delle azioni dinamiche esercitate da una corrente piana non stazionaria su un ostacolo mobile ». Consiglio A. 310.

— « Ostacolo ellittico mobile investito da una corrente piana irrotazionale ». Id. 315.

— « Stabilità statica e stabilità cinetica nei motovelivoli ». Crocco G. A. 149.

— « Il concetto di "fuoco" nella stabilità dei velivoli ». Id. 233.

— « La sicurezza dei velivoli all'incontro con una raffica ascendente ». Id. 403.

— « Sulla teoria della turbolenza ». Ferrari C. 100.

— « Correzione einsteiniana del tempo nel movimento planetario ». Nota II. García G. 174.

— « L'invariante adiabatico di Gibbs-Hertz nel problema ristretto dei tre corpi ». Lampariello G. 416.

— « Perfezionamento della regola di equivalenza fra moti einsteiniani e moti newtoniani ». Levi-Civita T. 398.

— « Sul moto piano discontinuo indotto da una sorgente addossata ad una lamina rettilinea indefinita ». Masotti A. 169.

— « Sulle curve definite da un sistema di equazioni differenziali di secondo ordine. I. Intorno ad un metodo di analisi quali-

tativa applicato ai problemi dinamici con due gradi di libertà ». « II. Qualche proprietà delle traiettorie nel problema dei tre corpi del Hill ». « III. A proposito d'un metodo di studio delle curve integrali nel sistema di tre equazioni differenziali di secondo ordine». « IV. Di alcune proprietà delle traiettorie nel problema del moto centrale di un punto riferito ad un sistema di assi rotanti ». MOISSEIEV N. 178, 256, 261, 321.

Meccanica. — « Gruppi di onde associati a sciami di elettroni ». PERETTI G. 411.

— « Questioni di elasticità vincolata. I. Componenti di deformazione e potenziale elastico in coordinate qualsivogliano ». VOLTERRA E. 424, 463.

Mineralogia. — « Contributo alla conoscenza petrografica della Sardegna. Un caratteristico filone kersantitico a "facies" prasinitica del Sarrabus ». Nota II. CAVINATO A. 205.

P

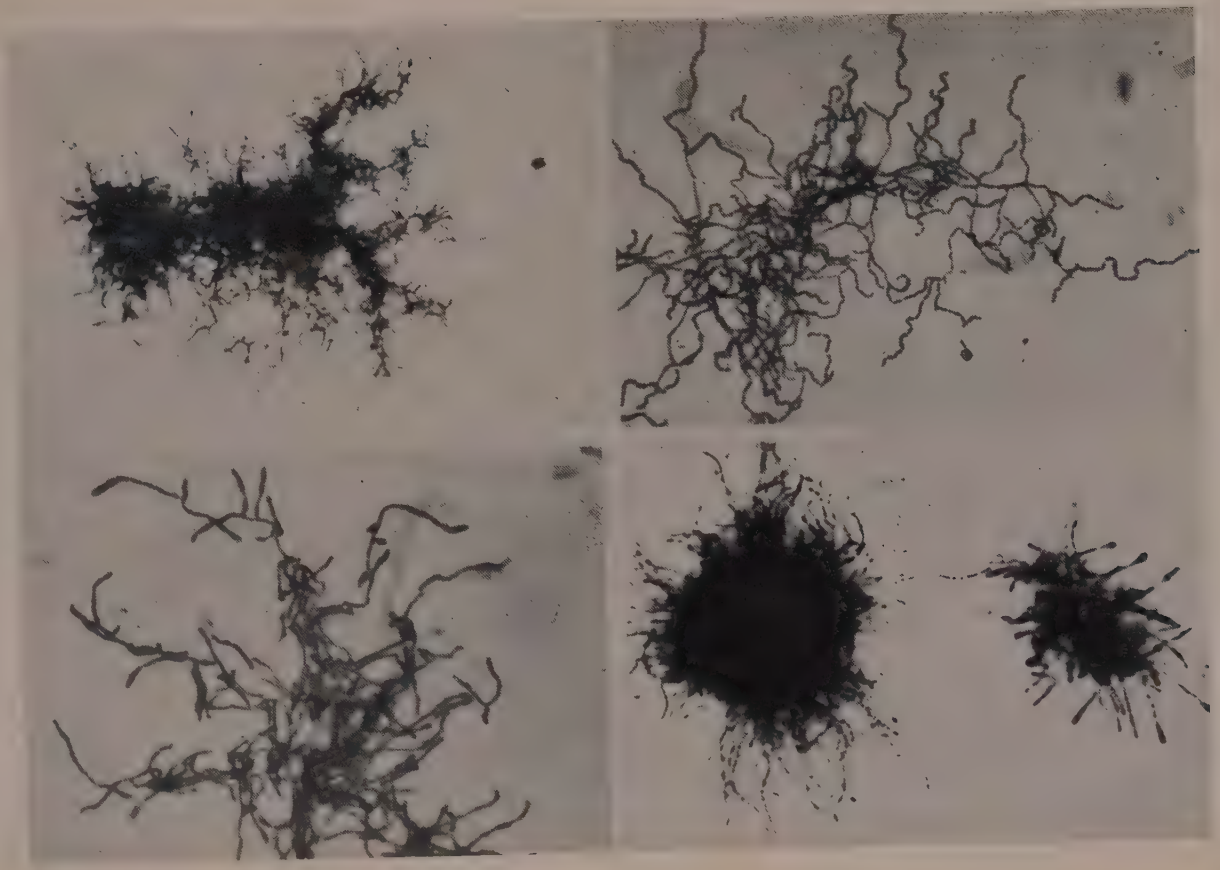
Paleontologia. — « Osservazioni sull'apparato masticatorio del genere "Orthopsis" ». SERRA G. 51.

Personale Accademico. — 352.

Presentazione di libri. — 352, 445.

Presentazione di Note e Memorie. — 352, 445.

Presentazione di plichi suggellati. — 352.



In alto a sin.: *Asteroides asteroides*, micelio prima della frammentazione.
In alto a d.: *Asteroides pseudocarneus*, micelio ondulato in via di risoluzione in articoli coccoidi.

3 8198 304 934 787
UNIVERSITY OF ILLINOIS AT CHICAGO